Точные решения в гидродинамике сжимаемой жидкости и методы функциональных подстановок типа Коула-Хопфа

В. М. Журавлев[+**]

19 мая 2010

Аннотация

Построено общее представление решений одномерных течений вязкой сжимаемой жидкости, позволяющее находить их точные решения. Найдено общее представление решений уравнений Эйлера трехмерных течений сжимаемой жидкости. По аналогии найдено представление для течений в равномерно-вращающейся системе отсчета. Данный подход распространен на случай трехмерных вязких течений сжимаемой жидкости с определенного вида объемными силами.

1 Введение

К настоящему времени известно сравнительно небольшое количество точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса [1, 2] для течений сжимаемой жидкости в двумерном и трехмерном случае, которые могут служить базой для решения конкретных прикладных задач. Поэтому в настоящее время при решении большинства прикладных задач приоритет отдается численным моделям динамики жидкости. Однако такой подход не позволяет решить целый ряд фундаментальных задач в этой области.

[*]e-mail: zhvictorm@mail.ru

Поэтому поиски методов построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса остаются одним из активных направлений исследования в математической физике и гидромеханике (см., например, [3, 4] и библиографию там). Обычно точные решения строятся на основе параметризации некоторого класса течений, исходя из каких-либо симметрийных условий или аналитических свойств функций, входящих в параметризацию. Такой подход особенно эффективен в случае двумерных течений несжимаемой жидкости, для которых можно ввести функцию тока [1, 2] и использовать в явном виде дифференциальные законы сохранения (см. например,[7]). В трехмерном случае методы параметризации иные, но по сути сводятся к аналогичным методам [3, 4]. Достаточно универсальные методы для сжимаемой жидкости отсутствуют в настоящее время.

Для одномерных вязких течений классическим результатом является подстановка Коула-Хопфа, позволяющая свести уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности [5]. Обобщение этого подхода было использовано в работах [8, 9, 10] для построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса сжимаемой жидкости для одномерных течений. А в работе [11] в частном случае квазипотенциальных течений аналогичный результат был получен для двумерных течений идеальной жидкости. Эти результаты для одномерных течений интерпретируются с несколько иных позиций в данной работе, что позволяет получить еще еще более обобщенный результат, чем в [9, 10]. Как оказалось, новый способ параметризации одномерных течений может быть перенесен и на многомерный случай. В работе на основе такого подхода получены общие представления для трехмерных течений сжимаемой идеальной и вязкой жидкости, которые связываются некоторым функциональным преобразованием с другим набором уравнений, вид которых зависит от произвольных функций. Такое преобразование фактически является преобразованием Бэклунда. Выбор произвольных функций позволяет строить новые классы точных решений уравнений динамики жидкости.

2 Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа

Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа (МОПКХ) [9, 9, 10] базируется на следующих общих соотношениях. Рассматривая пару дифференциальных соотношений:

$$T_t + V(x,t)T_x = 0, \quad T_{xx} + U(x,t)T_x = 0, \tag{1}$$

можно показать прямыми вычислениями [9, 9, 10], что вся совокупность их дифференциальных следствий оказывается замкнутой, если функции $V(x,t)$ и $U(x,t)$ связаны одним уравнением:

$$U_t = \frac{\partial}{\partial x}\Big(V_x - UV\Big). \tag{2}$$

Это означает, что любая производная функции T может быть представлена в следующем виде:

$$T^{[k,n]} = \frac{\partial^{k+n}T}{\partial x^k \partial t^n} = A^{(k,n)}[U,V]T_x, \quad k,n = 0,1,2,\ldots,$$

где $A^{(k,n)}[U,V]$ - дифференциальные полиномы только и только функций U и V. Эти полиномы вычисляются рекуррентно из (2) по следующей схеме:

$$\begin{aligned} A^{(k+1,n)}[U,V] &= \frac{\partial}{\partial x}A^{(k,n)}[U,V] - UA^{(k,n)}[U,V], \\ A^{(k,n+1)}[U,V] &= \frac{\partial}{\partial t}A^{(k,n)}[U,V] - QA^{(k,n)}[U,V], \\ A^{(0,1)}[U,V] = V, \quad A^{(1,0)}&[U,V] = 1, \quad A^{(2,0)}[U,V] = U, \end{aligned} \tag{3}$$

где $Q = V_x - VU$. В этой схеме наиболее важным является то обстоятельство, что соотношения (2) и (3) выполняются при любой функции T. Пусть функции T выбираются из множества решений некоторого интегрируемого нелинейного уравнения в частных производных, например, линейного уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{L} C_{k,n}T^{[k,n]} + C_{01}T_t + C_{1,0}T_x = 0. \tag{4}$$

Тогда с помощью соотношений (3) уравнение (4) преобразуется к нелинейному уравнению для функций U и V:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{L} C_{k,n}A^{(k,n)}[U,V] - C_{01}V + C_{1,0} = 0. \tag{5}$$

Поэтому соотношения (1) можно рассматривать как обобщенные подстановки Коула-Хопфа, линеаризующие (5) к уравнению (4). В частном случае, когда функция T удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$T_t = \nu T_{xx},$$

функция U удовлетворяет уравнению Бюргерса

$$U_t = \nu U_{xx} - 2\nu U U_x.$$

В этом случае соотношения (1)эквивалентны классической подстановке Коула-Хопфа [5, 6], что оправдывает общее название данного подхода.

