

УДК 524.33-563, 52-33, 52-563, 53.01
doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-12

Динамическое равновесие и осцилляции звезд с неравномерной массивностью частиц среды

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический университет, Ульяновск, Россия
zhvictorm@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается модель строения и эволюции звезд, находящихся в динамическом равновесии, дополненная новым анализом скорости зонального потока, новыми элементами описания эволюции теплового потока и введением неравномерной массивности частиц. Основной целью работы является описание модифицированной модели строения звезд в условиях динамического равновесия и их осцилляций, в которой устраняется проблема с особенностью зонального потока на оси вращения. Модель также обобщается за счет внесения в нее коэффициента массивности частиц. *Материалы и методы.* Для вывода и анализа уравнений динамического равновесия звезд используется метод гидродинамических маркеров или лагранжевых переменных, дополненный новой трактовкой параметров поля тяготения с помощью маркерных полей. Для описания тепловых свойств среды используется предположение о квазиadiaбатичности процессов в звездах. *Результаты.* Получены обобщенные уравнения строения и эволюции звезд, находящихся в динамическом равновесии, как общего типа равновесия. Модель учитывает зональный поток, описывающий дифференциальное вращение звезд, раздельное влияние тепловых процессов на зональный поток и распределение температуры и плотности в звезде, а также неоднородное распределение массивности частиц, которое связано с неоднородным распределением ядер химических элементов внутри звезд. В рамках модели получены общие соотношения для распределения локальной угловой скорости зонального потока. Выявлены общие факторы, влияющие на поведение кривой блеска звезд в условиях динамического равновесия. Получены в аналитическом виде диаграммы период-светимость. Полученные соотношения позволяют уточнить модель 11-летних осцилляций Солнца. *Выводы.* Предложенная модель может быть использована в качестве базовой модели для описания пульсирующих звезд различных типов.

Ключевые слова: динамическое равновесие, строение звезд, нелинейные осцилляции звезд, дифференциальное вращение, кривые блеска, диаграммы период-светимость

Для цитирования: Журавлев В. М. Динамическое равновесие и осцилляции звезд с неравномерной массивностью частиц среды // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 158–188. doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-12

Dynamic equilibrium and oscillations of stars with uneven mass of particles of the medium

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia
zhvictorm@gmail.com

Abstract. *Background.* The study examines a model of the structure and evolution of stars in dynamic equilibrium, supplemented by a new analysis of the zonal flow velocity, new elements for describing the evolution of the heat flow, and the introduction of unequal particle mass. The purpose of the work is to describe a modified model of the structure of stars under conditions of dynamic equilibrium and their oscillations, in which the problem with the peculiarity of the zonal flow on the rotation axis is eliminated. The model is also generalized by introducing into it the coefficient of particle massiveness. *Materials and methods.* To derive and analyze the equations of dynamic equilibrium of stars, the method of hydrodynamic markers or Lagrangian variables is used, supplemented by a new interpretation of the gravitational field parameters using marker fields. To describe the thermal properties of the medium, the assumption of quasi-adiabatic processes in stars is used. *Results.* In this work, generalized equations for the structure and evolution of stars in dynamic equilibrium are obtained as a general type of equilibrium. The model considers the zonal flow, which describes the differential rotation of stars, the separate influence of thermal processes on the zonal flow and the distribution of temperature and density in the star, as well as the inhomogeneous distribution of particle mass, which is associated with the inhomogeneous distribution of the nuclei of chemical elements inside stars. Within the framework of the model, general relations are obtained for the distribution of the local angular velocity of the zonal flow. General factors influencing the behavior of the light curve of stars under dynamic equilibrium conditions have been identified. Period-luminosity diagrams were obtained in analytical form. The obtained relationships make it possible to refine the model of 11-year solar oscillations constructed in [1]. *Conclusions.* The proposed model can be used as a basic model for describing pulsating stars of various types.

Keywords: dynamic equilibrium, stellar structure, nonlinear oscillations of stars, differential rotation, light curves, period-luminosity diagrams

For citation: Zhuravlev V.M. Dynamic equilibrium and oscillations of stars with uneven mass of particles of the medium. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(4):158–188. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-12

Введение

В работе [1] была развита модель динамического равновесия астрофизических объектов с ее приложением к описанию нелинейных осцилляций звезд, в том числе к построению модели 11-летних осцилляций солнечной активности. С физической точки зрения динамическое равновесие является следствием баланса сил Архимеда и тяготения вместе с локальной силой реакции среды, необходимой для поддержания радиального потока Хаббла и зонального потока. При этом в таких моделях предполагается, что тепловые процессы в звезде отличаются от чисто адиабатических, что характерно для моделей типа Лейна – Эмдена [2, 3]. Вместе с тем за счет зависимости энтропии от температуры степенного типа уравнение состояния среды оказывается эквивалентным уравнению с эффективным показателем адиабаты $\gamma \approx 6/5$. Осцилляции звезд в таких моделях возникают как следствие наличия не только радиального гидродинамического потока, имеющего вид потока Хаббла, но и зонального потока, эквивалентного дифференциальному вращению звезды. Эта модель не использует идеи, высказанные в работах С. А. Жевакина [4–6] относительно физического механизма осцилляций цефеид, которые считаются классическими. Механизм С. А. Жевакина предназначался для объяснения того, как энергия, поступающая из области, где идут ядерные ре-

акции, передается колебательному движению верхних слоев звезды. Наличие такого механизма особенно необходимо для современных методов анализа осцилляций с помощью метода малых колебаний. Обычно анализ характеристик осцилляций звезд в современных моделях даже с использованием численных методов сводится к линеаризации уравнений динамики вблизи некоторой статической точки равновесия, т.е. к задаче о малых колебаниях. В таком подходе некоторые особенности кривых блеска объясняются сложным спектром малых колебаний. Однако сами по себе линеаризованные модели не дают ответа на главный вопрос о том, каким образом стабильный по своей природе поток излучения в звездах передает энергию в колебательные моды. Вместе с тем до настоящего времени нет простых способов внести в модели звезд механизм С. А. Жевакина. Несмотря на имеющийся прогресс в анализе спектров колебаний пульсирующих звезд [7–9] в рамках теории малых колебаний, в теории остается множество проблем таких, например, как проблема теоретического вывода диаграммы период–светимость. В отличие от этого, в работе [1] модель осцилляций объясняется наличием взаимосвязи радиальных нелинейных колебаний звезды с колебаниями зонального потока. Такая модель нелинейна по своей сути и описывает эволюцию, не прибегая к модели малых колебаний.

Развитая в [1] модель осцилляций является нелинейной моделью, в которой проблема передачи энергии не возникает. Модель динамического равновесия дает адекватное объяснение 11-летнему циклу солнечной активности. Используя параметры стандартной статической модели Солнца, авторы [1] вычислили период осцилляций Солнца, оказавшийся равным примерно 11 годам при минимуме температуры в фотосфере $T_{\phi} \approx 4500 \text{ K}$.

