Ф И З И К А

УДК 530.182, 53.01, 51-7
DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-7

В. М. Журавлев

МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. В работе строится многофункциональное расширение метода функциональных подстановок для нелинейных уравнений в частных производных. Целью работы является доказательство связи между методом обратной задачи (МОЗ) и методом функциональных подстановок, которые играют важную роль в современной теории нелинейных волновых процессов в различных типах физических систем. Такая связь дает возможность создать эффективный способ вычисления решений уравнений математической физики, интегрируемых с помощью метода обратной задачи.

Материалы и методы. Основным методом, который используется в работе, является метод функциональных подстановок в скалярной и матричной формах. Для установления связи новой формы решений уравнений типа Кортевега – де Вриза и нелинейного уравнения Шредингера используется метод преобразований Дарбу, играющий важную роль в МОЗ.

Результаты. Развит способ расширения метода функциональных подстановок в скалярной и матричной формах, позволяющий получить новые интегрируемые модели теоретической и математической физики вместе с их решениями. Для интегрируемых с помощью МОЗ уравнений на примере уравнений Кортевега – де-Вриза и нелинейного уравнения Шредингера построен новый эффективный способ построения точных решений, эквивалентных новому типу многофункциональных подстановок.

Выводы. Развитый подход дает новый способ построения интегрируемых моделей теоретической и математической физики вместе с их точными решениями.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, метод обратной задачи, многосолитонные решения, преобразования Дарбу, уравнение Кортевега – де-Вриза.

V. M. Zhuravlev

MULTIFUNCTIONAL SUBSTITUTIONS AND SOLITON SOLUTIONS OF INTEGRATED NONLINEAR EQUATIONS

---

[1] Работа выполнена из средств проектов РФФИ 16-42-732119 р_офи_м и 16-42-732113 р_офи_м.

Abstract.

Background. A multifunctional extension of the functional substitution method for nonlinear partial differential equations is constructed. The aim of the work is to prove the connection between the inverse problem method (IPM) and the functional substitution method (MFP), which play an important role in the modern theory of nonlinear wave processes in various types of physical systems. Such a relationship makes it possible to create an effective way to calculate solutions of integrable using the inverse problem method of equations of mathematical physics, based on functional substitutions.

Materials and methods. The main method used in the work is the method of functional substitutions in the scalar and matrix of its forms. To establish the connection between the new form of solutions of the Korteweg – de Vries (KdV) type equation and the Nonlinear Schrödinger equation (NSE), the Darboux transformation method is used, which plays an important role in the IPM.

Results. The paper developed a method for expanding the MFP in scalar and matrix form, which allows to obtain new integrable models of theoretical and mathematical physics along with their solutions. For the equations that are integrable with the help of the IPM, a new efficient way of constructing exact solutions equivalent to the new type of many functional substitutions is constructed using the example of the KdV and NSE equations.

Conclusions. The developed approach provides a new way of constructing integrable models of theoretical and mathematical physics, along with their exact solutions.

Keywords: functional substitution method, inverse problem method, multisoliton solutions, Darboux transformations, Korteweg – de Vries equation and Nonlinear Schrödinger equation.

Введение

Среди методов построения и анализа точных решений нелинейных уравнений в частных производных, используемых в прикладных физических задачах, особую роль играет метод обратной задачи (МОЗ), имеющий несколько вариантов своего использования. Наиболее важными из них являются метод обратной задачи рассеяния [1, 2] и метод преобразований Дарбу [3–5]. Параллельно с МОЗ существует метод функциональных подстановок (МФП), который, вообще говоря, возник значительно раньше, чем МОЗ, но долгое время существовал в форме лишь нескольких несвязанных между собой результатов, наиболее важным из которых являлся результат Коула – Хопфа [6, 7], относящийся к уравнению Бюргерса [8]. В 80-х гг. прошлого века в результате развития МОЗ была обнаружена некоторая общность между уравнениями, линеаризуемыми с помощью подстановок типа Коула – Хопфа и МОЗ [9–20]. Уравнения, интегрируемые с помощью подстановок Коула – Хопфа, впоследствии были названы уравнениями типа Бюргерса и составили достаточно широкий класс интегрируемых уравнений. В работах [21, 22] был предложен метод, позволяющий строить уравнения типа Бюргерса и их решения с помощью обобщенных подстановок типа Коула – Хопфа. Этот метод может быть применен к целому ряду прикладных задач, в частности, к задачам гидродинамики сжимаемой жидкости и некоторым другим задачам [22–24].

Метод строится на основе анализа условий совместности некоторой базовой системы линейных уравнений. В отличие от метода обратной задачи, предлагаемый метод опирается не на сами условия совместности, а на дифференциальные следствия исходной системы уравнений. Как показано в [21–23], эту совокупность базовых дифференциальных соотношений всегда можно дополнить еще одним уравнением, замыкающим систему нелинейных уравнений типа Бюргерса. Свойства построенных таким образом уравнений типа Бюргерса определяются типом вспомогательного уравнения.

В работе [25] был получен предварительный результат, состоящий в том, что между методами МФП и МОЗ существует связь, прослеженная в этих работах на примере нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для односолитонных его решений. Связь достигается рассмотрением дополнительного вспомогательного уравнения. Однако в случае многосолитонных решений связь явно не просматривается в силу того, что в стандартном МФП нет возможности строить решения, содержащие несколько линейно независимых функций, удовлетворяющих некоторым линейным уравнениям, что является одним из элементов МОЗ, например, в форме метода преобразований Дарбу. В настоящей работе развивается подход, основанный на расширении метода МФП, который связан с многофункциональными подстановками, воспроизводящими в расширенном виде особенности процедуры одевания операторов в рамках МОЗ, основанного на преобразованиях Дарбу [3, 4]. В работе сначала описывается общая взаимосвязь методов МФП и МОЗ в форме метода преобразований Дарбу с представлением диаграммы соответствия между уравнениями этих методов. Затем строится общая процедура построения многофункциональных подстановок и приводятся примеры ее использования для уравнений Кортевега – де Вриза (КдВ) и НУШ.

1. Матричные функциональные подстановки

Метод МФП [21, 22] в размерности 1+1 строится на основе двух исходных соотношений, называемых базовыми, для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(x,t)$ произвольной матричной размерности $n\times n$ с элементами, зависящими от двух независимых переменных x и t. Базовые соотношения могут иметь множество различных, но эквивалентных форм [21, 22]. Выбор той или иной формы определяется в первую очередь тем, что эти базовые соотношения позволяют однозначно связать вспомогательную функцию $\hat{T}(x,t)$ с набором функциональных параметров, которые и удовлетворяют искомым нелинейным интегрируемым уравнениям. Простейшей формой базовых соотношений являются соотношения первого порядка:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T}, \qquad \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \tag{1}$$

где $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ – комплексные матричные функции той же размерности $n\times n$, элементы которых будем называть коэффициентами базовых соотношений. Если функция $\hat{T}(x,t)$ задана, то функциональные параметры $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ однозначно выражаются через саму функцию $\hat{T}(x,t)$ и ее производные:

$$\hat{A} = \hat{T}_x\hat{T}^{-1}, \qquad \hat{B} = \hat{T}_t\hat{T}^{-1}, \tag{2}$$

что можно рассматривать как дифференциальные подстановки типа Коула – Хопфа. С другой стороны, требование, чтобы функция $\hat{T}(x,t)$ одновременно обращала в тождество два уравнения (1), накладывает на функции $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ ограничение, которое можно выразить в форме одного матричного уравнения:

$$\hat{A}_t - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0, \tag{3}$$

совпадающего по форме с уравнением Захарова – Шабата в теории МОЗ, но имеющего несколько иной смысл, поскольку не содержит в явном виде спектрального параметра.

При выполнении (3) все производные функции $\hat{T}(x,t)$ можно выразить через саму функцию $\hat{T}(x,t)$:

$$\hat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial t^k}\hat{T} = \hat{A}^{[n,k]}\hat{T},$$

где матричные функции $\hat{A}^{[n,k]}$ могут быть вычислены рекуррентно по формулам:

$$\hat{A}^{[n+1,k]} = \hat{A}_x^{[n,k]} + \hat{A}^{[n,k]}\hat{A},\ \ \hat{A}^{[n,k+1]} = \hat{A}_t^{[n,k]} + \hat{A}^{[n,k]}\hat{B},\ \ k = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

с начальными условиями:

$$\hat{A}^{[1,0]} = \hat{A},\ \ \hat{A}^{[0,1]} = \hat{B}.$$

К базовой системе (1) можно добавить произвольное интегрируемое уравнение для $\hat{T}(x,t)$. В качестве такого интегрируемого уравнения проще всего использовать линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\hat{C}_{n,k}$ конечного порядка L:

$$\sum_{k=0}^{L}\sum_{k+n=0}^{L} \hat{C}_{n,k}\hat{T}^{[n,k]} = 0. \tag{5}$$

Эти уравнения, называемые в дальнейшем **вспомогательными**, в итоге, после исключения из соотношений (2) и (4) всех производных функции $\hat{T}$ и самой функции, превращаются в нелинейные уравнения относительно элементов матричных функций $\hat{A}, \hat{B}$:

$$\sum_{k=0}^{L}\sum_{k+n=1}^{L} \hat{C}_{n,k}\hat{A}^{[n,k]} + \hat{C}_{00} = 0. \tag{6}$$

Вспомогательное уравнение в форме (6) вместе с уравнением (3) и системой равенств (4) образует замкнутую систему относительно элементов двух функций $\hat{A}, \hat{B}$.