Данный метод обобщается на более широкий класс уравнений, в частности, на многомерные матричные уравнения в частных производных, а так же уравнения, в которых частные производные заменены на другие типы операций.

3 Многомерное матричное обобщение метода

Для случая произвольной размерности координатного пространства обобщение выглядит следующим образом. Для этого выпишем общие соотношения в случае произвольной координатной размерности $1+n$. Пусть $\hat{T} = \hat{T}(x^1, x^2, \ldots, x^n, t)$ - некоторая достаточно гладкая матричная функция координат $\mathbf{x} = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ и времени t. Значения функции задаются в множестве квадратных матриц конечного порядка M. Исходные уравнения в многомерном случае выглядят аналогично (1) и содержит ровно $n+1$ дифференциальное соотношение:

$$\hat{T}_t + \hat{V}\hat{T}_x = 0, \quad \hat{T}_{xx} = \hat{U}\hat{T}_x \tag{6}$$

$$\hat{T}_{,k} + \hat{W}_k\hat{T}_x = 0, \quad k = 2, \ldots, n, \tag{7}$$

содержащее $n+1$ вспомогательную матричную функцию $\hat{U},\ \hat{V},\ \hat{W}_k,\ k=2,\ldots,n$. Здесь и далее введены обозначения

$$\hat{T}_t=\frac{\partial\hat{T}}{\partial t},\ \ \hat{T}_x=\frac{\partial\hat{T}}{\partial x},\ \ \hat{T}_{xx}=\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial x^2},\ \ \hat{T}_{,k}=\frac{\partial\hat{T}}{\partial x^k},\ \ \hat{T}_{,k,j}=\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial x^k\partial x^j},\ \ \ldots.$$

Совокупность дифференциальных следствий соотношений из общего набора (6), будет замкнутой, в том же смысле, что и в размерности 1+1, если функции $\hat{U},\ \hat{V},\ \hat{W}_k,\ k=2,\ldots,n$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\hat{W}_{k,t}-\hat{V}_{,k}+\hat{V}\hat{W}_{k,x}-\hat{W}_k\hat{V}_x+[\hat{V},\hat{W}_k]\hat{U}=0,\\
&\hat{W}_{k,j}-\hat{W}_{j,k}+\hat{W}_k\hat{W}_{j,x}-\hat{W}_j\hat{W}_{k,x}+[\hat{W}_j,\hat{W}_k]\hat{U}=0,\\
&\hat{U}_{,k}-\hat{P}_{k,x}+[\hat{U},\hat{P}_k]=0,\\
&\hat{P}_{j,k}-\hat{P}_{k,j}+[\hat{P}_j,\hat{P}_k]=0,\\
&\hat{P}_{k,t}-\hat{Q}_{,k}+[\hat{P}_k,\hat{Q}]=0,
\end{aligned}\tag{8}$$

среди которых имеется только n линейно независимых уравнений, и введены обозначения:

$$\hat{T}_{xt}=\hat{Q}T_x,\ \ \hat{T}_{x,k}=\hat{P}_kT_x,\ \ \hat{T}_{t,k}=\hat{S}_k\hat{T}_x,\ \ \hat{T}_{,k,j}=\hat{Q}_{kj}\hat{T}_x,\quad k,j=2,\ldots,n.\tag{9}$$

При этом для всех производных матричной функции $\hat{T}$ выполняются соотношения:

$$\hat{T}^{[\mathbf{k}]}=\frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\partial x_n^{k_n}}\hat{T}=\hat{\mathbf{A}}^{(\mathbf{k})}[\hat{W}_0,\ldots,\hat{W}_n]\hat{T}_x.\tag{10}$$

Здесь $\mathbf{k}=(k_0,k_1,\ldots,k_n)$ - мультииндекс, $|\mathbf{k}|=k_0+k_1+\ldots+k_n$, $W_0=V,W_1=U$.

$$\begin{aligned}
&\hat{P}_k=-\hat{W}_{k,x}-\hat{W}_k\hat{U},\ \ \hat{S}_k=-\hat{W}_{k,t}-\hat{W}_k\hat{Q},\\
&\hat{Q}=\hat{V}-\hat{V}\hat{U},\ \ \hat{Q}_{kj}=-\hat{W}_{k,j}-\hat{W}_k\hat{P}_j,\\
&\quad k,j=2,\ldots,n.
\end{aligned}\tag{11}$$

4 Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа для течений сжимаемой жидкости

Частным примером использования МОПКХ, демонстрирующим эффективность данного метода, является его применение к задаче об одномерных и двумерных течениях сжимаемой жидкости [9]. В качестве интегрируемого уравнения для функции T в [9] было выбрано уравнение следующего вида:

$$T_{tt}T_{xx} - T_{xt}T_{xt} = 0. \tag{12}$$

В результате использования соотношений (3) это уравнение преобразуется к следующему виду:

$$(-V_t + VQ)U = Q^2,$$

которое после введения обозначения $u = V - V_x/U$, преобразуется к следующему уравнению:

$$u_t + uu_x = 0. \tag{13}$$

Уравнение же (2) при дополнительном обозначении $\rho = U$ переходить в уравнение следующего вида:

$$\rho_t + \Big(\rho u\Big)_x = 0. \tag{14}$$

Эти два уравнения в совокупности образуют систему уравнений Эйлера течений идеальной сжимаемой жидкости при нулевом давлении. Интегралом уравнения (12) является уравнение следующего вида:

$$T_t = H(T_x), \tag{15}$$

где $H(\xi)$ - произвольная функция одного аргумента. Если решение (15) найдено, то оно однозначно определяет поток сжимаемой жидкости со скоростью u и плотностью ρ, которые вычисляются из соотношений:

$$u = \frac{T_{xt}}{T_{xx}}, \quad \rho = -\frac{T_{xx}}{T_x}.$$

Последние два соотношения являются обобщенными подстановками Коула-Хопфа, которые приводят уравнения Эйлера к одному уравнению (15).