Основным недостатком модели являлось то, что на оси вращения звезды скорость зонального потока стремилась не к нулю, а к некоторому постоянному значению. Это означает, что локальная угловая скорость на оси вращения обращалась в бесконечность. Эта особенность в поведении зонального потока на оси вращения отражается и на поведении потенциала поля тяготения, и на поведении магнитного поля, модель которого для звезд, находящихся в динамическом равновесии, рассматривалась в работе [10].

Основной целью данной работы является описание модифицированной модели звездных осцилляций, в которой устраняется проблема с особенностью зонального потока на оси вращения. При этом определенным образом меняются условия разделения переменных в уравнениях модели, что приводит к некоторым изменениям в выражениях для осцилляций светимости звезд и диаграмме период–светимость.

Кроме этого, модель обобщается за счет внесения в нее коэффициента массивности частиц. В работе обсуждается необходимость введения такого дополнительного параметра в модель, что диктуется, кроме очевидной математической общности усложненной модели, наличием в газовой среде в звездах ионизированных атомов, имеющих ядра с различным массовым числом. В работе с общих позиций обсуждаются некоторые вопросы, связанные с важностью различий в массивности частиц, которые порождают эффект скрытой массы для звезд различных типов и галактик в целом.

1. Описание параметров среды и полей с помощью гидродинамических маркеров

Система уравнений, описывающая осцилляции звезд в режиме динамического равновесия, которая рассматривалась в работах [1, 10], имеет такой вид:

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} p_r - \phi_r, \\ w_t + uw_r + ww_z &= -\frac{1}{\rho} p_z - \phi_z, \end{aligned} \quad (1)$$

$$v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} = 0,$$

$$\rho_t + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\phi_r) + \frac{\partial}{\partial z}\phi_z = 4\pi G\rho, \quad (3)$$

$$p = p(\rho, s). \quad (4)$$

Здесь $u(r, z, t)$, $v(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ – компоненты вектора скорости $v = (u, v, w)$ в цилиндрической системе координат r, z, ϕ . При построении модели предполагается наличие цилиндрической симметрии, т.е. отсутствие зависимости параметров среды от азимутального угла ϕ . В этих уравнениях $p(r, z, t)$ – давление газа, $\rho(r, z, t)$ – плотность массы, $\phi(r, z, t)$ – потенциал поля тяготения; G – постоянная тяготения Ньютона; t – время.

Выражение (4) является уравнением состояния газа, где $s(r, z, t)$ – локальная энтропия газа. Наличие компоненты скорости $v(r, z, t)$ потока в зональном направлении эквивалентно дифференциальному вращению структуры вокруг вертикальной оси z .

Для анализа динамики самогравитирующего газа в модели динамического равновесия используется метод гидродинамических маркеров (или лагранжевых переменных). Подробное описание этого метода в приложении к задачам динамического равновесия можно найти в [1, 10, 11]. Поэтому здесь приведем лишь основные соотношения, важные для общего понимания производимых изменений в модели.

В теории гидродинамических маркеров газ представляется как множество материальных точек, наделенных некоторыми неизменными физическими свойствами. Эти свойства точек определяют значения маркерных полей, которые не меняются при произвольном перемещении точек газа. В случае цилиндрической симметрии для описания перемещения среды достаточно ввести два маркерных поля $e^a(r, z, t)$, $a = 1, 2$, которые по определению удовлетворяют уравнениям переноса:

$$\frac{de^a}{dt} = e_t^a + ue_r^a + we_z^a = 0, \quad a=1,2. \quad (5)$$

Если функции $e^a(r, z, t)$ удовлетворяют этим уравнениям, то их дифференциальным следствием является закон сохранения (см. [1]):

$$\frac{\partial}{\partial t}|J| + \frac{\partial}{\partial r}(u|J|) + \frac{\partial}{\partial z}(w|J|) = 0, \quad (6)$$

где функция $|J|$ – якобиан преобразования от координат z, r в координаты e^1, e^2 пространства значений маркеров.

Якобиан отображения $(r, z) \rightarrow (e^1, e^2)$ имеет вид

$$|J| = |\det \hat{J}|,$$

здесь

$$\hat{J} = \begin{vmatrix} e_r^1 & e_z^1 \\ e_r^2 & e_z^2 \end{vmatrix}.$$

Компоненты вектора $K = (K^1, K^2)$ рассчитываются исходя из того, что производные $\partial x^\alpha / \partial e^a$ являются элементами матрицы, обратной матрице Якоби \hat{J} . В результате находим:

$$|J| \frac{\partial r}{\partial e^1} = \frac{\partial e^2}{\partial z}, \quad |J| \frac{\partial r}{\partial e^2} = -\frac{\partial e^2}{\partial r}, \quad |J| \frac{\partial z}{\partial e^1} = -\frac{\partial e^1}{\partial z}, \quad |J| \frac{\partial z}{\partial e^2} = \frac{\partial e^1}{\partial r}.$$

Отсюда имеем

$$|J|K^1 = \frac{\partial e^2}{\partial z} e^1 - \frac{\partial e^1}{\partial z} e^2, \quad |J|K^2 = \frac{\partial e^1}{\partial r} e^2 - \frac{\partial e^2}{\partial r} e^1.$$

Более общим законом сохранения является закон следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(M|J|) + \frac{\partial}{\partial r}(uM|J|) + \frac{\partial}{\partial z}(wM|J|) = 0, \quad (7)$$

где $M = M(e)$ – произвольная дифференцируемая функция маркеров $e = (e^1, e^2)$. Отсюда следует, что функция

$$\rho = M_0 M |J| / r, \quad (8)$$

где M_0 – масштабный коэффициент, имеющий размерность массы, может быть отождествлена с плотностью массы вещества, поскольку она автоматически удовлетворяет закону сохранения массы (2).

Безразмерная функция M по своей сути представляет собой распределение относительной массивности частиц среды, соответствующих маркерам

e . Массивность частиц среды не меняется в процессе их перемещения. В дальнейшем будем называть эту функцию коэффициентом массивности частиц. Введение массивности частиц позволят включить в модель возможность описания изменения химического состава среды в звездах вдоль координат r, z . Это позволяет уточнить распределение плотности массы в звездах и улучшить описание строения звезд в рамках модели динамического равновесия.