Такой подход, представляющий собой МФП, в дальнейшем будем называть методом функциональных подстановок первого порядка. Примеры нелинейных уравнений, которые получаются с помощью соответствующих подстановок в методе МФП, приведены в [22]. Результаты применения различных вариантов такого подхода можно найти в работах [21, 23–25].

2. Подстановки второго порядка

Основной принцип видоизменений схемы МФП, предлагаемый в данной работе, продемонстрируем вначале на примере простой их формы, связанной с введением трех вспомогательных матричных функций размерности $n \times n$, вместо одной в стандартной схеме МФП, кратко изложенной выше.

В качестве базовых соотношений рассмотрим систему соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{xx} &= \hat{a}_0(x,t)\hat{T} + \hat{a}_1(x,t)\hat{T}_x + \hat{a}_2(x,t)\hat{T}_t, \\ \hat{T}_{tx} &= \hat{b}_0(x,t)\hat{T} + \hat{b}_1(x,t)\hat{T}_x + \hat{b}_2(x,t)\hat{T}_t, \\ \hat{T}_{tt} &= \hat{c}_0(x,t)\hat{T} + \hat{c}_1(x,t)\hat{T}_x + \hat{c}_2(x,t)\hat{T}_t. \end{aligned} \tag{7}$$

По порядку производных в левой части данную систему будем называть базовой системой второго порядка. В таком подходе число коэффициентов базовых соотношений равно девяти. Для задания всех коэффициентов этой системы теперь требуется задать три линейно независимые матричные функции $\hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2$. В результате систему базовых соотношений можно записать в форме матричного равенства:

$$\hat{\mathbf{F}}_3 = \hat{\mathbf{R}}_3 \hat{\mathbf{\Psi}}_3, \tag{8}$$

где введены обозначения:

$$\hat{\mathbf{\Psi}}_3 = \begin{pmatrix} \hat{T}_1 & \hat{T}_2 & \hat{T}_3 \\ \hat{T}_{1,x} & \hat{T}_{2,x} & \hat{T}_{3,x} \\ \hat{T}_{1,t} & \hat{T}_{2,t} & \hat{T}_{3,t} \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{R}}_3 = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \\ \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \\ \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{F}}_3 = \begin{pmatrix} \hat{T}_{1,xx} & \hat{T}_{2,xx} & \hat{T}_{3,xx} \\ \hat{T}_{1,xt} & \hat{T}_{2,xt} & \hat{T}_{3,xt} \\ \hat{T}_{1,tt} & \hat{T}_{2,tt} & \hat{T}_{3,tt} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Если матрица $\hat{\mathbf{\Psi}}_3$ не вырождена, то элементы матрицы $\hat{\mathbf{R}}_3$ вычисляются однозначно из матричного соотношения:

$$\hat{\mathbf{R}}_3 = \hat{\mathbf{F}}_3 \hat{\mathbf{\Psi}}_3^{-1}.$$

Систему базовых уравнений (7) можно представить в виде пары матричных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \\ \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = \hat{A}_3 \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \\ \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{pmatrix} = \hat{B}_3 \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{0}$ – матрица со всеми нулевыми элементами, а $\hat{1}$ – единичная матрица размерности $n\times n$. Система (10) получена из (7) с помощью дополнения ее двумя формальными тождествами:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{T}_i=\hat{T}_{i,x},\quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_i=\hat{T}_{i,t},$$

которые содержатся в первых строках матриц $\hat{A}_3$ и $\hat{B}_3$ общей размерности $3n\times 3n$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{\Psi}}_3=\hat{\mathbf{A}}_3\hat{\mathbf{\Psi}}_3,\quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{\Psi}}_3=\hat{\mathbf{B}}_3\hat{\mathbf{\Psi}}_3. \tag{11}$$

По построению эта система совместна. Поэтому, если функциональные параметры базовой системы вычисляются из (1) при заданных функциях $\hat{T}_0,\hat{T}_1,\hat{T}_2$ (при условии $\det\hat{\mathbf{\Psi}}_3\neq 0$), то для матриц $\hat{\mathbf{A}}_3$ и $\hat{\mathbf{B}}_3$ выполняется матричное тождество:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_3-\frac{\partial}{\partial x}\hat{B}_3+[\hat{A}_3,\hat{B}_3]\right)\hat{\mathbf{\Psi}}_3=0. \tag{12}$$

Эта система уравнений приводится к шести матричным уравнениям:

$$\hat{a}_{0,t}-\hat{b}_{0,x}+(\hat{a}_1-\hat{b}_2)\hat{b}_0+\hat{a}_2\hat{c}_0-\hat{b}_1\hat{a}_0=0,$$

$$\hat{a}_{1,t}-\hat{b}_{1,x}+\hat{a}_2\hat{c}_1-\hat{b}_2\hat{b}_1+[\hat{a}_1,\hat{b}_1]-\hat{b}_0=0,$$

$$\hat{a}_{2,t}-\hat{b}_{2,x}-\hat{b}_1\hat{a}_2+\hat{a}_2\hat{c}_2+(\hat{a}_1-\hat{b}_2)\hat{b}_2+\hat{a}_0=0,$$

$$\hat{b}_{0,t}-\hat{c}_{0,x}+\hat{b}_1\hat{b}_0-\hat{c}_1\hat{a}_0+\hat{b}_2\hat{c}_0-\hat{c}_2\hat{b}_0=0,$$

$$\hat{b}_{1,t}-\hat{c}_{1,x}+(\hat{b}_1-\hat{c}_2)\hat{b}_1-\hat{c}_1\hat{a}_1+\hat{b}_2\hat{c}_1-\hat{c}_0=0,$$

$$\hat{b}_{2,t}-\hat{c}_{2,x}+\hat{b}_1\hat{b}_2-\hat{c}_1\hat{a}_2+[\hat{b}_2,\hat{c}_2]+\hat{b}_0=0. \tag{13}$$

Эта система содержит шесть матричных уравнений для девяти коэффициентов базовых соотношений и является незамкнутой. В соответствии с общей идеологией МФП, если $\hat{T}_i$ выбирать из множества решений уравнений определенного типа, то к системе уравнений (13) добавляются уравнения на коэффициенты базовых соотношений, которые замыкают эту систему.

3. Обобщенные уравнения Бюргерса

В качестве примера рассмотрим вспомогательное уравнение в форме уравнения теплопроводности, аналогичное тем уравнениям, которые используются для вывода уравнения Бюргерса в схеме МФП [22]:

$$\hat{T}_{i,xx}=\lambda\hat{T}_i+u_0\hat{T}_{i,x}+\varepsilon\hat{T}_{i,t},\quad i=1,2,3, \tag{14}$$

где u_0,ε,λ – некоторые вещественные постоянные.

Сравнивая эти соотношения с базовыми (7), находим: $a_0 = \lambda$, $a_1 = u_0 = \mathrm{const}$, $a_2 = \varepsilon = \mathrm{const}$. В результате имеем следующее утверждение.

Утверждение 1. Функции $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений:

$$\hat{b}_{0,t} - \hat{b}_{0,xx} - 2\hat{b}_{2,x}\hat{b}_0 - 2\lambda\hat{b}_{1,x} - u_0\hat{b}_{0,x} = 0,$$

$$\varepsilon\hat{b}_{1,t} - \hat{b}_{1,xx} - 2\hat{b}_{2,x}\hat{b}_1 - u_0\hat{b}_{1,x} - 2\hat{b}_{0,x} = 0,$$

$$\varepsilon\hat{b}_{2,t} - \hat{b}_{2,xx} - 2\hat{b}_{2,x}\hat{b}_2 - u_0\hat{b}_{2,x} - \hat{b}_{1,x} = 0, \qquad (15)$$

и системе соотношений для функций $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2$:

$$\hat{c}_0 = \varepsilon^{-1}\left[\hat{b}_{0,x} + \hat{b}_2\hat{b}_0 + \lambda\hat{b}_1 - u_0\hat{b}_2\hat{b}_1\right], \ \hat{c}_1 = \varepsilon^{-1}\left[\hat{b}_{1,x} + \hat{b}_2\hat{b}_1 + \hat{b}_0\right],$$

$$\hat{c}_2 = \varepsilon^{-1}\left[\hat{b}_{2,x} + \hat{b}_2^2 + \lambda\hat{I} + \lambda\hat{b}_1 - u_0\hat{b}_2\right]. \qquad (16)$$

Уравнения (15) представляют собой систему уравнений, обобщающую уравнение Бюргерса на матричный случай. В матричном виде эта система при ε, равном мнимой единице, может служить также моделью для волн в оптической среде определенного вида. Однако полученные уравнения имеют смысл и в случае скалярных базовых и вспомогательных функций.