Уравнение (12) можно обобщить и в результате получить представление решений уравнений динамики вязкой жидкости при наличии объемных сил. Такой подходы был развит в работе [9].

5 Теория одномерных течений вязкой жидкости

Другой подход, позволяющий получить те же соотношения в ином виде и несколько их обобщить их, можно построить следующим образом. Продифференцируем первое уравнение (1) по переменной x. Полученное уравнение можно интерпретировать как уравнение сохранения массы жидкости с плотностью $\rho = T_{xx}$ и скоростью u:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0.$$

Заметим, что следствием (**??**) является вывод, что любая функция от производной вспомогательной функции T: $U = U(T_x)$ будет удовлетворять уравнению, аналогичному (**??**):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right) U(T_x) = 0. \tag{16}$$

Отсюда сразу следует, что если скорость $u(x,t)$, определенная соотношением (**??**), является произвольной функцией градиента T_x:

$$u(x,t) = U(T_x), \tag{17}$$

то для нее будет выполняться уравнение Эйлера с нулевыми силами в правой части:

$$u_t + uu_x = 0. \tag{18}$$

Это условие согласно (**??**) приводит к уравнению на функцию T следующего вида:

$$T_{xt} + U(T_x)T_{xx} = 0. \tag{19}$$

Это уравнение, записанное в форме уравнения относительно градиента $g = T_x$, принимает вид уравнения простых волн [6]:

$$g_t + U(g)g_x = 0. \tag{20}$$

Обобщенный по сравнению с [9, 10] результат состоит в том, что плотность жидкости, учитывая (16), может быть записана в следующем общем виде:

$$\varrho(x,t) = F(T_x)T_{xx}, \tag{21}$$

где $F(f)$ - произвольная функция своего аргумента. Функция ϱ вместе с функцией ρ, как легко проверить, удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\varrho_t + (\varrho u)_x = 0. \tag{22}$$

Уравнения (18) и (22) представляют полную систему уравнений течений идеальной жидкости с нулевым градиентом давления и внешними силами.

Другая, чем в [9], параметризация вязких одномерных течений теперь может быть построена следующим образом. Представим уравнение (22) в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln\varrho + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{23}$$

Дифференцируя это соотношение по x, приходим к следующему тождеству:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \ln(\varrho)}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varrho u_x\Big). \tag{24}$$

Рассмотрим вместо (17) представление для скорости потока в следующем виде:

$$u = U(T_x) - \nu\frac{\partial \ln\varrho}{\partial x}, \tag{25}$$

где ϱ определяется соотношением (21). Используя (24), для u получаем уравнение:

$$u_t + uu_x = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\nu\varrho u_x\Big). \tag{26}$$

Это есть уравнение Навье-Стокса одномерного течения вязкой жидкости с постоянной кинематической вязкостью ν при нулевых внешних силах и градиенте давления. При выполнении условия равенства нулю внешних сил и градиента давления уравнение (26) будем называть уравнением Бюргерса для сжимаемой жидкости. Вспомогательная функция $g = T_x$ в соответствие с (**??**) должна удовлетворять уравнению:

$$g_t + \left(U(g) - \nu\frac{\partial \ln F(g)}{\partial x}\right)g_x - \nu g_{xx} = 0. \tag{27}$$

Заметим, что в рамках выбранного представления для скорости уравнение (27), а с ним и всю параметризацию решений, можно преобразовать к более простому виду. Введем функцию $\theta(x,t) = S(T_x) = S(g)$, где $S'(g) = F(g)$. Тогда имеем:

$$\theta_x = S'(T_x)T_{xx} = F(T_x)T_{xx} = \varrho. \tag{28}$$

Умножая (27) на $F(T_x)$ и используя определение функции θ, приходим к следующему уравнению:

$$\theta_t + \tilde{U}(\theta)\theta_x - \nu\theta_{xx} = 0. \tag{29}$$

Здесь $\tilde{U}(\theta) = U(S^{-1}(\theta))$ (при условии $\theta = S(g)$). Эйлерова скорость в этом случае будет иметь следующий вид:

$$u(x,t) = -\frac{\theta_t}{\theta_x}. \tag{30}$$

Уравнение (29) представляет собой обобщение уравнения Бюргерса и совпадает с ним в случае $\tilde{U}(\theta) = \theta$.