В работах [1, 11, 12] было показано, что метод гидродинамических маркерных полей позволяет установить связь между напряженностью гравитационного поля и значениями маркерных полей. Эта связь строится на основе общей идеи, изложенной в [13–15] и опирается на простое формальное тождество для маркеров следующего вида:

$$\sum_{a=1}^2 \frac{\partial e^a}{\partial e^a} = \frac{\partial e^1}{\partial e^1} + \frac{\partial e^2}{\partial e^2} = 2, \quad a=1,2. \quad (9)$$

Переходя в этом тождестве к физическим координатам r, z , получаем следующую форму этого тождества:

$$\frac{\partial}{\partial r} (|J|K^1) + \frac{\partial}{\partial z} (|J|K^2) = 2|J|, \quad (10)$$

где

$$K^1 = \sum_{b=1}^2 e^b \frac{\partial r}{\partial e^b}, \quad K^2 = \sum_{b=1}^2 e^b \frac{\partial z}{\partial e^b}. \quad (11)$$

Соотношение (10) с учетом (8), как было показано в [1, 11, 12], может интерпретироваться как уравнение Пуассона. Однако, в отличие от указанных работ, при наличии множителя $M(e)$ – массивности частиц среды, в (8) соотношение (10) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} (M|J|K^1) + \frac{\partial}{\partial z} (M|J|K^2) = 2M|J| \left(1 + \frac{1}{2} e^1 \frac{\partial \ln M}{\partial e^1} + \frac{1}{2} e^2 \frac{\partial \ln M}{\partial e^2} \right). \quad (12)$$

Соотношение (12) с учетом (8) можно теперь переписать в таком виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r2\pi G\rho K^1) + \frac{\partial}{\partial z} (2\pi G\rho K^2) = 4\pi G\rho D, \quad (13)$$

где D имеет вид

$$D = \left(1 + \frac{1}{2} e^1 \frac{\partial \ln M}{\partial e^1} + \frac{1}{2} e^2 \frac{\partial \ln M}{\partial e^2} \right). \quad (14)$$

Сравнивая уравнение Пуассона (3) с (13), устанавливаем, что имеют место равенства

$$g_1 = -\phi_r = -2\pi G\rho K^1 - \frac{2\pi GM_0}{r} \Psi_z,$$

$$g_2 = -\phi_z = -2\pi G\rho K^2 + \frac{2\pi GM_0}{r} \Psi_r, \quad (15)$$

где g_a , $a=1,2$, – компоненты вектора ускорения свободного падения; $\Psi(r, z, t)$ – некоторая произвольная пока дифференцируемая функция. Эти соотношения обобщают аналогичные соотношения, которые использовались в [1]. Отличие состоит в том, что векторное поле $\mathbf{g}_\Psi = (g_\Psi^1, g_\Psi^2)$ с компонентами $g_\Psi^1 = -r^{-1}\Psi_z$ и $g_\Psi^2 = r^{-1}\Psi_r$ содержит вихревую составляющую. Но как будет показано ниже, само поле ускорения свободного падения в силу самих уравнений динамики будет потенциальным.

Отличием уравнения Пуассона от уравнения (13) является наличие множителя D в правой части уравнения. С точки зрения наблюдательной астрофизики и космологии наличие такого множителя можно интерпретировать как появление скрытой массы или «темной материи». Однако в данном случае множитель D приводит лишь к появлению эффективной гравитационной постоянной Ньютона $G_{eff} = D(e)G$, величина которой определяется характеристиками распределения коэффициента массивности M . Более глубокая интерпретация этого эффекта рассматривалась в [14, 15]. Роль появления множителя D в рамках классической теории тяготения рассмотрим далее.

Другая полезная форма уравнения Пуассона в случае общей функции $M(e)$ имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r 2\pi G\rho M^{-1} K^1) + \frac{\partial}{\partial z} (2\pi G\rho M^{-1} K^2) = 4\pi G\rho M^{-1}. \quad (16)$$

Если уравнение в форме (13) полезно в случае общего анализа эффекта скрытой массы, то уравнение (13) будет использовано далее при выводе обобщенного уравнения Лейна – Эмдена при наличии непостоянной функции массивности $M(e)$.

С помощью маркеров, как было показано в [1], можно получить и общее представление для компонентов гидродинамического потока. Для зональной составляющей гидродинамического потока v из третьего уравнения системы (1), если его записать в такой форме:

$$\frac{d}{dt}(rv) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (rv) = 0, \quad (17)$$

следует, что функция $L = rv(r, z, t)$ является произвольной дифференцируемой функцией маркеров.

В результате имеем:

$$v = L(e^1, e^2) / r. \quad (18)$$

Термодинамические параметры среды, в том числе и уравнение состояния, с помощью теории маркеров (подробнее см. [1]) описываются исходя из предположения, что перенос тепла в среде является квазиadiaбатическим. Это означает, что энтропия среды подчиняется уравнению

$$\frac{ds}{dt} \equiv s_t + us_r + ws_z = \dot{s}_0, \quad (19)$$

где функция $s_0(t)$ описывает общий неадиабатический нагрев или охлаждение среды. В этом случае для энтропии имеем соотношение

$$s = s = s_a(e^1, e^2) + s_0(t).$$

Уравнение состояния среды, как предполагается [1], совпадает с уравнением идеального газа, что в случае адиабатических процессов приводит к соотношению для давления p следующего вида:

$$p = K_0 \sigma(t) S(e) \rho^\gamma. \quad (20)$$

Здесь γ – показатель адиабаты; $\sigma(t) = e^{s_0(t)/c_v}$ и $S(e^1, e^2) = e^{s_a(e^1, e^2)/c_v}$ – коэффициент энтропии; c_v – молярная теплоемкость при постоянном объеме. Соответствующее соотношение для температуры будет иметь вид

$$T = K_0 \sigma(t) S(e) \rho^{\gamma-1} = \Pi(t) T(e), \quad (21)$$

где $P(t)$ будет определена далее;

$$T(e) = S(e) R^{\gamma-1}(e). \quad (22)$$

Функцию $T(e)$, по аналогии с [1], будем называть коэффициентом температуры. Далее будем пользоваться предположением, сделанным в работе [1] относительно функции $S(\xi, \zeta)$:

$$S = H_0 R^\delta, \quad (23)$$

где H_0 и δ – некоторые постоянные. Это предположение приводит к возможности получить распределение плотности, близкое к реальному для Солнца [1].

2. Параметры среды и уравнения в автомодельных переменных

Для компонентов u, w радиального потока, как и в [1], предполагается, что они имеют форму компонентов потока Хаббла:

$$u = H(t)r, \quad w = H(t)z, \quad (24)$$

где H и F – параметры Хаббла:

$$H = \dot{a} / a,$$

функция $a(t)$ называется масштабным фактором. Это название оправдывается тем, что в данной теории маркеры оказываются функциями автомодельных переменных $\xi = r/a(t)$ и $\alpha = z/a(t)$ [16–18]:

$$e^a = E^a(\xi, \zeta), \quad a = 1, 2.$$

Отсюда следует, что без ограничения общности все параметры среды и поля, являющиеся функциями маркеров, можно рассматривать как соответствующие функции автомодельных переменных.