Заменим все матрицы $\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i$ в соотношениях (15) и (16) на скалярные функции, что эквивалентно матрицам размерности 1×1. Тогда уравнения (15) примут вид

$$b_{0,t} - b_{0,xx} - 2b_{2,x}b_0 - 2\lambda b_{1,x} - u_0 b_{0,x} = 0,$$

$$\varepsilon b_{1,t} - b_{1,xx} - 2b_{2,x}b_1 - u_0 b_{1,x} - 2b_{0,x} = 0,$$

$$\varepsilon b_{2,t} - b_{2,xx} - 2b_{2,x}b_2 - u_0 b_{2,x} - b_{1,x} = 0. \qquad (17)$$

Эта система представляет связанную между собой систему уравнений Бюргерса, что может иметь приложение в задачах гидродинамики и плазмы.

4. Дополнительные вспомогательные соотношения и уравнение КдВ

Согласно общей идее, которая была первоначально продемонстрирована в [25] на примере НУШ, для того чтобы с помощью подстановок получить решения уравнений, интегрируемых с помощью МОЗ, в общую схему замыкания базовой системы необходимо включить дополнительные вспомогательные уравнения. Общая идея дополнительных соотношений состоит в том, что вспомогательные функции $\hat{T}_i$ могут выбираться из решений сразу нескольких совместных уравнений. В этом случае функциональный вид $\hat{T}_i$ может существенно ограничиваться, но при этом расширяется множество нелинейных уравнений, которые могут быть получены с помощью такого варианта МФП. Более того, дополнительные соотношения могут содержать индивидуальные параметры для каждой функции $\hat{T}_i$ в отдельности наподобие спектральных параметров в МОЗ. При этом эти индивидуальные параметры можно при определенных условиях исключить из уравнений, что, по сути, приводит к МОЗ. Пусть, например, в качестве дополнительных соотношений используются уравнения следующего вида:

$$\hat{L}\hat{T}_i = \hat{T}_i\hat{\lambda}_i,$$

где $\hat{\lambda}_i$ – некоторые постоянные матрицы, различные для различных значений индекса i, а $\hat{L}$ – некоторый линейный оператор с постоянными коэффициентами. Для матрицы $\hat{\mathbf{\Psi}}_3$ это означает выполнение следующего дополнительного матричного уравнения:

$$\hat{L}\hat{\mathbf{\Psi}}_3 = \hat{\mathbf{\Psi}}_3\hat{\mathbf{\Lambda}},$$

где $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ – блочно-диагональная матрица с блоками $\hat{\lambda}_i$. Дифференцируя это соотношения по *x* и по *t,* приходим к следующей системе уравнений:

$$\left[\hat{\mathbf{L}}_3, \hat{\mathbf{A}}_3\right] = 0, \quad \left[\hat{\mathbf{L}}_3, \hat{\mathbf{B}}_3\right] = 0,$$

не содержащей матрицы $\hat{\mathbf{\Lambda}}$. Эти уравнения и есть дополнительные соотношения на матрицы $\hat{\mathbf{A}}_3$ и $\hat{\mathbf{B}}_3$.

В качестве основного примера реализации такого подхода применим его для построения многосолитонных решений уравнений КдВ. Рассмотрим систему базовых соотношений (7) со скалярными функциями $\hat{T}_i(x,t), i = 1,2,3,$ которые удовлетворяют системе вспомогательных уравнений следующего вида:

$$T_{i,xxx} = T_{i,t}, \quad T_{i,xx} = \lambda_i T_i, \quad i = 1,2,3, \tag{18}$$

где $\lambda_i, i = 1,2,3$ – некоторые постоянные.

Каждая функция T_i теперь удовлетворяет паре уравнений и поэтому выбирается из более ограниченного класса решений, чем в рассмотренном выше случае с уравнением теплопроводности. Важным является то, что оба типа вспомогательных уравнений можно, исключив из них основные функции T_i, представить в виде дополнительных уравнений для коэффициентов a_i, b_i, c_i базовых соотношений. Эти дополнительные уравнения позволяют, не меняя вида решений, заданных базовыми соотношениями, существенно расширить множество уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты базовых соотношений. В результате: среди этого множества уравнений при правильном подборе дополнительной совокупности вспомогательных уравнений содержатся и уравнения, интегрируемые с помощью МОЗ. Продемонстрируем это на примере уравнения КдВ.

Соотношения (18) генерируют дополнительные к (12) соотношения для элементов матриц $\hat{A}_3$ и $\hat{B}_3$, определенных в (10). Дифференцируя (10) по x, находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\Psi}_3 = \left(\hat{A}_{3.x} + \hat{A}_3^2\right)\hat{\Psi}_3 = \hat{U}_3\hat{\Psi}_3 = \hat{\Psi}_3\hat{L}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\hat{\Psi}_3 = \left(\hat{A}_{3,xx} + 2\hat{A}_{3,x}\hat{A}_3 + \hat{A}_3\hat{A}_{3,x} + \hat{A}_3^3\right)\hat{\Psi}_3 = \hat{B}_3\hat{\Psi}_3, \quad (20)$$

где матрица $\hat{\Psi}_3$ определена в (9), а матрицы $\hat{U}_3$ и $\hat{L}_3$ такие:

$$\hat{U}_3 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ B_0 & B_1 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

здесь

$$B_0 = a_{0.t} + a_1 b_0 + a_2 c_0, \ B_1 = a_{1.t} + a_1 b_1 + a_0 + a_2 c_1, \ B_2 = a_{2.t} + a_1 b_2 + a_0 + a_2 c_2.$$

Подставляя это соотношение в (12), приходим к матричному уравнению:

$$\hat{A}_{3,t} = \hat{A}_{3,xxx} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\hat{A}_{3,x}\hat{A}_3 + \hat{A}_3\hat{A}_{3,x} + \hat{A}_3^3\right) +$$

$$+[\hat{A}_3, \hat{A}_{3,xx}] + 2[\hat{A}_3, \hat{A}_{3,x}]\hat{A}_3 + \hat{A}_3[\hat{A}_3, \hat{A}_{3,x}]. \quad (21)$$

Для того чтобы в покомпонентной записи этих уравнений содержалось уравнение КдВ, к нему необходимо добавить условия, вытекающие из (19). Для исключения из этих условий матрицы $\hat{L}_3$ их можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{U}_3 + [\hat{U}_3, \hat{A}_3] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_3 + [\hat{U}_3, \hat{B}_3] = 0. \quad (22)$$

Проблема состоит в том, что изначально неясно, какой именно коэффициент базовых соотношений (или их комбинация) удовлетворяет именно уравнению КдВ. Все остальные коэффициенты будут удовлетворять уравнениям других типов. Чтобы решить эту проблему, воспользуемся сравнением базовых уравнений с одевающими операторами метода преобразований Дарбу [3–5] для КдВ.

5. Метод сравнения с преобразованиями Дарбу для уравнения КдВ

Уравнение КдВ

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx} = 0 \quad (23)$$

имеет представление Лакса в форме условия коммутативности операторов:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x,t),$$

$$\hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2}u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}u_x(x,t).$$

Для построения точных решений этого уравнения можно применить метод преобразований Дарбу [3–5]. Преобразование Дарбу для уравнений КдВ строится как процедура «одевания голых» операторов:

$$\hat{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \hat{A}_0 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

Для одевания рассматривается линейный оператор $\hat{M}_N$ следующего вида:

$$\hat{M}_N = \frac{\partial^N}{\partial x^N} + \xi_N(x,t)\frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} + \cdots + \xi_0(x,t). \tag{24}$$

Для того чтобы операторы $\hat{A}_0, \hat{L}_0$, и $\hat{M}_N$ обладали N общими собственными функциями, необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы $\hat{D}_A$ и $\hat{D}_B$ такие, что:

$$\left[\hat{A}_0, \hat{M}_N\right] = \hat{D}_A \hat{M}_N, \quad \left[\hat{L}_0, \hat{M}_N\right] = \hat{D}_L \hat{M}_N. \tag{25}$$

Выполнения этих условий можно добиться явным заданием N функций $\psi_k, k = 1,\ldots,N,$ которые одновременно удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\hat{L}_0\psi_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_k = \lambda_k\psi_k, \quad \hat{A}_0\psi_k = \frac{\partial}{\partial t}\psi_k - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_k = 0, \quad k = 1,\ldots,N, \tag{26}$$

при условии, что все они являются собственными функциями оператора $\hat{M}_N$, отвечающими его нулевому собственному значению:

$$\hat{M}_N\psi_k = \left[\frac{\partial^N}{\partial x^N} + \xi_N(x,t)\frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}} + \cdots + \xi_0(x,t)\right]\psi_k = 0, k = 1,\ldots,N. \tag{27}$$

Последние N уравнений можно рассматривать как неоднородную линейную алгебраическую систему N уравнений относительно N коэффициентов $\xi_k, k = 0,\ldots,N-1,$ которая имеет единственное решение при условии линейной независимости функций ψ_k. Согласно указанной теореме операторы $\hat{D}_A$ и $\hat{D}_L$ существуют, а их явный вид можно определить, непосредственно вычисляя коммутаторы в правых частях операторных уравнений (23). В частности, имеем

$$\hat{D}_L = u(x,t), \quad \hat{D}_A = -\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{4}u_x,$$

где $u(x,t)$ имеет вид

$$u(x,t) = 2\xi_{N-1,x}. \tag{28}$$

В результате можно показать, что операторы

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_0 - \hat{D}_A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3}{4}u_x, \tag{29}$$

$$\hat{L}_1 = \hat{L} - \hat{D}_L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u(x,t) \tag{30}$$

коммутируют между собой, т.е. обладают полным набором общих собственных функций $\varphi(x,t,\lambda)$, имеющих вид

$$\varphi(x,t,\lambda) = \hat{M}_N \psi(x,t,\lambda),$$

где $\psi(x,t,\lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$\hat{A}_0 \psi(x,t,\lambda) = 0, \quad \hat{L}_0 \psi(x,t,\lambda) = \lambda\psi(x,t,\lambda)$$

для любого комплексного значения спектрального параметра λ.