Для вывода общего представления для одномерного течения вязкой сжимаемой жидкости с градиентом давления предположим, что вспомогательная функция T зависит от некоторого непрерывного параметра ξ: $T = T(x,t,\xi)$. Дифференцируя соотношение (23) по параметру ξ, вместо (24) получаем следующее тождество:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Big)\frac{\partial \ln(\varrho)}{\partial \xi} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varrho u_\xi\Big). \tag{31}$$

Вместо (25) рассмотрим теперь следующее представление для скорости потока $u(x,t)$:

$$u = U(T_x) - \nu\frac{\partial \ln\varrho}{\partial x} + \alpha(\xi)\frac{\partial \ln\varrho}{\partial \xi}, \tag{32}$$

где $\alpha(\xi)$ - произвольная функция параметра. Как не трудно убедится, теперь уравнение для поля u будет иметь следующий вид:

$$u_t + uu_x = \nu\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varrho u_x\Big) - \frac{\alpha(\xi)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varrho u_\xi\Big).$$

Это уравнение приобретает вид уравнения Навье-Стокса с градиентом давления:

$$u_t + uu_x = \nu\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varrho u_x\Big) - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{33}$$

если в качестве давления в жидкости использовать функцию:

$$P = \alpha(\xi)\varrho u_\xi.$$

Этот результат еще можно обобщить, если учесть, что вместо параметра ξ можно взять время t, а вместо $\alpha(\xi)$ некоторую постоянную β. Дополняя (32) соответствующим слагаемым, получаем

$$u = U(T_x) - \nu\frac{\partial \ln\varrho}{\partial x} + \alpha(\xi)\frac{\partial \ln\varrho}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial \ln\varrho}{\partial t}. \tag{34}$$

Уравнение для u будет в точности совпадать с (33), если в качестве функции давления использовать функцию:

$$P = \alpha(\xi)\varrho u_\xi + \beta\varrho u_t. \tag{35}$$

Вместо (27) получаем для вспомогательной функции $g = T_x$ уравнение следующего вида:

$$\begin{gathered} g_t + \left(U(g) - \nu\frac{\partial \ln F(g)}{\partial x} + \alpha(\xi)\frac{\partial \ln F(g)}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial \ln F(g)}{\partial t}\right)g_x - \\ -\nu g_{xx} + \alpha(\xi)g_{x\xi} + \beta g_{xt} = 0. \end{gathered} \tag{36}$$

Эти соотношения дают общий способ вычислять решения уравнения Навье-Стокса (33) с помощью решений уравнения (36).

Если вновь воспользоваться функцией $\theta(x,t) = S(T_x) = S(g)$ уравнение (36) упрощается:

$$\theta_t + \tilde{U}(\theta)\theta_x - \nu\theta_{xx} + \alpha(\xi)\theta_{x\xi} + \beta\theta_{xt} = 0. \tag{37}$$

В этом случае эйлерова скорость и давление в жидкости будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} u(x,t) = -\frac{\theta_t}{\theta_x}, \quad \varrho = \theta_x, \\ P = \frac{1}{\theta_x}\left[\alpha\Big(\theta_t\theta_{\xi x} - \theta_x\theta_{\xi t}\Big) + \beta\Big(\theta_t\theta_{tx} - \theta_x\theta_{tt}\Big)\right]. \end{gathered} \tag{38}$$

В частности, в случае отсутствия давления в среде уравнение Навье-Стокса (33) для сжимаемой жидкости имеет решения $u(x,t)$, которые вычисляются с помощью формулы (38), в которых функция θ удовлетворяет уравнению:

$$\theta_t + \Big(U_0 + U_1\theta\Big)\theta_x - \nu\theta_{xx} = 0,$$

с произвольными постоянными U_0 и U_1. Последнее уравнение является уравнением Бюргерса для несжимаемой жидкости. Это устанавливает связь между решениями этого уравнения и решениями уравнения Бюргерса сжимаемой жидкости (33).

Обратим внимание на то, что формальной заменой $\theta = \ln T_x$ полученное решение фактически преобразуется к решению, которое строится с помощью МОПКХ в [9]. Отличием является то, что в рамках рассмотренного подхода выражение для функции давления получено с помощью введения зависимости вспомогательных функций от параметров, в частности за счет параметрической зависимости от времени. Это отличие позволяет более просто описывать структуру течений, возникающих при наличии давления в среде.

6 Метод подстановок Коула-Хопфа для двумерных течений

Для построения решений двумерных уравнений Эйлера полезно [**?**] перейти в комплексные координаты $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

Следуя общим соображениям работы [**?**], рассмотрим пару уравнений, описывающих перенос изолиний некоторой функции $T = T(z, \overline{z}, t)$ в двумерном пространстве:

$$T_t + WT_z = 0, \quad T_t + \overline{W}T_{\overline{z}} = 0, \tag{39}$$

где $W = W(z, \overline{z}, t)$ - комплексная скорость этого переноса. Дополним эту систему еще одним формальным соотношением:

$$T_{tt} = Q(z, \overline{z}, t)T_t. \tag{40}$$

Совокупность этих соотношений позволяет выразить все высшие производные функции T по переменным $z, \overline{z}, t$ только через одну производную, например, T_t. Совокупность вторых производных, которые далее будут называться базовыми имеет следующий вид:

$$T_z = -\frac{1}{W}T_t, \quad T_{z\overline{z}} = RT_t, \quad T_{zt} = PT_t, \tag{41}$$

$$T_{zz} = \frac{1}{W^3}\left[WW_z - W_t + QW\right]T_t. \tag{42}$$

Здесь

$$P = \frac{1}{W^2}\left[W_t - QW\right], \tag{43}$$

$$R = \frac{1}{|W|^4}\left[\overline{W}^2 W_{\overline{z}} - W\overline{W}_t + Q|\overline{W}|^2\right] = \tag{44}$$

$$= \frac{1}{|W|^4}\left[W^2\overline{W}_z - \overline{W}W_t + Q|\overline{W}|^2\right].$$