Переходя к автомодельным переменным в выражениях для параметров среды и поля, получаем:

$$\rho = \frac{M_0}{a(t)^3} R(\xi, \zeta), \quad (25)$$

где

$$R = M(\xi, \zeta) \frac{|J(\xi, \zeta)|}{\xi}, \quad J = \det \begin{vmatrix} E_\xi^1 & E_\xi^1 \\ E_\xi^2 & E_\xi^2 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Эту функцию в дальнейшем будем называть коэффициентом плотности. Аналогично:

$$M = M(\xi, \zeta), \quad D = D(\xi, \zeta), \quad S = S(\xi, \zeta), \quad T = T(\xi, \zeta)$$

и т.д. При использовании этих соотношений и (25) получаем выражение для функции $\Pi(t)$ в следующем виде:

$$\Pi(t) = K_0 \sigma(t) M_0^{\gamma-1} a^{-3(\gamma-1)}. \quad (27)$$

3. Уравнения для гидродинамического потока и разделение переменных

Для описания автомодельной динамики звезд теперь достаточно проанализировать два уравнения системы (1) относительно компонентов радиального потока u и w . Поскольку сами компоненты скорости соответствуют потоку Хаббла и выражаются простым образом через автомодельные переменные, то уравнения для u и w являются уравнениями для вычисления зависимости маркеров $E^1(\xi, \zeta)$, $E^2(\xi, \zeta)$ от автомодельных переменных. Поскольку эти уравнения записаны в автомодельных переменных с коэффициентами, зависящими от времени, для построения решений этих уравнений необходимо в каждом из них разделить переменную t и пространственные переменные ξ , ζ . Чтобы проделать такую процедуру, используя (15) и следующие выражения:

$$u_t + uu_r + wu_z = a(\dot{H} + H^2)\xi, \quad w_t + uw_r + ww_z = a(\dot{H} + H^2)\zeta,$$

перепишем уравнения (1) в следующем виде:

$$a(\dot{H} + H^2)\xi - \frac{L^2(\xi, \zeta)}{a^3\xi^3} = -\frac{\Pi(t)}{a} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (SR^\gamma) - \frac{2\pi GM_0}{a^2} \left(K_1 + \frac{1}{\xi} \Psi_\zeta \right),$$

$$a(\dot{H} + H^2)\zeta = -\frac{\Pi(t)}{a} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} (SR^\gamma) - \frac{2\pi GM_0}{a^2} \left(K_2 - \frac{1}{\xi} \Psi_\xi \right). \quad (28)$$

Здесь введены обозначения:

$$K_1 = \frac{M|J|}{r} K^1 = \frac{M(\xi, \zeta)}{\xi} \left(\frac{\partial E^2}{\partial \zeta} E^1 - \frac{\partial E^1}{\partial \zeta} E^2 \right),$$

$$K_2 = \frac{M|J|}{r} K^2 = \frac{M(\xi, \zeta)}{\xi} \left(\frac{\partial E^1}{\partial \xi} E^2 - \frac{\partial E^2}{\partial \xi} E^1 \right).$$

Заметим, что K_1 и K_2 удовлетворяют тождеству:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi K_1) + \frac{\partial K_2}{\partial \zeta} = 2RD. \quad (29)$$

В уравнениях (28) имеются три неопределенные пока функции $M(D)$, L и Ψ . Поскольку рассматривается автомодельная задача, то вид этих функций должен соответствовать условиям разделения переменных. Для получения условий разделения переменных представим функции L и Ψ в общем виде:

$$L^2 = h(\xi, \zeta), \quad \Psi = \Psi_0(\xi, \zeta) + a^{-1}(t)N(\xi, \zeta), \quad (30)$$

где $h(\xi, \zeta)$, $\Psi_0(\xi, \zeta)$ и $N(\xi, \zeta)$ – некоторые вспомогательные функции, требующие уточнения.

Для функции $\Pi(t)$, которая содержит одну произвольную пока функцию $\sigma(t)$, более общим требованием, чем в [1], для возможности разделения переменных является формальное представление:

$$\sigma = \sigma_1(t) + \sigma_2(t) / a(t), \quad \Pi = \Pi_1(t) + \Pi_2(t),$$

$$\Pi_1 = K_0 \sigma_1(t) M_0^{\gamma-1} a^{-3(\gamma-1)}, \quad \Pi_2 = K_0 \sigma_2(t) M_0^{\gamma-1} a^{-3(\gamma-1)-1}, \quad (31)$$

где функции $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ определяются из условия разделения переменных. Потребуем теперь выполнения следующих условий для функций $\Pi_1(t)$ и $\Pi_2(t)$:

$$\frac{a\Pi_1(t)}{2\pi GM_0} = \frac{K_0 M_0^{\gamma-2}}{4\pi G} \sigma_1(t) a^{4-3\gamma} = Q_1 = \text{const};$$

$$\frac{a^2 \Pi_2(t)}{2\pi GM_0} = \frac{K_0 M_0^{\gamma-2}}{4\pi G} \sigma_2(t) a^{3-3\gamma} = Q_2 = \text{const}; \quad (32)$$

$$\Pi = \frac{2\pi GM_0}{a^2} (Q_1 + Q_2 a^{-1}) = \frac{2\pi G Q_1 M_0}{a^2} \left(1 + \frac{a_T}{a} \right).$$

Из последнего соотношения следует, что отношение $a_T = Q_2 / Q_1$ имеет размерность длины.

Сразу обратим внимание на то, что параметр Q_2 , в отличие от параметра Q_1 , может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Нет никаких физических причин, которые бы заранее фиксировали знак Q_2 . Соответственно, параметр a_T и связанные с ним далее безразмерные коэффициенты также могут быть разного знака. Это обусловлено тем, что часть потока тепла, параметризуемая с помощью Q_2 , связана с зональным потоком, изменчивость которого в пространстве строго не predetermined. Далее будет показано как влияет знак Q_2 на распределение зонального потока, а также на осцилляции светимости звезд. Этот факт может быть очень существенным в теории переменных звезд, в том числе и цефеид.