Вычисляя коммутатор операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{L}_1$, находим:

$$[\hat{A}_1, \hat{L}_1] = -\left(u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx} \right) = 0,$$

т.е. функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдВ (23) .

Сравнивая соотношения (26) с (18), видим их полную идентичность при условии, что $N = 3$ и равенствах $\psi_k = T_k, k = 1,2,3.$ При этом базовые соотношения (7) необходимо сравнить с уравнениями (27) на собственные функции одевающего оператора Дарбу, с помощью которых вычисляются коэффициенты соответственно базовых соотношений и коэффициенты ξ_k, $k = 0,\ldots,2$, одевающего оператора $\hat{M}_3$. Первое уравнение из (7), заменяя в нем производные $T_{k,t}$ на производные $T_{k,xx}$, можно записать в следующем виде:

$$T_{k,xxx} - \frac{1}{a_2}T_{k,xx} + \frac{a_1}{a_2}T_{k,x} + \frac{a_0}{a_2}\hat{T}_k = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{31}$$

что в точности совпадает с (27) при выполнении условий:

$$\xi_2 = -\frac{1}{a_2}, \quad \xi_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad \xi_0 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Поэтому функция

$$u(x,t) = 2\xi_{2,x} = 2\frac{a_{2,x}}{a_2^2} \tag{32}$$

удовлетворяет уравнению КдВ в соответствии с методом преобразований Дарбу, изложенным выше. Следовательно решения, которые получаются с помощью подстановок второго порядка для уравнения КдВ, представляют собой 3-солитонные (квазисолитонные) решения этого уравнения.

Оставшиеся два уравнения системы базовых соотношений (7) после замены $T_{k,t}$ на производные $T_{k,xx}$ выглядят так:

$$T_{k,xxx} - b_2 T_{k,xx} - b_1 T_{k,x} - b_0 T_k = 0, \tag{33}$$

$$T_{k,xxxxx} - c_2 T_{k,xx} - c_1 T_{k,x} - c_0 T_k = 0, \quad k = 1,2,3.$$

Формально операторы порядка 4 и 6, соответствующие этим уравнениям, также можно рассматривать как одевающие для уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты этих операторов. Число ненулевых коэффициентов этих операторов равно трем. Так как функции T_k являются их собственными функциями, отвечающими нулевому собственному значению, то они полностью определяют их коэффициенты $b_i(x,t)$ и $c_i(x,t)$.

6. Подстановки произвольного порядка

Представленная схема МФП может быть обобщена. Рассмотрим систему дифференциальных соотношений с производными суммарного порядка N следующего вида:

$$\hat{T}^{[n,N-n]} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{A}_{k,m}^{n,N-n} \hat{T}^{[k,m]}, \quad n = 0,1,\ldots,N. \tag{34}$$

Здесь и далее введены обозначения:

$$\hat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial t^k} \hat{T}, \quad n,k = 0,1,\ldots$$

Эта система, которую в дальнейшем будем называть **базовой порядка N**, очевидно, обобщает схему подстановок второго порядка на случай подстановок произвольного конечного порядка N. Как и в случае подстановок второго порядка (7), эта система является недоопределенной по отношению к коэффициентам $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}$ базовых соотношений – число коэффициентов превышает число соотношений. Действительно, (34) содержит ровно $N+1$ дифференциальных соотношений с $K = (N+1)^2 N/2$ функциональными матричными коэффициентами $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}$, которые связывают производные порядка N со всеми $K = (N+1)^2 N/2$ производными более низкого порядка. Для использования (34) в качестве схемы МФП необходимо формально замкнуть эту систему относительно $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}$. Эта процедура осуществляется с помощью требования, чтобы все дифференциальные соотношения обращались в тождество при подстановке в каждое из них $M = (N+1)N/2$ линейно независимых функций $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \ldots, \hat{T}_M$. В результате каждое из $N+1$ соотношений с номером $n = 0,\ldots,N$ для набора функций $\mathbf{T_M} = \{\hat{T}_1, \hat{T}_2, \ldots, \hat{T}_M\}$ будет образовывать систему линейных алгебраических уравнений относительно соответствующих функций $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}(x,t)$, число которых равно $M = (N+1)N/2$, с отличным от нуля определителем (в силу линейной независимости набора $\mathbf{T_M}$). Из этой системы можно однозначно вычислить коэффициенты $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}(x,t)$. Такая процедура подобна вычислению коэффициентов одевающего оператора в методе преобразований Дарбу с помощью соотношений (27).

По аналогии с МФП второго порядка систему (34), записанную для набора функций $\mathbf{T_M}$, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{\Psi}}_M = \hat{\mathbf{A}}_M \hat{\mathbf{\Psi}}_M, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{\Psi}}_M = \hat{\mathbf{B}}_M \hat{\mathbf{\Psi}}_M, \tag{35}$$

здесь:

$$\hat{\mathbf{\Psi}}_M = \begin{pmatrix} \hat{T}_1^{[0,0]} & \hat{T}_2^{[0,0]} & \dots & \hat{T}_M^{[0,0]} \\ \hat{T}_1^{[1,0]} & \hat{T}_2^{[1,0]} & \dots & \hat{T}_M^{[1,0]} \\ \hat{T}_1^{[0,1]} & \hat{T}_2^{[0,1]} & \dots & \hat{T}_M^{[0,1]} \\ \hat{T}_1^{[2,0]} & \hat{T}_2^{[2,0]} & \dots & \hat{T}_M^{[2,0]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{T}_1^{[1,N-2]} & \hat{T}_2^{[1,N-2]} & \dots & \hat{T}_M^{[1,N-2]} \\ \hat{T}_1^{[0,N-1]} & \hat{T}_2^{[0,N-1]} & \dots & \hat{T}_M^{[0,N-1]} \end{pmatrix}, \tag{36}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \cdots & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & \cdots & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \cdots & \hat{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \cdots & \hat{0} \\ \hat{A}_{00}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{10}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{01}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{20}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{11}^{(N-1,0)} & \dots & \hat{A}_{0N-1}^{(N-1,0)} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{A}_{00}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{10}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{01}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{20}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{11}^{(1,N-2)} & \dots & \hat{A}_{0N-1}^{(1,N-2)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{B}}_M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \cdots & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} & \cdots & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \cdots & \hat{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \cdots & \hat{1} \\ \hat{A}_{00}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{10}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{01}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{20}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{11}^{(N-2,1)} & \dots & \hat{A}_{0N-1}^{(N-2,1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{A}_{00}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{10}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{01}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{20}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{11}^{(0,N-1)} & \dots & \hat{A}_{0N-1}^{(0,N-1)} \end{pmatrix}.$$

Первые $(N-1)N/2$ строк матриц $\hat{\boldsymbol{A}}_M$ и $\hat{\boldsymbol{B}}_M$ соответствуют простейшим тождествам

$$\hat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{T}^{[n-1,k]}, \quad \hat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}^{[n,k-1]} \tag{37}$$

для всех чисел n,k, удовлетворяющих неравенствам: $0<n<N, 0<k<N$, и в каждой строке имеют все нулевые элементы, кроме одного, соответствующего (37). Последние N строк этих матриц соответствуют соотношениям (34). Поскольку система совместна по построению, то функциональные параметры $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}(x,t)$ общим числом $K=(N+1)M$ удовлетворяют системе нелинейных уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_M - \frac{\partial}{\partial x}\hat{B}_M + [\hat{A}_M, \hat{B}_M]\right)\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M = 0. \tag{38}$$

В случае невырожденности матрицы $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M$: $\det(\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M) \neq 0$ число уравнений этой системы, выполняющихся тождественно, равно $(N^2-1)N^2/4$ и определяется числом первых строк матриц $\hat{\mathbf{A}}_M$ и $\hat{\mathbf{B}}_M$, которые соответствуют тривиальным тождествам (37). Соответственно число нетривиальных уравнений равно $N \cdot M = (N+1)N^2/2$, что меньше числа $K=(N+1)M = =(N+1)^2 N/2$ функциональных параметров. Это означает, что для замыкания системы к ней можно добавить еще $M=(N+1)N/2$ соотношений, которые можно представить в виде некоторых соотношений, определяющих вид вспомогательных функций $\hat{T}_k, k=1,\ldots,M$. В качестве таких вспомогательных соотношений, как и в случае МФП первого порядка, следует выбирать интегрируемые уравнения для $\hat{T}_k, k=1,\ldots,M$, которые определяют их вид полностью. Проще всего использовать некоторые линейные уравнения с постоянными коэффициентами конечного порядка типа (18). Эти дополнительные замыкающие соотношения превращаются в замкнутую систему нелинейных уравнений относительно коэффициентов $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}(x,t)$ базовых соотношений. В результате получаем метод многофункциональных подстановок для нелинейных уравнений порядка N.