Отметим, что R, как и Q, является вещественными функциями. Для каждого из уравнений (41) выполняется и комплексно сопряженное уравнение. Из последних двух соотношений следует условие совместности:

$$\overline{W}^2 W_{\overline{z}} - W\overline{W}_t = W^2\overline{W}_z - \overline{W}W_t. \tag{45}$$

Еще два условия совместности следует из сравнения производных третьего порядка. Именно, полагая $T_{ttz} = T_{tzt}$ и используя (41), находим:

$$Q_z = P_t, \quad Q_{\overline{z}} = \overline{P}_t, \tag{46}$$

где Q определяется (40). Аналогично, из равенства: $T_{zt\overline{z}} = T_{z\overline{z}t}$ находим еще одну пару структурных соотношений:

$$R_t - P_{\overline{z}} = P\overline{P} - RQ, \quad R_t - \overline{P}_z = P\overline{P} - RQ. \tag{47}$$

Отсюда в силу вещественности Q и R сразу следует еще один закон сохранения:

$$P_{\overline{z}} = \overline{P}_z. \tag{48}$$

С другой стороны, функция Q связана с P, R и W следующим образом:

$$Q = -PW + \frac{W_t}{W} = -\overline{PW} + \frac{\overline{W}_t}{\overline{W}}, \tag{49}$$

$$P = -R\overline{W} + \frac{\overline{W}_z}{\overline{W}}, \quad \overline{P} = -RW + \frac{W_{\overline{z}}}{W}. \tag{50}$$

Используя (49) и (46), соотношения (47) можно привести к следующим эквивалентным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(RW\Big) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(PW\Big), \ \frac{\partial}{\partial t}\Big(R\overline{W}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\overline{PW}\Big), \tag{51}$$

Эти соотношения являются прямым эквивалентом уравнений в размерности 1+1, которые использовались выше для построения решений одномерных течений сжимаемой жидкости. Их теперь можно использовать для выяснения структуры решений уравнений двумерных течений сжимаемой жидкости.

Для того, что бы имелась возможность интерпретации полученных уравнений как гидродинамических уравнений, необходимо получить из них в явном виде уравнение неразрывности. Это можно сделать преобразуя соотношения (47). Рассмотрим в качестве комплексной скорости течения $S = u - iv$, где u и v - компоненты скорости течения по декартовым осям x, y величины определенные следующим образом:

$$u - iv = S = -P/R = W - W_{\overline{z}}/(WR), \tag{52}$$

Плотность жидкости ρ определим:

$$\rho = R.$$

При использовании введенных обозначений вещественная часть уравнений (47) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = -\rho Q + \rho(u^2 + v^2), \tag{53}$$

а мнимая эквивалентна условию квазипотенциальности, т.е. потенциальности плотности импульса жидкости:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial y} - \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0. \tag{54}$$

Для построения точного аналога уравнений Эйлера по аналогии с (12) рассмотрим в качестве уравнения для T уравнение следующего вида:

$$\Big\{T_{\overline{z}}, T_t\Big\} = T_{\overline{z}z}T_{tt} - T_{\overline{z}t}T_{zt} = 0, \tag{55}$$

где введены скобки $\{,\}$:

$$\Big\{G, H\Big\} = G_z H_t - G_t H_z.$$

Уравнение (55) эквивалентно связи:

$$P\overline{P} - RQ = 0. \tag{56}$$

Если подставить выражения из (43) и (49) для R, Q, P в (56), то это уравнение примет следующий вид:

$$W_t + \overline{W} W_{\overline{z}} = \frac{|W_t|^2}{Q\overline{W}}.$$

При выполнении (56) уравнения (47) будут выглядеть следующим образом:

$$R_t = P_{\overline{z}}, \quad R_t = \overline{P}_z. \tag{57}$$

В этом случае (53) примет стандартный вид уравнения неразрывности:

$$\rho_t + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \tag{58}$$

Уравнения же (**??**) становятся уравнениями Эйлера для квазипотенциального течения жидкости:

$$2\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\Big(u^2 + v^2\Big)\right] = 0, \tag{59}$$

$$2\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\Big(u^2 + v^2\Big)\right] = 0. \tag{60}$$

Уравнения (58), (59) и (60) в совокупности представляют собой уравнения Эйлера сжимаемой жидкости с потенциальной плотностью импульса, удовлетворяющего условию (54).

5. Точные решения уравнений Эйлера (58)-(60) могут быть построены с помощью всей совокупности соотношений для функций W, P, Q, R, реализующих обобщенную подстановку Коула-Хопфа для заданной вещественной функции T, которая должна удовлетворять уравнению (55). По своей структуре это уравнение аналогично, рассмотренному в разделе, касающемуся одномерным течениям. Общий интеграл этого уравнения можно представить в следующей форме:

$$T_t = H\Big(T_{\overline{z}}\Big), \tag{61}$$

где $H(Z)$ - произвольная аналитическая функция одного комплексного аргумента $Z = X + iY = (T_x + iT_y)/2$. Уравнение (61) распадается на вещественную и мнимую часть:

$$T_t = A(T_x, T_y), \quad B(T_x, T_y) = 0, \tag{62}$$

где функции $A(X,Y)$ и $B(X,Y)$, удовлетворяют условиям Коши:

$$\begin{aligned} &A_X = -B_Y, \quad A_Y = B_X, \\ &A_{XX} + A_{YY} = 0, \quad B_{XX} + B_{YY} = 0. \end{aligned}$$