В результате подстановки соотношений (30) и (32) в (28) приходим к условиям разделения переменных:

– для пространственного распределения зонального потока:

$$\begin{aligned} \frac{h(\xi, \zeta)}{\xi^3} - 2\pi GM_0 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial N}{\partial \zeta} + \frac{Q_2}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (SR^\gamma) \right) &= \mu\xi, \\ 2\pi GM_0 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{Q_2}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} (SR^\gamma) \right) &= \mu\zeta, \end{aligned} \quad (33)$$

– для распределения плотности среды вместе с компонентами вектора K_1 и K_2 :

$$\begin{aligned} \Lambda\xi + \frac{Q_1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (SR^\gamma) + K_1 - \frac{1}{\xi} \Psi_{0,\zeta} &= 0, \\ \Lambda\zeta + \frac{Q_1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} (SR^\gamma) + K_2 + \frac{1}{\xi} \Psi_{0,\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Из этих соотношений следует, что в случае, если функция $S(\xi, \zeta)$ имеет вид (23), векторное поле напряженности гравитационного поля с компонентами g_1, g_2 оказывается потенциальным. Таким образом, вся схема перехода к уравнениям (33) и (34) не выводит за пределы классической теории тяготения. Однако в случае, если $S(\xi, \zeta)$ имеет более общий вид или в уравнениях динамики учитывается магнитное поле [10], то использованная схема вывода уравнений (33) и (34) может привести к ситуации, когда поле с компонентами g_1, g_2 окажется непотенциальным. Такая ситуация соответствует более общей теории пространства и материи, описанной в работах [13–15], что выходит за рамки данной работы.

Условием разделения переменных по времени будет уравнение

$$a^3 \left(\dot{H} + H^2 \right) - \frac{\mu}{a} = 2\pi GM_0 \Lambda, \quad (35)$$

в точности совпадающее с аналогичным уравнением из работы [1].

Важным является то обстоятельство, что уравнение автомодельной эволюции со временем остается неизменным по отношению к работе [1]. Это означает, что все основные выводы, сделанные в [1], остаются в силе и после уточнений модели в данной работе.

Комбинируя уравнения (34) и (33), а затем исключая из них для зонального потока перекрестным дифференцированием функцию N , получаем уравнение для функции h :

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{h(\xi, \zeta)}{\xi^2} - 2\pi GM_0 Q_2 \hat{L}[R] = 3\mu, \quad (36)$$

где введено следующее обозначение:

$$\hat{L}[R] = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} (SR^\gamma) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} (SR^\gamma) \right).$$

Аналогично, исключая из уравнений (34) функцию Ψ_0 , приходим к модифицированному уравнению Лейна – Эмдена для функции R :

$$\lambda + DR + \frac{Q_1}{2} \hat{L}[R] = 0. \quad (37)$$

Параметр $\lambda = 3\Lambda / 2$ называется [1] **параметром динамического равновесия**. Отличием этого уравнения от аналогичного уравнения в работе [1] является наличие множителя D . Как уже отмечалось, эта функция фактически произвольна и определяется начальным распределением массивности частиц в пространстве в момент перехода звезды в режим автомодельных осцилляций. Кроме этого, при медленном изменении химического состава звезды за счет ядерных реакций эта функция также должна медленно меняться.

4. Соотношения для зонального потока и дифференциальное вращение звезд

Простая связь между параметрами зонального потока и плотностью получается, если, комбинируя уравнения (36) и (37), исключить функцию $\hat{L}[R]$. В результате получаем уравнение для $h(\xi, \zeta)$:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h}{\xi^2} \right) = 3\mu - \alpha(\lambda + DR), \quad (38)$$

где для сокращения записи введено обозначение:

$$\alpha = 4\pi GM_0 Q_2 / Q_1 = 4\pi GM_0 a_T. \quad (39)$$

Как уже отмечалось, параметры Q_2 и a_T , а следовательно и α , могут иметь различные знаки.

Интегрируя уравнение (38), получаем следующее обобщенное выражение для $h(\xi, \zeta)$:

$$h = \left(\frac{3\mu}{2} - \lambda\alpha \right) \xi^4 - \alpha \xi^2 \int_0^\xi DR\xi d\xi + b_0(\zeta) \xi^2, \quad (40)$$

где $b_0(\zeta)$ – постоянная интегрирования по ξ , зависящая произвольным образом от ζ .

Последнее соотношение эквивалентно распределению зональной скорости следующего вида:

$$v = a^{-1} \frac{\sqrt{h}}{\xi} = a^{-1} V(\xi, \zeta), \quad (41)$$

где

$$V = \sqrt{\left(\frac{3\mu}{2} - \lambda\alpha \right) \xi^2 - \alpha \int_0^\xi DR\xi d\xi + b_0(\zeta)}. \quad (42)$$

Исходя из условий ограниченности R и D на оси вращения и полагая $\lim_{\xi \rightarrow 0} R = R_0(\zeta)$ и $\lim_{\xi \rightarrow 0} D = D_0(\zeta)$, где $R_0(\zeta)$ и $D_0(\zeta)$ – некоторые ограниченные функции переменной ζ , находим, что при $b_0(\zeta) \equiv 0$ локальная угловая скорость потока $\omega = va^{-1} / \xi$ на оси вращения будет иметь конечное значение:

$$\begin{aligned} \omega_0(\zeta) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \omega = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{a^2 \xi^2} = a^{-2} \lim_{\xi \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{3\mu}{2} - \lambda\alpha \right) - \alpha \xi^{-2} \int_0^\xi DR\xi d\xi} = \\ &= a^{-2}(t) \sqrt{\left(\frac{3\mu}{2} - \lambda\alpha \right) - \alpha D_0(\zeta) R_0(\zeta)}. \end{aligned}$$

Введение функции $R_0(\zeta)$ обусловлено тем, что граничное условие $R(0) = 1$ в чистом виде имеет место только в сферическом приближении [1]. В общем же случае плотность может меняться на оси вращения в зависимости от ζ , оставаясь ограниченной величиной.

Введем обозначение $\Omega(\xi, \zeta) = L / \xi^2 = V / \xi$ для коэффициента угловой скорости и получим

$$\omega(\xi, \zeta) = \frac{1}{a^2(t)} \Omega(\xi, \zeta).$$

Тогда уравнение (38) можно переписать следующим образом:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Omega^2 + 2\Omega^2 = (3\mu - \alpha\lambda) - \alpha DR.$$

Отсюда следует, что при $\xi \rightarrow 0$ и $\zeta = 0$ (т.е. в центре звезды):

$$\Omega_0 = \Omega(0, 0) = \sqrt{(3\mu / 2 - \alpha\lambda / 2) - \alpha D(0, 0) / 2}. \quad (43)$$

При $\xi \rightarrow \infty$ и $\zeta = 0$, учитывая, что в сферическом приближении $\lim_{\xi \rightarrow \infty} D(\xi)R(\xi) = |\lambda|$ (см. [1]), находим:

$$\Omega_{\infty} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Omega(\xi) = \sqrt{3\mu/2}.$$

Таким образом, локальная угловая скорость зонального потока оказывается конечной величиной и на оси вращения звезды, и на больших расстояниях от нее. Для иллюстрации поведения угловой скорости зонального потока вдоль радиуса (в радиальном приближении) на рис. 1,а приведен график изменения коэффициента температуры T , а на рис. 1,б график изменения коэффициента угловой скорости $\Omega = V/\xi = L/\xi^2$ в экваториальной плоскости для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ при значениях $\alpha = \pm 0,5$, $3\mu/2 = 1$ и нескольких значениях параметра динамического равновесия λ . Значение $\lambda_{cr} = -0,0851$ является критическим [1].