Как уже отмечалось выше (для случая подстановок второго порядка), представленная общая схема по форме совпадает с матричным вариантом МФП первого порядка с тем отличием, что матрицы $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M$ строятся из производных вспомогательных функций $\hat{T}_k$, $k=1,\ldots,M$, по формуле (36). Это означает, что решения для коэффициентов $\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}(x,t)$ при условии невырожденности матрицы $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M$ вычисляются из соотношений:

$$\hat{\mathbf{A}}_M = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{M,x}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M^{-1}, \hat{\mathbf{B}}_M = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{M,t}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M^{-1}, \tag{39}$$

которые, собственно говоря, и представляют собой функциональные подстановки.

При реализации этой процедуры для подстановок больших порядков могут возникать определенные трудности, связанные с возможной вырожденностью матрицы $\hat{\mathbf{\Psi}}_M$. Это связано с тем, что, если в качестве замыкающих условий для каждой из функций $\hat{T}_i$ используются одинаковые линейные уравнения (18) порядка меньшего, чем порядок подстановок, то матрица $\hat{\mathbf{\Psi}}_M$ оказывается вырожденной даже в случае линейной независимости самих функций $\hat{T}_k$. Действительно, если уравнения, определяющие вид каждой функции $\hat{T}_k$, представляют собой линейную комбинацию производных этих функций с одними и теми же коэффициентами, подобную (18), то строки матрицы $\hat{\mathbf{\Psi}}_M$ оказываются линейно зависимыми, что прямо следует из вида строк этой матрицы. Это приводит к необходимости некоторой редукции системы уравнений (38), которую приходится учитывать для достаточно больших порядков функциональных подстановок. Такую процедуру редукции удобно продемонстрировать на примере уравнения КдВ.

7. Подстановки третьего порядка для уравнения КдВ

В качестве примера рассмотрим построение многосолитонных решений уравнения КдВ. Начнем с порядка $N=3$, что будет соответствовать 6-солитонным решениям этого уравнения. Эти решения строятся на основе базовых соотношений следующего вида:

$$T_{xxx} = a_{00}^{30}T + a_{10}^{30}T_x + a_{01}^{30}T_t + a_{20}^{30}T_{xx} + a_{11}^{30}T_{xt} + a_{02}^{30}T_{tt},$$

$$T_{xxt} = a_{00}^{21}T + a_{10}^{21}T_x + a_{01}^{21}T_t + a_{20}^{21}T_{xx} + a_{11}^{21}T_{xt} + a_{02}^{21}T_{tt},$$

$$T_{xtt} = a_{00}^{12}T + a_{10}^{12}T_x + a_{01}^{12}T_t + a_{20}^{12}T_{xx} + a_{11}^{12}T_{xt} + a_{02}^{12}T_{tt},$$

$$T_{ttt} = a_{00}^{03}T + a_{10}^{03}T_x + a_{01}^{03}T_t + a_{20}^{03}T_{xx} + a_{11}^{03}T_{xt} + a_{02}^{03}T_{tt}. \qquad (40)$$

Дополнительные соотношения для КдВ остаются такими же, как и в (18):

$$T_{i,xxx} = T_{i,t}, \quad T_{i,xx} = \lambda_i T_i, \quad i = 1,\dots,6,$$

но число их становится равным $M=6$. Поскольку в правой части соотношений (40) нет производных третьего порядка, то при использовании дополнительных соотношений (18), матрица $\hat{\mathbf{\Psi}}_M$ не будет вырождена. При использовании первых шести соотношений из (38), соответствующих третьим производным T_i, находим:

$$a_{00}^{30} = a_{10}^{30} = a_{20}^{30} = a_{11}^{30} = a_{02}^{30} = 0, \; a_{01}^{30} = 1. \qquad (41)$$

Из второй части, соответствующей вторым производным T_i, получаем матричное уравнение:

$$\hat{U}_6 \hat{\Psi}_6 = \hat{\Psi}_6 \hat{\Lambda},$$

где $\hat{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$, а матрица $\hat{U}_6$ вычисляется из соотношения

$$\hat{U}_6 = \hat{A}_{6,x} + \hat{A}_6^2, \tag{42}$$

аналогичного (17), где $\hat{A}_6$ определено общими соотношениями (36) при $M = 6$.

Как и в случае второго порядка подстановок, для того чтобы среди всех функциональных параметров выделить тот, который отвечает решению уравнения КдВ, необходимо среди всех соотношений (40) найти такое, которое после исключения из него производных по времени превратилось бы в одевающий оператор метода преобразований Дарбу. Этому условию отвечает только одно соотношение из всех базовых соотношений (40), соответствующее производной T_{xxt}. При замене производной по t на третью производную по x вторая производная по t заменяется по правилу: $T_i^{[0,2]} = T_i^{[6,0]}$. В результате это соотношение можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial^6}{\partial x^6} - \frac{1}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{a_{11}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{a_{01}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{20}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a_{10}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_{00}^{21}}{a_{02}^{21}}\right] T_i = 0, \; i = 1, \ldots, 6, \tag{43}$$

что представляет собой одевающий оператор метода Дарбу шестого порядка. Чтобы продемонстрировать проблему, приведем и базовые соотношения, соответствующие остальным строкам базовых соотношений:

$$\left[a_{02}^{30}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + a_{11}^{30}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + (a_{01}^{30} - 1)\frac{\partial^3}{\partial x^3} + a_{20}^{30}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{10}^{30}\frac{\partial}{\partial x} + a_{00}^{30}\right] T_i = 0, \; i = 1, \ldots, 6,$$

$$\left[\frac{\partial^7}{\partial x^7} - a_{02}^{12}\frac{\partial^6}{\partial x^6} - a_{11}^{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - a_{01}^{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - a_{20}^{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{10}^{12}\frac{\partial}{\partial x} - a_{00}^{12}\right] T_i = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^9}{\partial x^9} - a_{02}^{03}\frac{\partial^6}{\partial x^6} - a_{11}^{03}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - a_{01}^{03}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - a_{20}^{03}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{10}^{03}\frac{\partial}{\partial x} - a_{00}^{03}\right] T_i = 0, \tag{44}$$

Первое из этих соотношений в соответствии с (41) тождественно обращается в ноль. Поэтому значимыми остаются только два последних соотношения, которые имеют структуру системы линейных уравнений с шестью неизвестными в форме коэффициентов базовых соотношений, для определения которых необходимо шесть основных функций T_i, как и для коэффициентов (43).

Как видно, в этих уравнениях отсутствует производная пятого порядка, а в последнем еще две производных. Это отличает данные соотношения от уравнений на собственные функции одевающего оператора Дарбу, в котором присутствуют производные всех порядков в диапазоне от 0 до 6. Отсюда следует, что коэффициенты этих уравнений удовлетворяют уравнениям, отличным от КдВ, вид которых можно установить с помощью (38) либо с помощью вычисления коэффициентов операторов, соответствующих этим соотношениям в методе преобразований Дарбу [3, 4, 26].

Сравнивая соотношения (43) с соответствующими соотношениями (27) для $\hat{M}_6$, находим связь $\xi_5 = -(a_{02}^{21})^{-1}$, что приводит к решению

$$u(x,t) = 2\xi_{5,x} = 2\frac{a_{02,x}^{21}}{\left(a_{02}^{21}\right)^2}.$$

Таким образом, 6-солитонные решения уравнения КдВ могут быть получены с помощью подстановок третьего порядка. Соотношения же (44) и другие аналогичные соотношения с производными более высокого порядка в правой части будут соответствовать уравнениям для других коэффициентов базовых соотношений.

8. Многосолитонные решения и редукция базовых соотношений

Рассмотрим, как строятся решения уравнения КдВ в случае подстановок большего порядка. Как и в разд. 6 и 7, для определения коэффициента базовой схемы, который удовлетворяет уравнению КдВ, воспользуемся тем же методом сравнения строк базовых соотношений с одевающим оператором преобразования Дарбу в МОЗ. Для этого необходимо проанализировать все строки базовых соотношений после замены всех производных по переменной t на производные третьего порядка по x в соответствии с формой первого вспомогательного уравнения системы (18).

Рассмотрим систему базовых соотношений (34), учитывая уравнения (18). Учет (18) позволяет явно указать значения части коэффициентов базовых соотношений. Это связано с тем, что общий вид коэффициентов базовых соотношений будет определяться именно уравнениями (18) по общему правилу:

$$\hat{T}_i^{[\alpha,\beta]} = \hat{T}^{[\alpha-3k,\beta+k]}, \quad i = 1,\ldots,M, \tag{45}$$

где k – неполное частное от деления числа α на 3. Действительно, при условии $\alpha - 3k \ge 0$ суммарный порядок производных слева всегда больше, чем справа: $\alpha+\beta > \alpha+\beta-2k$. Поэтому все базовые соотношения с производными $\hat{T}_i^{[\alpha,\beta]}$ слева с $\alpha = N-n \ge 3$ будут единственным образом выражаться через одну производную меньшего порядка $\hat{T}_i^{[\alpha-3k,\beta+k]}$. В результате в каждой такой строке коэффициенты базовых соотношений будут обращаться в ноль, за исключением одного: $a_{N-n-3k,n+k}^{N-n,n}$, где k – неполное частное от деления числа $N-n$ на 3. Например, поскольку $T_{xxxx} = T_{xt}$ и $T_{xxxt} = T_{tt}$, то при $N=4$ коэффициенты строк с номерами $n=0$ и $n=1$ будут нулевыми, кроме двух коэффициентов:

$$n=0: a_{11}^{40} = 1; \quad n=1: a_{02}^{31} = 1.$$

Опираясь на данное наблюдение, можно отыскать номер строки базовых соотношений, который будет соответствовать структуре одевающего оператора Дарбу при любом N.