Например, для случая, $H = -iZ^2$ имеем:

$$2T_t = T_x T_y, \quad (T_x)^2 - (T_y)^2 = 0. \tag{63}$$

Это и другие решения этих уравнений многозначны не только в смысле обрушения волн вдоль характеристик, но и в смысле наличия у них множества пересекающихся характеристик. Уравнения (63) имеют две характеристики $T_y = \varepsilon T_x$, где $\varepsilon = \pm 1$, на каждой из которых решение для $q = T_x$ находится как решение уравнения простых волн: $2q_t = \varepsilon q q_x$ (см. [6]). Другой пример $H(Z) = e^{2Z}$, приводящий к системе:

$$T_t = e^{T_x} \cos\left(T_y\right), \quad \sin(T_y) = 0,$$

демонстрирует ситуацию с бесконечным дискретным числом характеристик $T_y = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7 Трехмерные уравнения Эйлера течений идеальной сжимаемой жидкости

Пользуясь подходом, который был развит для одномерных течений с помощью прямой интерпретации поля скорости (17) и (**??**), можно развить метод построения точных решений уравнений Эйлера и Навье-Стокса в двумерном и трехмерном пространстве. Для перехода к описанию трехмерных течений рассмотрим уравнение переноса гидродинамическим потоком со скоростью $\mathbf{u}$ вспомогательного векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ с компонентами $A_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \alpha = 1, 2, 3$ ($\mathbf{x} = (x, y, z)$):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^\beta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) A_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{64}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Из этого уравнения векторное поле скорости переноса $\mathbf{u}$ определяется однозначно:

$$u^\alpha = -Q^{\alpha\beta} A_\beta, \tag{65}$$

где $Q^{\alpha\beta}$ - элементы матрицы $\hat{Q}$ обратной к матрице $\hat{G} = G_{\alpha\beta}$ производных векторного поля $\mathbf{A}$:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad Q^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma.$$

Выполнение уравнения (64) означает, что для любой функции $R = R(A_1, A_2, A_3) \equiv R(\mathbf{A})$, зависящей только от компонент поля $\mathbf{A}$, выполняется следующее тождество:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^\beta(\mathbf{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) R(\mathbf{A}) = 0, \quad \beta = 1, 2, 3. \tag{66}$$

Дифференцируя уравнение (64) по координатам x^γ, получаем уравнение для матрицы $\hat{G}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\alpha\beta} + u^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\alpha\beta} + \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\beta} G_{\alpha\gamma} = 0. \tag{67}$$

Сворачивая это соотношение по свободному индексу α вместе с элементами матрицы $\hat{Q}$, находим:

$$Q^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\beta\gamma} + Q^{\alpha\beta} u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\beta\gamma} + \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\gamma} Q^{\alpha\beta} G_{\beta\nu} = 0.$$

Учитывая, что матрицы $\hat{Q}$ и $\hat{G}$ взаимно обратны, сворачивая последнее соотношение по индексам α и γ, преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\det\hat{G} + u^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \ln\det\hat{G} + \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\gamma} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \det\hat{G} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Big(u^\gamma \det\hat{G}\Big) = 0. \tag{68}$$

Это уравнение будет играть роль уравнения неразрывности сжимаемой жидкости с плотностью $\rho = \det\hat{G}$. Теперь, используя уравнение (66), устанавливаем, что векторное поле $\mathbf{u}$ будет удовлетворять уравнению Эйлера с нулевыми внешними силами и градиентом давления, если его компоненты будут произвольными функциями компонент поля $\mathbf{A}$, т.е.

$$u^\alpha = -Q^{\alpha\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial t} = U^\alpha(\mathbf{A}). \tag{69}$$

Последнюю совокупность соотношений следует рассматривать как систему уравнений, которым должно удовлетворять поле $\mathbf{A}$ для того, что бы поле $\mathbf{u}$, заданное с помощью (65), удовлетворяло уравнениям Эйлера:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = 0. \tag{70}$$

Уравнения (69) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} U^\beta(\mathbf{A}) = 0. \tag{71}$$

Полученную связь между уравнением Эйлера (70) и уравнением (71) можно рассматривать как преобразование Бэклунда [?]. Каждое решение уравнения (71) при любых заданных функциях $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{A})$ будет давать решение уравнения (70).

Содержательным частным примером является выбор вспомогательного поля $\mathbf{A}$ в виде градиента скалярной функции T:

$$A_\alpha = T_{,\alpha} = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}. \tag{72}$$

Для того, чтобы в этом случае система была совместна, поле $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3)$ должно иметь определенные свойства, которые допускали бы общий интеграл для всех трех уравнений. Это возможно, если существует такая функция $H(T_x, T_y, T_z)$, что:

$$U^\alpha = \frac{\partial H}{\partial T_{,\alpha}}. \tag{73}$$

В этом случае функция T должна удовлетворять одному уравнению следующего вида:

$$T_t = H(T_x, T_y, T_z) + C(t), \tag{74}$$

где $C(t)$ - произвольная функция времени.

Для построения решений полной системы уравнений Эйлера к уравнениям (70) необходимо добавить уравнение сохранения массы. В силу (66) уравнению неразрывности удовлетворяет более общая функция, чем ρ. Прямой проверкой устанавливается, что любая функция:

$$\varrho = R(\mathbf{A}) \det(\hat{G}). \tag{75}$$

удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0. \tag{76}$$

Окончательно собирая все полученные результаты приходим к следующему утверждению:

Утверждение 2. Любое достаточное число раз дифференцируемое решение $\mathbf{A}$ уравнения (71) с помощью подстановки (69) определяет точное решение $\mathbf{u}$ уравнений Эйлера (70) и (76) для плотности жидкости (75).