Из анализа графиков на рис. 1 следует, что при $\alpha > 0$ локальная угловая скорость на оси вращения достигает минимума, а для $\alpha < 0$ – максимума. Так, для наилучшей модели Солнца, рассмотренной в [1], величина $\Omega(\chi)$ претерпевает некоторые изменения только вблизи оси вращения и практически остается неизменной по радиусу в экваториальной плоскости в дальнейшем, поэтому соответствующий график приводить здесь не имеет смысла.

Заметим, что из соотношения (43) следует неравенство

$$3\mu - \lambda\alpha \geq \alpha D(0,0).$$

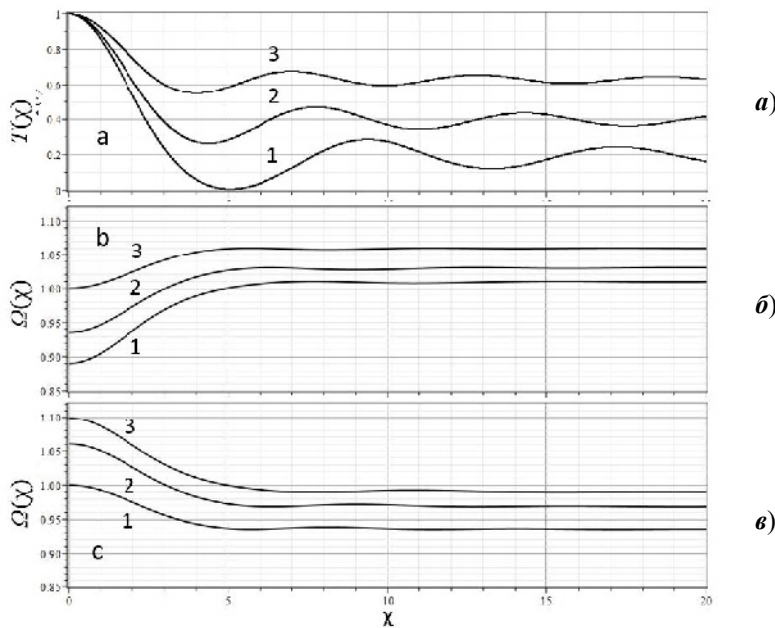


Рис. 1. Зависимости $T = T(\chi)$ (а) и $\Omega = \Omega(\chi)$ для $\alpha = 0,5$ (б) и $\alpha = -0,5$ (в); кривые: 1 – $\lambda = -0,0851$; 2 – $\lambda = -0,25$; 3 – $\lambda = -0,5$

В случае динамического равновесия (см. [1]) $\lambda < 0$ и при одинаковой массивности частиц ($D = 1$) находим:

$$3\mu \geq (1 + \lambda)\alpha. \quad (44)$$

Эти неравенства накладывают определенные ограничения на совместные значения параметров α и μ . Первый из них связан с тепловыми потоками в звезде, а второй – с ее угловой скоростью.

Из (42) получаем следующее выражение:

$$h(\xi_0, 0) = \left(\frac{3\mu}{2} - \lambda\alpha \right) \xi_0^4 - \alpha \xi_0^2 \int_0^{\xi_0} DR\xi d\xi \Big|_{\zeta=0}. \quad (45)$$

Согласно [1] важным параметром для оценок периода осцилляций Солнца является параметр h_0 , входящий в выражение для функции $h(\xi, \zeta)$ на экваторе:

$$h = \frac{3\mu}{2} \xi_0^4 + h_0. \quad (46)$$

В уточненной модели зонального потока в соответствии с (45) параметр должен иметь такой вид:

$$h_0 = -\alpha \left(\lambda \xi_0^2 + \int_0^{\xi_0} DR\xi d\xi \Big|_{\zeta=0} \right). \quad (47)$$

Теперь, в отличие от (46), из работы [1] распределение зональной скорости будет зависеть от ζ , т.е. будет меняться и в меридиональном направлении. Вместе с тем соотношение (47) не меняет процедуры оценки параметров модели осцилляций Солнца, которая использовалась в [1], поскольку они опирались не на значения $h(\xi, \zeta)$ на оси вращения, а на экваторе, т.е. на значение h_0 , которое теперь связано с параметром α , характеризующим тепловой режим в звездах.

5. Распределение плотности и температуры в случае непостоянной массивности частиц среды

Рассмотрим теперь изменения в сравнении с работой [1], вносимые в теорию за счет появления функции $D(\xi, \zeta)$. Воспользуемся для вывода соответствующего уравнения системой (34) и уравнением Пуассона в форме (16). Выражая компоненты вектора s компонентами (K^1, cK^2) из (34) и подставляя в (16), приходим к уравнению следующего вида:

$$Q_1 \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{MR} \frac{\partial}{\partial \xi} (SR^\gamma) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{MR} \frac{\partial}{\partial \zeta} (SR^\gamma) \right) \right] + 2 \frac{R}{M} + 3\Lambda = \hat{D}[\Psi_0], \quad (48)$$

где

$$\hat{D}[\Psi_0] = \frac{1}{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{M} \Psi_{0,\xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{M} \Psi_{0,\zeta} \right) \right].$$

Слагаемое $\hat{D}[\Psi_0]$ в правой части уравнения (48) содержит произвольную функцию Ψ_0 . Компоненты поля g_{Ψ} компенсируют, как уже отмечалось, вихревую составляющую поля $K = (K^1, K^2)$. Можно предположить, что этим слагаемым можно пренебречь при первом общем анализе, поскольку в случае $M = 1$ оно обращается в ноль. Также оно обращается в ноль и при более общем условии: $\Psi_0 = \Psi_0(M)$.

Для дальнейшего простейшего анализа пространственного распределения коэффициентов плотности и температуры необходимо иметь некоторое общее представление о функции M . Такое модельное представление можно получить исходя из того, что функциональный вид $M(\xi, \zeta)$, как функции автомодельных переменных, определяется в некоторый начальный момент времени и не меняется после этого в процессе всей автомодельной эволюции. Последнее означает, что функциональный вид $M(\xi, \zeta)$ определяется процессами, происходившими до момента перехода системы в состояние динамического равновесия. Сами эти процессы рассматривать необходимо в отдельном исследовании, но исходя из простых соображений можно предположить, что функция M может быть приближенно представлена в виде

$$M = m_0 R^\delta. \quad (49)$$

Здесь m_0 и k – числовые параметры. Поскольку числовой параметр m_0 входит в соотношение для плотности (8) вместе с числовым множителем M_0 , то без ограничения общности можно в (49) полагать $m_0 = 1$.