Для этого систему базовых соотношений после замены всех производных по t на производные третьего порядка по x в соответствии с (18) запишем в такой форме:

$$T_i^{[n,N-n]} = T_i^{[N+2n,0]} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} a_{k,m}^{n,N-n}\hat{T}^{[k,m]}, \quad n = 0,1,\ldots,N;\ i = 1,\ldots,P. \quad (46)$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Число значимых базовых соотношений (46) для уравнения КдВ, не обратившихся в тождество в результате редукции, равно $p = 3$, а их номера n определяются условиями: $N-2 \le n \le N$. Номер строки n системы (44), в которой содержится одевающий оператор Дарбу, равен $n = N-2$. При этом порядок одевающего оператора равен $P = 3(N-1)$.

Доказательство. Первая часть утверждения фактически доказана выше, поскольку для любого конечного порядка N подстановок в соответствии с (18), редукции подвергаются все строки с номерами $N - n \ge 3$. Следовательно, не редуцируются только строки с номерами $n \ge N-2$, что и доказывает первую часть утверждения.

Для доказательства второй части утверждения среди всех $N+1$ соотношений (46) необходимо найти такое, которое будет содержать все порядки производных по x от 0 до некоторого максимального значения P после замены производных по t на производные по x. Производные в правой части базовых соотношений полезно разбить на группы с фиксированным суммарным порядком $J = \alpha + \beta$ производных $T_i^{[\alpha,\beta]}$ по x и t. Группа с $J = 0$ содержит единственное слагаемое с $T_i^{[0,0]}$, а группа с $J = 2$ содержит слагаемые с производными T_{xx}, T_{xt}, T_{tt} и т.д. Тогда при заданном порядке подстановок N максимальный номер группы справа равен $J = N-1$, которая будет содержать ровно N слагаемых. В целом же в левой части каждой строки базовых соотношений имеются все производные $T_i^{[\alpha,\beta]}$, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha + \beta = J, \quad \alpha,\beta = 0,\ldots,J; \quad J = 0,\ldots,N-1.$$

После замены производных по t на третьи производные по x в соответствии с (18), в правой части (34) каждая производная $T_i^{[\alpha,\beta]}$ в группе с номером J превращается в производную по x порядка:

$$P_{\alpha|J} = \alpha + 3\beta = 3J - 2\alpha, \alpha = 0,\ldots,J, \quad (47)$$

где α – порядок производной по x в группе с номером J. Поскольку само J пробегает все значения от 0 до $N-1$, то порядки $P_{\alpha|J}$ всех групп в совокупности перекрывают весь числовой диапазон порядков производных в диапазоне от 0 до $3N-3$ за исключением одного числа. Это пропущенное число появляется в группе производных суммарного порядка $J=N-1$ и равно: $Q_{N-1}=3(N-1)-1$. В группах с номерами $J<N-1$ также есть пропущенные порядки, но они воспроизводятся в группах с большим значением J. Только в группе с максимальным порядком $J=N-1$ пропущенное число не воспроизводится. Чтобы это увидеть, значения всех порядков $P_{\alpha|J}$ удобнее представить в виде диаграммы:

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & \alpha & & & & & \\ J & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & Q_j \\ 1 & 3 & 1 & & & & & & & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & & & & & & 5 \\ 3 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & & 8 \\ 4 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & & & 11 \\ 5 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 14 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}. \qquad (48)$$

В каждой строке с номером J диаграммы содержатся все порядки производных по x в группе с номером J после замены производных по t на производные третьего порядка по x. Согласно доказанной выше первой части утверждения для анализа порядков достаточно рассмотреть только последние три строки диаграммы. В левой части в каждой строке с номерами $n=N-2,\,N-1,\,N$ находятся соответственно производные $T_i^{[2,N-2]}$, $T_i^{[1,N-1]}$, $T_i^{[0,N]}$. После замены эти производные превращаются в производные порядка $Q_n=N-n+3n=N+2n$:

$$Q_n=[3N-4,3N-2,3N].$$

Одевающий оператор Дарбу будет соответствовать строке с номером n в (46), для которого недостающий порядок $Q_{N-1}=3N-4$ справа будет равен порядку производной по x Q_n слева. Приравнивая Q_n порядку Q_{N-1} при заданном N, находим:

$$n=N-2,$$

что соответствует строке с производной $T_i^{[2,N-2]}$ слева.

Поскольку суммарный порядок производной в строке с номером $n=N-2$ слева, равный $3N-4$, меньше, чем максимальный порядок $Q_{N-1}=3(N-1)>3N-4$ производной справа, то максимальный порядок базового соотношения, сопоставляемого одевающему оператору Дарбу, будет равен $P=3(N-1)$. Заметим, что порядок производной справа в строках с номерами $N-1$ и N будет больше, чем P: $3(N-1)<3N-2$ и $3(N-1)<3N$. Поэтому число свободных параметров в этих строках также равно $P=3(N-1)$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Число функций T_i, необходимых для определения всех неопределенных коэффициентов системы базовых соотношений, после редукции равно $P = 3(N-1)$. Число неопределенных коэффициентов базовых соотношений после редукции равно $M_r = 9(N-1)$.

До редукции общее число функций, необходимых для вычисления базовых соотношений, равнялось числу $M = N(N+1)/2$. Следовательно, число совпавших производных слева равно $Q = M - P = (N-2)(N-3)/2$. Видно, что уменьшение числа необходимых для определения всех неопределенных коэффициентов базовых соотношений начинается с порядка подстановок $N = 4$. Неопределенные коэффициенты базовых соотношений после редукции содержатся в последних трех строках. В каждой строке имеется $P = 3(N-1)$ неопределенных коэффициентов. Отсюда общее число неопределенных коэффициентов равно $M_r = 9(N-1)$.

Следствие 2. Решение уравнения КдВ для подстановок порядка N можно записать в виде

$$u(x,t) = 2\xi_{P-1,x} = 2\frac{a_{0N-1,x}^{2N-2}}{\left(a_{0N-1}^{2N-2}\right)^2}. \tag{49}$$

При этом число солитонов, соответствующих этому решению, определяется порядком оператора, т.е. равно $P = 3(N-1)$.

Доказательство. Сопоставимое оператору одевания Дарбу дифференциальное соотношение в (46) можно представить в такой форме:

$$T_i^{[P,0]} - \frac{1}{a_{0,N-1}^{2,N-2}} T_i^{[P-1,0]} + \sum_{k=0}^{M-2} \frac{A_{N-1-k,k}^{2,N-2}}{a_{0,N-1}^{2,N-2}} T_i^{[k,0]} = 0. \tag{50}$$

Здесь $A_{N-1-k,k}^{2,N-2}$ – коэффициенты, вычисленные с учетом совпадающих производных в (46). Сопоставляя (50) с оператором в методе преобразований Дарбу, находим

$$\xi_{P-1} = -\left(a_{0N-1}^{2,N-2}\right)^{-1},$$

где $P = 3(N-1)$.

Порядок одевающего оператора Дарбу соответствует числу солитонов в решении. В соответствии с (28) решение уравнения КдВ для подстановок порядка N можно записать в виде (49). Следствие доказано.

Заметим, для того чтобы функция (49) действительно удовлетворяла уравнению КдВ, достаточно, чтобы функции T_i дополнительно удовлетворяли и второй части соотношений (18) со вторыми производными по x. Для того чтобы получить систему уравнений, которым удовлетворяют остальные нетривиальные коэффициенты базовых соотношений, можно воспользоваться методом преобразований Дарбу для каждой из трех нетривиальных строк базовых соотношений, как это описано в [26].

9. Подстановки для НУШ

В качестве иллюстрации работы данного метода для матричных уравнений продемонстрируем его на примере решений НУШ:

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0. \tag{51}$$

Это уравнение имеет представление в виде условия коммутативности двух матричных операторов:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} - i\lambda\hat{\sigma} - \hat{U}, \quad \hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} - i(2\lambda^2 + |u|^2)\hat{\sigma} - 2\lambda\hat{U} + i\hat{U}_1,$$

где

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{U} \ = \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ -u_x^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Неодетые операторы имеют вид

$$\hat{L}_0 = \frac{\partial}{\partial x} - i\lambda\hat{\sigma}, \quad \hat{A}_0 = \frac{\partial}{\partial t} - i2\lambda^2\hat{\sigma}.$$

Следуя этим соотношениям, рассмотрим вариант метода с базовыми соотношениями (7) с матричными функциями $\hat{T}_k$, $k = 1, \ldots, M$, размерности 2×2.. В качестве дополнительных замыкающих уравнений рассмотрим для M матриц $\hat{T}_k$, $k = 1, \ldots, M$, уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{T}_k = i\hat{\sigma}\hat{T}_k\hat{\Lambda}_k, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_k = 2i\hat{\sigma}\hat{T}_k\hat{\Lambda}_k^2, \ k = 1, \ldots, M, \tag{52}$$

где i – мнимая единица,

$$\hat{\Lambda}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \mu_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, M,$$

λ_k, μ_k – некоторый набор комплексных чисел.