Вся совокупность решений этих уравнений определяется произвольным выбором векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{A})$ и функции $R(\mathbf{A})$, которые зависят только от компонент вспомогательного векторного поля $\mathbf{A}$. В отличие от одномерного случая, по сей видимости, не существует преобразования, исключающее функцию $R(\mathbf{A})$ из системы уравнений (70) и (76).

В частности, решения уравнений Эйлера несжимаемой жидкости ($\varrho = \varrho_0 = \mathrm{const}$):

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0.$$

получаются в рамках предложенного подхода, если потребовать:

$$R(\mathbf{A}) \det \hat{G} = \varrho_0 = \mathrm{const}.$$

Последнее уравнение представляет собой уравнение типа Монжа-Ампера [12].

8 Трехмерные течения вязкой сжимаемой жидкости

По аналогии с представлением (25) для вязкого течения в одномерном случае рассмотрим поле скорости следующего вида:

$$u^\alpha = U^\alpha(\mathbf{A}) - \nu \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\alpha}, \tag{77}$$

Используя соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \varrho + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \ln \varrho + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = 0, \tag{78}$$

вытекающее из (76), после дифференцирования по $\mathbf{x}$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\alpha} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = 0.$$

Это тождество позволяет привести уравнение для $\mathbf{u}$ к следующему виду:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\nu}{\varrho} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\varrho \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right). \tag{79}$$

Уравнение для поля $\mathbf{A}$ в этом случае оказывается следующим:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} U^\beta(\mathbf{A}) = \nu G_{\alpha\beta} \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\beta}.$$

Уравнение (79) в правой части содержит выражение, которое представляет собой часть силы, обусловленной вязкостью среды. Для того, чтобы получить оставшуюся часть этой силы необходимо дополнить представление (77) еще одним слагаемым.

Продифференцируем уравнение (67) по координатам x^γ:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\alpha\beta} + u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\alpha\beta} \right) + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} G_{\alpha\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\alpha\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \right) + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} G_{\alpha\mu} = 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Полученный результат умножим на матрицу $\hat{Q}$ слева и преобразуем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} \left[Q^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\beta} \right] + u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[Q^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\beta} \right] \right) - \\ &- \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\beta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) Q^{\alpha\mu} + \\ &+ Q^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} G_{\mu\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \right) + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} = 0. \end{aligned} \tag{81}$$

Здесь учтено, что матрицы $\hat{G}$ и $\hat{Q}$ взаимно обратны: $\hat{G}\hat{Q} = \hat{I}$. Исходя из (67), (76) и взаимной обратности матриц $\hat{Q}$ и $\hat{G}$, находим уравнение для матрицы $\hat{Q}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \right) Q^{\alpha\beta} - \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\gamma} Q^{\gamma\beta} = 0. \tag{82}$$

В результате соотношение (81) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} \left[Q^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\beta} \right] + u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[Q^{\alpha\mu} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\beta} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\nu} Q^{\nu\mu} + \\ &+ Q^{\alpha\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} G_{\mu\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} G_{\mu\nu} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \right) + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} = 0. \end{aligned} \tag{83}$$

Полученное соотношение содержит три свободных индекса. Сворачивая (83) по индексам α и β, приходим к следующему выражению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left[Q^{\alpha\beta}\Delta A_\beta\right] + u^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left[Q^{\alpha\beta}\Delta A_\beta\right]\right) + \Delta u^\alpha + f^\alpha = 0, \tag{84}$$

где

$$f^\alpha = -\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\nu} Q^{\nu\mu}\Delta A_\mu + 2Q^{\alpha\mu}\frac{\partial}{\partial x^\beta} G_{\mu\nu}\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} \tag{85}$$

Соотношение (84) означает, что поле скорости следующего вида:

$$u^\alpha = U^\alpha(\mathbf{A}) - \nu Q^{\alpha\beta}\Delta A_\beta, \tag{86}$$

удовлетворяет уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + u^\beta \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} = \nu\Delta u^\alpha + \nu f^\alpha,$$

с объемной силой с компонентами (85).

Умножая (84) на ϱ, приходим к уравнению Навье-Стокса для вязкой жидкости в следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\varrho u^\alpha u^\beta) = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\nu\varrho\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right) + F^\alpha, \tag{87}$$

где

$$F^\alpha = \nu\varrho f^\alpha - \nu\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial \varrho}{\partial x^\beta}.$$

Уравнение (86), используя исходное представление для поля $\mathbf{u}$, можно записать в следующей форме:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + U^\beta(\mathbf{A})\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \nu\Delta A_\alpha.$$

Объединяя представления (86) и (77), получаем, что в случае, если поле $\mathbf{u}$ можно представить в следующем виде:

$$u^\alpha = U^\alpha(\mathbf{A}) - \nu Q^{\alpha\beta}\Delta A_\beta - \nu\frac{\partial \ln\varrho}{\partial x^\alpha}, \tag{88}$$

оно будет удовлетворять “полному” уравнению Навье-Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u^\alpha) + \frac{\partial}{\partial x^\beta}(\varrho u^\alpha u^\beta) = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\nu\varrho\left[\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right]\right) + F^\alpha, \tag{89}$$

где $\mathbf{F}$ тоже, что и в (87), а уравнение для $\mathbf{A}$ примет следующий вид:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + \left(U^\beta(\mathbf{A}) - \nu \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\beta}\right) \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \nu \Delta A_\alpha. \tag{90}$$

Полученный результат можно сформулировать в форме следующего утверждения:

Утверждение 3. Любое решение уравнения (90) связано с решением уравнений Навье-Стокса сжимаемой жидкости (89) и (76) соотношениями (88) и (75).