Значения $M(\xi, \zeta)$ представляют собой относительную массу частицы в точке с координатами (ξ, ζ) , поэтому величина M должна вычисляться как средняя относительная масса всех частиц в фиксированном объеме пространства. Отклонение этой величины от 1 возможно только, если среда состоит из частиц разного сорта. Для звезд такая ситуация в реальности должна иметь место, поскольку термоядерные реакции в звездах происходят в ядрах звезд, где температура достаточна для их протекания. В этом отношении смысл формулы (49) состоит в том, что массивность частиц, образующихся в среде с достаточно большой плотностью и температурой в силу квазиadiaбатичности процессов, будет завистеть от плотности и температуры среды. В частности, темп и характер ядерных реакций зависит именно от плотности среды и температуры, что обычно и используется для описания энерговыделения в звездах. Исходя из этого можно предположить, что функция массивности M , характеризующая как раз накопление тяжелых элементов за счет ядерных реакций, должна иметь в простейшем случае вид степенного закона (49). Если предполагать, что при нулевой плотности массивность частиц также должна обра-

щаться в ноль, чтобы не возникало сингулярностей, то параметр k в (49) должен быть неотрицательной величиной: $k \geq 0$. Отметим, что $M = 1$ при $k = 0$. Вместе с тем, поскольку в реальности плотность в рассматриваемых моделях с достаточно большими по модулю отрицательными значениями λ [1] нигде не обращается в ноль, то можно предполагать, что и отрицательные значения k могут соответствовать некоторым реальным ситуациям. Например, в химически пекулярных звездах [19] в верхних слоях обнаруживается значительное увеличение тяжелых элементов. Поскольку в верхних слоях звезд плотность убывает при приближении к поверхности звезды, то параметр k для таких звезд, по крайней мере в верхних слоях, должен быть отрицательным. Дополнительную информацию о параметре k можно извлечь из того, что величина $|J|$, входящая в выражение (8) для плотности, представляет собой концентрацию частиц. Величина $|J|$ связана с R соотношением

$$|J| = \xi (M_0 M^{-1}) R = \xi (M_0 / m_0)^{-1} R^{1-k}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что параметр k должен быть меньше единицы, поскольку при $R \rightarrow 0$ концентрация частиц также должна при обычных условиях быть ограниченной величиной. Таким образом, для нормальных звезд можно ограничиться значениями k , удовлетворяющими условию

$$0 \leq k < 1, \tag{50}$$

но для звезд со сложным химическим составом эти ограничения могут и не выполняться.

Теперь можно получить уравнение для пространственного распределения плотности и температуры, обобщающее аналогичное уравнение из работы [1].

Как и в работе [1], будем рассматривать уравнение (37) в приближении сферической симметрии, т.е. в нулевом порядке по параметрам несферичности системы. В таком приближении вводится переменная $\chi = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}$ так, что функции R, T, D, S в рассматриваемом порядке возмущений будут функциями только χ :

$$R = R(\chi), T = T(\chi), S = S(\chi), M = D(\chi).$$

Учитывая (23) и (49), преобразуем уравнение (37) к виду

$$\frac{Q_1 H_0}{2} \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi}{R^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \xi} (R^{\gamma+\delta}) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} (R^{\gamma+\delta}) \right) \right] + R^{1-k} + 3m_0 \Lambda / 2 = 0. \tag{51}$$

Введем функцию $\Theta = R^{\varpi}$, где $\varpi = \gamma + \delta - k - 1$.

В результате уравнение (51) примет вид обобщенного уравнения Лейна – Эмдена:

$$\lambda + \Theta^n + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\chi^2 \frac{\partial}{\partial \chi} \Theta \right) = 0, \tag{52}$$

где введены обозначения

$$n = \frac{1-k}{\varpi}, \quad \lambda = \frac{3}{2}\Lambda. \quad (53)$$

При выводе этого уравнения полагалось:

$$\frac{Q_1 H_0(\gamma + \delta)}{2\varpi} = 1.$$

Граничными условиями для этого уравнения являются следующие соотношения:

$$R(0) = 1, \quad R'(0) = 0. \quad (54)$$

Отсюда следует, что для Θ граничными условиями являются следующие условия:

$$\Theta(0) = 1, \quad \Theta'(0) = 1. \quad (55)$$

Коэффициенты плотности и температуры будут выражаться через Θ следующим образом:

$$R = \Theta^{1/\varpi}, \quad T = \Theta^{(\gamma + \delta - 1)/\varpi} = \Theta^{1+k/\varpi}. \quad (56)$$

Основные свойства модифицированного уравнения Лейна – Эмдена (mLEM) (52) в случае $M = 1$ ($D = 1$), что соответствует $k = 0$, достаточно подробно рассматривались в работе [1]. Поэтому остановимся на некоторых свойствах этого уравнения в случае $M \neq \text{const}$. Уравнение (52) в точности совпадает с аналогичным уравнением из [1]. Поэтому весь анализ решений этого уравнения остается в силе и здесь. Отличием уравнения (52) от обобщенного уравнения Лейна – Эмдена с параметром динамического равновесия λ является новое выражение для параметра n (53). В случае $k = 0$ этот параметр принимает значения показателя адиабаты с эффективным значением $\gamma_{\text{eff}} = \gamma + \delta$, а при $\delta = 0$ – обычного показателя адиабаты классических работ Лейна – Эмдена [2, 3]. Вторым отличием является то, что функция Θ при $k \neq 0$ не совпадает с коэффициентом температуры, с которым она связана соотношением (56). Таким образом, если результаты расчетов пространственного распределения температуры, представленные в [1], необходимо пересчитать для случая $k \neq 0$, то для этого достаточно воспользоваться соотношением (56), поскольку решение для Θ не будет меняться при том же значении n .

Как было показано в [1], численный анализ пространственных распределений, соответствующих уравнению (52), привел к выводу, что число n в этом уравнении для наилучшей модели Солнца должен быть равен приблизительно $n \approx 5$, что давало для эффективного показателя адиабаты значение $\gamma_{\text{eff}} \approx 6/5$ в случае, если сам газ имеет коэффициент адиабаты $5/3$ и $k = 0$. В случае, если $k \neq 0$, получаем соотношение

$$5(\gamma + \delta) = 6 + 4k.$$

В это соотношение входит два неопределенных параметра δ и k , выбор значения одного из которых произволен. Можно предполагать, что значение k для нормальных звезд, в которых содержание гелия мало, параметр k положителен и не сильно отличается от нуля, поскольку концентрация гелия, исходя из общих соображений, в таких звездах должна слабо расти вместе с плотностью при приближении к центру звезды.