Уравнения (52) эквивалентны следующим дополнительным соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{\Psi}}_M = \hat{J}\hat{\mathbf{\Psi}}_M\hat{L}, \ \frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{\Psi}}_M = \hat{J}\hat{\mathbf{\Psi}}_M\hat{L}^2, \tag{53}$$

где блочные матрицы $\hat{\mathbf{\Psi}}_M$, $\hat{J}$ и $\hat{L}$ общей размерности $2M \times 2M$. Матрица имеет вид (36), а матрицы $\hat{J}$ и $\hat{L}$ являются блочно-диагональными:

$$\hat{J} = \mathrm{diag}(i\hat{\sigma}, \ldots, i\hat{\sigma}), \ \hat{L} = \mathrm{diag}(\hat{\Lambda}_1, \ldots, \hat{\Lambda}_M), \quad \hat{J}^2 = -1.$$

Из соотношений (53) следуют, в частности, уравнения:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\mathbf{\Psi}}_M = \hat{J}\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathbf{\Psi}}_M, \ \frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{\mathbf{\Psi}}_M = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{\mathbf{\Psi}}_M. \tag{54}$$

Из последнего уравнения следует, что матрица $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M$ будет вырожденной, начиная с порядка подстановок $N = 5$. Начиная с этого порядка необходимо проводить редукцию матриц базовых соотношений.

Для того чтобы получить уравнения на функциональные коэффициенты базовых уравнений (1)–(4), не зависящие от спектрального параметра $\hat{\Lambda}$, необходимо исключить из всех соотношений (53) $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_M$ и $\hat{L}$. Дифференцируя (53) по x и по t и используя базовые соотношения, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{A}}_M + \hat{\boldsymbol{A}}_M^2 = -\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{A}}_M\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{A}}_M, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{A}}_M + \hat{\boldsymbol{A}}_M\hat{\boldsymbol{B}}_M = -\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{B}}_M\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{A}}_M,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{B}}_M + \hat{\boldsymbol{B}}_M\hat{\boldsymbol{A}}_M = -\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{A}}_M\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{B}}_M, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{B}}_M + \hat{\boldsymbol{B}}_M^2 = -\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{B}}_M\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{B}}_M. \quad (55)$$

Кроме этого, выполняются следующие соотношения:

$$\left[\hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{A}}_M, \hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{B}}_M\right] = 0, \ \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{A}}_M + \hat{\boldsymbol{A}}_M^2 = \hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{B}}_M.$$

Из последнего соотношения и (12) находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\boldsymbol{A}}_M + \hat{\boldsymbol{J}}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\boldsymbol{A}}_M + \hat{\boldsymbol{J}}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{A}}_M^2 - \left[\hat{\boldsymbol{A}}_M, \hat{\boldsymbol{J}}\hat{\boldsymbol{A}}_{M,x}\right] - \left[\hat{\boldsymbol{A}}_M, \hat{\boldsymbol{J}}\right]\hat{\boldsymbol{A}}_M^2 = 0. \quad (56)$$

Полученное уравнение представляет собой матричное уравнение типа НУШ. В такой форме уравнение НУШ для подстановок порядка 1 рассматривалось в работе [25].

Как и в случае уравнения КдВ, получить выражения для решений НУШ можно, сравнивая модифицированные базовые соотношения с одевающими операторами Дарбу. Воспользуемся для вычисления порядков производных в правой части базовых соотношений после их модификации диаграммами, аналогичными диаграмме (48). Производная $\hat{T}_i^{[\alpha,\beta]}$ порядка $J = \alpha + \beta$ в результате замены производной по t на вторую производную по x преобразуется в производную только по x порядка $P_{j|\alpha} = \alpha + 2(J - \alpha) = 2J - \alpha$. Соответствующая диаграмма порядков производных в правой части базовых соотношений имеет такой вид:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & \alpha & & & & & & \\
J & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & Q_J \\
1 & 2 & 1 & & & & & & & & & - \\
2 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & & & & - \\
3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & & - \\
4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & - \\
5 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}. \quad (57)$$

В этой диаграмме нет пропущенных порядков. Поэтому максимальный порядок производной после замены следует искать в левой части базовых соотношений. Этот порядок должен быть на 1 больше, чем максимальный порядок справа в диаграмме (57). Этот порядок и будет порядком оператора одевания в методе Дарбу. Высота и структура диаграммы (57) та же, что и для (48): $J_{\max} = N-1$. Максимальный порядок производной для последней строки диаграммы равен $P = 2N-2$. Порядок слева производной $\hat{T}_i^{[\alpha,\beta]}$, $\alpha+\beta = N$, равен соответственно $P_1 = 2N-\mu$. Эта величина должна быть на единицу больше, чем порядок P. В результате находим

$$P+1 = 2(N-1)+1 = 2N-\mu,$$

отсюда

$$\mu = 1, \quad \nu = N-1.$$

Следовательно, базовое соотношение, соответствующее производной $\hat{T}_i^{[1,N-1]}$ слева, совпадает со структурой одевающего оператора метода Дарбу для НУШ:

$$\frac{\partial^{2N-1}}{\partial x^{2N-1}}\hat{T} - \hat{J}^{(1-N)}\sum_{j=0}^{2N}\Xi_j^{1,N-1}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\hat{T} = 0_i,$$

здесь коэффициенты $\Xi_j^{1,N-1}$ – модифицированные в результате редукции коэффициенты базовых соотношений в строке с номером N. Коэффициент $\Xi_{2N}^{1,N-1}$ и определяет решение НУШ в соответствии с методом преобразований Дарбу [3–5, 26].

Для примера рассмотрим базовые соотношения для порядка $N = 3$. В этом случае базовые соотношения после замены производных преобразуются к следующему виду:

$$\hat{A}_{02}^{30}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i + \left[(\hat{1} - \hat{A}_{11}^{30}\hat{J})\frac{\partial^3}{\partial x^3} - (\hat{A}_{20}^{30} + \hat{A}_{01}^{30}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hat{A}_{10}^{30}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}_{00}^{30}\right]\hat{T}_i = 0,$$

$$\left(\hat{J} + \hat{A}_{02}^{21}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i - \left[\hat{A}_{11}^{21}\hat{J}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\hat{A}_{20}^{21} + \hat{A}_{01}^{21}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{A}_{10}^{21}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_{00}^{21}\right]\hat{T}_i = 0,$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5}\hat{T}_i + \left[-\hat{A}_{11}^{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i + \hat{A}_{11}^{12}\hat{J}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\hat{A}_{20}^{12} + \hat{A}_{01}^{12}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{A}_{10}^{12}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_{00}^{12}\right]\hat{T}_i = 0,$$

$$\frac{\partial^6}{\partial x^6}\hat{T}_i - \hat{J}\left[-\hat{A}_{11}^{03}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i + \hat{A}_{11}^{03}\hat{J}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\hat{A}_{20}^{03} + \hat{A}_{01}^{03}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{A}_{10}^{03}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_{00}^{03}\right]\hat{T}_i = 0.$$

Базовое соотношение в строке с номером 3 соответствует одевающему оператору Дарбу максимального порядка. Этот оператор содержит пять коэффициентов, которые следует вычислять с помощью пяти заданных функций $\hat{T}_i$, вместо шести до редукции. При этом один из коэффициентов $\hat{A}_{20}^{12}$ или $\hat{A}_{01}^{12}$ остается неопределенным. Однако решение исходного уравнения НУШ определяется коэффициентом $\hat{A}_{11}^{12}$, что, собственно, решает проблему неполной определенности коэффициентов базовых соотношений, возникшую вследствие ее редукции. Аналогичная ситуация возникает при анализе последнего уравнения порядка 6, имеющего также 5 коэффициентов, хотя это уравнение не является полным уравнением для коэффициентов оператора Дарбу. Коэффициенты этих уравнений, вообще говоря, не будут удовлетворять в точности уравнению НУШ. Вид уравнений для этих коэффициентов требует отдельного анализа, который пока не проведен в полном объеме.

Остальные два уравнения имеют порядок 4 с числом коэффициентов 4. Аналогичная ситуация имела место и для уравнения КдВ в соотношениях (48). Эти соотношения фактически эквивалентны второму соотношению в (54). Это означает, что коэффициенты этих уравнений должны обращаться в ноль, т.е. должны выполняться соотношения:

$$\hat{A}_{02}^{30} = \hat{A}_{10}^{30} = \hat{A}_{00}^{30} = 0, \quad \hat{A}_{11}^{30} = -\hat{J}, \quad \hat{A}_{20}^{30} = -\hat{A}_{01}^{30}\hat{J};$$

$$\hat{A}_{11}^{21} = \hat{A}_{10}^{21} = \hat{A}_{10}^{21} = 0, \quad \hat{A}_{02}^{21} = -\hat{J}, \quad \hat{A}_{20}^{21} = -\hat{A}_{01}^{21}\hat{J}.$$

Эти соотношения выполняются независимо от выбора матриц $\hat{T}_i$, при этом матрицы $\hat{\mathbf{A}}_M$ и $\hat{\mathbf{B}}_M$ будут невырожденными.