9 Трехмерные течения с градиентом давления

По аналогии с одномерными течениями в трехмерном случае можно так же ввести такое представление поля эйлеровой скорости, которое будет учитывать наличие градиента давления. Для этого предположим, что вспомогательное поле $\mathbf{A}$ зависит явно от трех непрерывных параметров ξ^a, $a = 1, 2, 3$:

$$A^\alpha = A^\alpha(\mathbf{x}, t, \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3).$$

Дифференцируя (78) по параметрам $\mathbf{z}$ и t, приходим к следующим тождествам:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \xi^a} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \xi^a} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\varrho \frac{\partial u^\beta}{\partial \xi^a}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \ln \varrho}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\varrho \frac{\partial u^\beta}{\partial t}\right),$$

которые аналогичны (24) и (31). Рассмотрим следующее представление поля эйлеровой скорости $\mathbf{u}$:

$$u^\alpha = U^\alpha(\mathbf{A}) - \nu Q^{\alpha\beta}\Delta A_\beta - \nu \frac{\partial \ln \varrho}{\partial x^\alpha} + q(\mathbf{z})\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \xi^\alpha} + s\frac{\partial \ln \varrho}{\partial t},$$

где $q(\mathbf{z})$ - произвольная функция параметров $\mathbf{z}$, а s - произвольная постоянная. Допустим, что существует такое векторное поле $\mathbf{B}$ с компонентами $B^a = B^a(\mathbf{x}, t, \mathbf{z})$, что для него выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\partial B^\beta}{\partial x^a} = q(\mathbf{z})\varrho \frac{\partial u^\beta}{\partial \xi^a} + s\varrho \frac{\partial u^\beta}{\partial t}. \tag{91}$$

Тогда уравнение для $\mathbf{u}$ примет вид уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho u^\alpha)+\frac{\partial}{\partial x^\beta}(\varrho u^\alpha u^\beta)=\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\nu\varrho\left[\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}+\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right]\right)-\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}-F^\alpha \quad (92)$$

с градиентом давления P:

$$P=\frac{\partial B^\beta}{\partial x^\beta}.$$

Уравнение для вспомогательного поля $\mathbf{A}$ будет теперь таким:

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}+\left(U^\beta(\mathbf{A})-\nu\frac{\partial\ln\varrho}{\partial x^\beta}+q(\mathbf{z})\frac{\partial\ln\varrho}{\partial\xi^\beta}+s\frac{\partial\ln\varrho}{\partial t}\right)\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}=\nu\Delta A_\alpha.$$

Уравнения (91) интегрируются, однако трудность использования такого подхода в размерности больше 1 состоит в том, что давление, как правило, должно задаваться уравнением состояния вещества, связывающего давление с плотностью среды и энтропией (или температурой). Поэтому в трехмерном случае данный подход требует дополнительного исследования.

10 Заключение

Проведенные построения дают общее представление о структуре решений уравнений Эйлера и частично о структуре решений уравнений Навье-Стокса. В уравнения для вспомогательных полей T_x в одномерном случае и $\mathbf{A}$ в трехмерном (двумерный случай рассматривается аналогично), входят произвольные функции ($U(\mathbf{A})$, $R(\mathbf{A})$ и т.д.), что позволяет, в частности, получать новые точные решения этих уравнений, подбирая подходящим образом эти произвольные функции. Хотя в развитом подходе приходится иметь дело с уравнениями Эйлера с нулевыми объемными силами и градиентом давления, тем не менее, данный метод позволяет вводить в полученные параметризации поля скорости дополнительные слагаемые, которые могут позволить параметризовать внешние объемные силы с определенными свойствами. Отметим также, что в случае двумерных уравнений Эйлера и Навье-Стокса, которые отдельно не рассматривались в данной работе, могут появиться дополнительные возможности упростить уравнения для вспомогательных полей и тем самым получать содержательные представления для поля скорости.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 08-01-97013-р_поволжье_а.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, (1950)

[2] Кочин Н.Е.,Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Наука, (1963)

[3] Полянин А.Д., Аристов С.Н., ДАН, **420**:2, 180-185

[4] Броман Г.И. , Руденко О.В. , УФН, **180**:1 (2010), 97-104

[5] J.M.Burgers. The nonlinear diffusion equation. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974

[6] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1978

[7] Журавлев В.М., ПММ, **58**:6 (1994), 60-67

[8] Журавлев В.М., Никитин А.В., Нелинейный мир, **5**, N 9, 603-611 (2007)

[9] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А., Письма в ЖЭТФ, **87**, N 5, 314-319 (2008)

[10] Журавлев В.М., ТМФ, **158**:1 (2009), 58-71

[11] Журавлев В.М., Зиновьев Д.А., Письма в ЖЭТФ, **88**:3 (2008), 194

[12] Погорелов А.В. Многомерное уравнение Монжа-Ампера. М.: Наука, (1988) (1988)