Из приведенных примеров видно, что развитый вариант МФП расширяет область применения МФП. Однако наиболее важным результатом является то, что этот метод пригоден и для построения многосолитонных решений, интегрируемых с помощью МОЗ. Это делает многофункциональный метод функциональных подстановок универсальным методом построения решений интегрируемых уравнений, включая и уравнения типа Бюргерса, и уравнения, интегрируемые с помощью МОЗ.

Заключение

В работе развит многофункциональный вариант МФП, который позволяет строить новые типы интегрируемых уравнений и их решений. Как было показано, метод многофункциональных подстановок фактически включает в себя и МОЗ в форме метода преобразований Дарбу [3–5, 26]. Хотя в работе было рассмотрено применение данного метода к построению многосолитонных решений только уравнения КдВ, тем не менее, исходя из приведенных построений, можно утверждать, что данный метод может быть распространен практически на любое другое, интегрируемое с помощью МОЗ, уравнение или систему уравнений. Такой вывод можно сделать, основываясь на результатах работы [25], посвященной построению решений уравнения НУШ с помощью матричного метода функциональных подстановок.

Библиографический список

1. **Захаров, В. Е.** Теория солитонов: метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – Москва : Наука, 1980. – 319 с.

2. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио. – Москва : Мир, 1988. – 694 с.
3. **Matveev, V. B.** Some comments on the rational solutions of the Zakharov-Schabat equations / V. B. Matveev // Lett. Math. Phys. – 1979. – Vol. 3, iss. 6. – P. 216, 222, 425, 503.
4. **Matveev, V. B.** Darboux Transformations and Solitons / V. B. Matveev, M. A. Salle. – Berlin : Springer-Verlag, 1991. – 120 p.
5. Физика на пороге новых открытий / под. ред. Л. Н. Лабзовского. – Ленинград : Изд-во ЛГУ, 1990. – С. 246–278.
6. **Hopf, E.** The partial differential equation *ut* + *uux* = μ*uxxut* + *uux*=*μuxx* / E. Hopf // Comm. Pure and Appl. Math. – 1950. – Vol. 3. – P. 201–230.
7. **Cole, J. D.** On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics / J. D. Cole // Quart. Appl. Math. – 1951. – Vol. 9, № 3. – P. 225–236.
8. **Burgers, J. M.** The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems / J. M. Burgers. – Reidel ; Dordrecht ; Holland, 1974. – 174 p.
9. **Свинолупов, С. И.** Об аналогах уравнения Бюргерса произвольного порядка / С. И. Свинолупов // Теоретическая и математическая физика. – 1985. – Т. 65, № 2. – С. 303–307.
10. **Ибрагимов, Н. Х.** Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. – Москва : Наука, 1983. – 280 с.
11. **Михайлов, А. В.** Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем / А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов // Успехи математических наук. – 1987. – Т. 42, № 4 (256). – С. 3–53.
12. **Соколов, В. В.** О симметриях эволюционных уравнений / В. В. Соколов // Успехи математических наук. – 1988. – Т. 43, № 5(263). – С. 133–163.
13. **Свинолупов, С. И.** Факторизация эволюционных уравнений / С. И. Свинолупов, В. В. Соколов // Успехи математических наук. – 1992. – Т. 47, № 3 (285). – С. 115–146.
14. **Адлер, В. Э.** Симметрийный подход к проблеме интегрируемости / В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов // Теоретическая и математическая физика. – 2000. – Т. 125, № 3. – С. 355–424.
15. **Старцев, С. Я.** О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки / С. Я. Старцев // Теоретическая и математическая физика. – 2001. – Vol. 127, № 1. – С. 63–74.
16. **Calogero, F.** “Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?”, What is Integrability? / Calogero F. ; ed. V. E. Zhakharov. – Berlin : Springer, 1991. – P. 1–62. – (Springer Ser. Nonlinear Dynam).
17. **Zenchuk, A. I.** On the remarkable relations among PDEs integrable by the inverse spectral transform method, by the method of characteristics and by the Hopf–Cole transformation / A. I. Zenchuk, P. M. Santini. – arXiv:0801.3945
18. **Santini, P. M.** Integrable nonlinear evolution equations with constraints: I / P. M. Santini // Inverse Problems. – 1992. – Vol. 8, № 2. – P. 285–301.
19. **Свинолупов, С. И.** Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений / С. И. Свинолупов В. В. Соколов // Теоретическая и математическая физика. – 1994. – Т. 100, № 2. – С. 214–218.
20. **Старцев, С. Я.** О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры / С. Я. Старцев // Теоретическая и математическая физика. – 1998. – Vol. 116, № 3. – С. 336–348.
21. **Журавлев, В. М.** Нелинейные уравнения, связанные с уравнениями теплопроводности и д'Аламбера с помощью подстановок типа Коула – Хопфа / В. М. Журавлев, А. В. Никитин // Нелинейный мир. – 2007. – Т. 5, № 9. – С. 603–611.

22. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 58–71
23. **Журавлев, В. М.** Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау – Лифшица / В. М. Журавлев // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10, № 1. – С. 35–48.
24. **Журавлев, В. М.** Об интегрируемом нелинейном уравнении Дирака в размерности 1+3 / В. М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2018. – № 3. – С. 19–30.
25. **Журавлев, В. М.** Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и функциональные подстановки / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1. – С. 147–163.
26. **Журавлев, В. М.** Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией / В. М. Журавлев. – Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2002. – 200 с.

References

1. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevskiy L. P. *Teoriya solitonov: metod obratnoy zadachi* [Soliton theory: inverse problem method]. Moscow: Nauka, 1980, 319 p. [In Russian]
2. Dodd R., Eylbek Dzh., Gibbon Dzh., Morrio Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, 694 p. [In Russian]
3. Matveev V. B. *Lett. Math. Phys*. 1979, vol. 3, iss. 6, pp. 216, 222, 425, 503.
4. Matveev V. B., Salle M. A. *Darboux Transformations and Solitons*. Berlin: Springer-Verlag, 1991, 120 p.
5. *Fizika na poroge novykh otkrytiy* [Physics on the threshold of new discoveries]. Ed. by L. N. Labzovskiy. Leningrad: Izd-vo LGU, 1990, pp. 246–278. [In Russian]
6. Hopf E. *Comm. Pure and Appl. Math*. 1950, vol. 3, pp. 201–230.
7. Cole J. D. *Quart. Appl. Math*. 1951, vol. 9, no. 3, pp. 225–236.
8. Burgers J. M. *The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems*. Reidel; Dordrecht; Holland, 1974, 174 p.
9. Svinolupov S. I. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1985, vol. 65, no. 2, pp. 303–307. [In Russian]
10. Ibragimov N. Kh. *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike* [Transformation groups in mathematical physics]. Moscow: Nauka, 1983, 280 p. [In Russian]
11. Mikhaylov A. V., Shabat A. B., Yamilov R. I. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1987, vol. 42, no. 4 (256), pp. 3–53. [In Russian]
12. Sokolov V. V. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1988, vol. 43, no. 5 (263), pp. 133–163. [In Russian]
13. Svinolupov S. I., Sokolov V. V. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences]. 1992, vol. 47, no. 3 (285), pp. 115–146. [In Russian]
14. Adler V. E., Shabat A. B., Yamilov R. I. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2000, vol. 125, no. 3, pp. 355–424. [In Russian]
15. Startsev S. Ya. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2001, vol. 127, no. 1, pp. 63–74. [In Russian]
16. Calogero F. *"Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?", What is Integrability?*. Berlin: Springer, 1991, pp. 1–62. (Springer Ser. Nonlinear Dynam).

17. Zenchuk A. I., Santini P. M. *On the remarkable relations among PDEs integrable by the inverse spectral transform method, by the method of characteristics and by the Hopf–Cole transformation*. arXiv:0801.3945
18. Santini P. M. *Inverse Problems*. 1992, vol. 8, no. 2, pp. 285–301.
19. Svinolupov S. I., Sokolov V. V. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1994, vol. 100, no. 2, pp. 214–218. [In Russian]
20. Startsev S. Ya. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 1998, vol. 116, no. 3, pp. 336–348. [In Russian]
21. Zhuravlev V. M., Nikitin A. V. *Nelineynyy mir* [Nonlinear world]. 2007, vol. 5, no. 9, pp. 603–611. [In Russian]
22. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 159, no. 1, pp. 58–71. [In Russian]
23. Zhuravlev V. M. *Nelineynaya dinamika* [Nonlinear dynamics]. 2014, vol. 10. no. 1, pp. 35–48. [In Russian]
24. Zhuravlev V. M. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya* [Space, time and fundamental interactions]. 2018, no. 3, pp. 19–30. [In Russian]
25. Zhuravlev V. M. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2018, no. 1, pp. 147–163. [In Russian]
26. Zhuravlev V. M. *Nelineynye volny v mnogokomponentnykh sistemakh s dispersiey i diffuziey* [Nonlinear waves in multicomponent systems with dispersion and diffusion]. Ulyanovsk: Izd-vo UlGU, 2002, 200 p. [In Russian]

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42, L'va Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Образец цитирования:

Журавлев, В. М. Многофункциональные подстановки и солитонные решения интегрируемых нелинейных уравнений / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 3 (51). – С. 93–119. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-3-7.