Заметим, что функцию M в форме (49) можно было бы попытаться использовать для решения проблемы температуры в короне звезд типа Солнца. Как было показано в [1], в модели осцилляций Солнца уравнение mLEM с $M=1$ позволяет на качественном уровне объяснить рост температуры в короне Солнца. Однако максимум температуры в модели оказывается в 15–20 раз меньше, чем наблюдаемая в реальности температура в короне Солнца. Учитывая соотношение (56), можно было бы подогнать параметр k так, чтобы температура во втором максимуме от центра звезды соответствовала бы наблюдаемой температуре в короне Солнца. Обозначим через τ отношение реальной температуры $T_{k\odot}$ в короне Солнца, которая оценивается порядка $2 \cdot 10^6$ К, к вычисленной в модели для уравнения (52) с $n=5$ и $\lambda = -7,7879456 \cdot 10^{-12}$ (см. [1]). Эта величина имеет значение $\tau \approx 20$. С другой стороны, значение коэффициента температуры в решении (52) с указанными параметрами согласно [1] имеет значение $T_{\max} \approx 0,00717$. Оценка температуры, соответствующая этому значению T_{\max} , полученная в [1], имеет величину $T_{\max} \approx 100000$ К. Отсюда, учитывая (56), находим значение k , для которого реальная температура в короне соответствовала бы модельному значению T_{\max} :

$$k \approx \frac{5 \log(\tau) / \log(T_{\max})}{5 \log(\tau) / \log(T_{\max}) + 1} \approx 1,5.$$

Это значение выходит за рамки ограничения (50). Поэтому дополнительное увеличение температуры в короне Солнца по сравнению с оценкой $T_{\max} \approx 100000$ К напрямую не связано с изменением функции массивности частиц.

6. Осцилляции звезд и диаграмма период-светимость

Как уже отмечалось, уравнение (35) для масштабного фактора, описывающее осцилляции звезд, не меняется по сравнению с аналогичным уравнением в [1]. Вместе с тем, поскольку при разделении переменных появляются дополнительные параметры в эволюции теплового режима звезды, это приводит к некоторым изменениям в характеристиках изменения светимости звезд при осцилляциях и в форме диаграммы период-светимость.

Как и в работе [1], уравнение (35) приведем к виду динамической системы в безразмерной форме:

$$\frac{dy}{d\tau} = x^{-3} + \text{sign}(v)x^{-2}, \quad \frac{dx}{d\tau} = y, \quad (57)$$

где

$$x = a / a_0, \quad y = t_0 c / a_0, \quad \tau = t / t_0,$$

Постоянные a_0 и t_0 определяются следующим образом:

$$a_0 = \mu / |v|, \quad t_0 = \frac{\mu^{3/2}}{|v|^2}, \quad (58)$$

где $v = \frac{4\pi GM_0}{3} \lambda$.

Динамическая система (57) имеет интеграл движения:

$$\frac{y^2}{2} + \text{sign}(v) \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = E, \quad (59)$$

который аналогичен интегралу энергии частицы, совершающей одномерное движение в потенциальном поле сил.

Для моделей с $v < 0$ ($\lambda < 0$) все траектории динамической системы (57) для $-0,5 < E < 0$ являются замкнутыми, а траектории с $E > 0$ асимптотически стремятся к точкам ($x = \infty, y = \pm\sqrt{2E}$) при $t \rightarrow \pm\infty$ (см. рис. 1, в). Из (59) следует, что фазовые траектории для $-0,5 < E < 0$ пересекают ось абсцисс при значениях безразмерной координаты, равной

$$x_{\pm} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{2E + 1}}. \quad (60)$$

Точка x_+ соответствует максимальному сжатию структуры, а точка x_- – максимальному расширению. Размах колебаний $\Delta_E = |x_- - x_+|$ в случае осцилляций определяется следующим образом:

$$\Delta_E = |x_- - x_+| = \frac{\sqrt{1 - 2|E|}}{|E|}. \quad (61)$$

Для $E = 0$ $x_- = \infty$, а при $E > 0$ эта точка лежит в отрицательной области значений $x < 0$, но траектории в полуплоскости $x < 0$ не имеют физического смысла.

Период колебаний P_E газодинамического объекта, соответствующий определенному значению параметра E , вычисляется в соответствии со следующей формулой:

$$P_E = 2 \int_{x_+}^{x_-} \frac{xdx}{\sqrt{2Ex^2 + 2x - 1}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2|E|^{3/2}}, \quad (62)$$

отсюда следует, что при $E \rightarrow 0$ период колебаний стремится к бесконечности.

Хотя уравнение для масштабного фактора остается неизменным, но вследствие выполнения обобщенных условий (31), (32) для энтропии диаграмма период–светимость и характер изменения светимости во времени ме-

няются. Дифференциальный поток излучения вычисляется с помощью закона Стефана – Больцмана по формуле

$$F = \sigma_0 T^4 (R_*) = \sigma_0 \Pi^4 (t) T^4 (\chi_0),$$

здесь σ_0 – постоянная Стефана – Больцмана. Соответственно светимость может быть вычислена с помощью соотношения

$$L = 4\pi\sigma_0\Pi^4(t)T^4(\chi_0)R_*^2 = 4\pi\sigma_0\Pi^4(t)a^2(t)T^4(\chi_0)\chi_0^2.$$

Согласно (31), (32), учитывая (22), находим:

$$L = x^{-2}(t)(1 + \theta_0 x^{-1}(t))^4 L_0, \tag{63}$$

где $\theta_0 = a_T / a_0$,

$$L_0 = 4\pi\sigma_0. \tag{64}$$

Для построения диаграммы период–светимость воспользуемся соотношением (63), записанным для максимального $x_-(E)$ и минимального $x_+(E)$ автомодельных радиусов звезд. В результате с учетом (60) имеем:

$$L_{\max} = L_0(1 + \sqrt{1 - 2|E|})^2 F_+(|E|, \theta_0),$$

$$L_{\min} = L_0(1 - \sqrt{1 - 2|E|})^2 F_-(|E|, \theta_0).$$

Здесь

$$F_{\pm}(|E|, \theta_0) = \left(1 + \theta_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - 2|E|}\right)\right)^4.$$

Исключая из этих соотношений E с помощью выражения (62), получаем формулы, которые по сути и являются диаграммами период–светимость:

$$\frac{L_{\max}}{L_0} = \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{P_E}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}}\right)^2 F_+(P_E, \theta_0),$$

$$\frac{L_{\min}}{L_0} = \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{P_E}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}}\right)^2 F_-(P_E, \theta_0). \tag{65}$$

Соответственно здесь имеем

$$F_{\pm}(P_E, \theta_0) = \left(1 + \theta_0 \pm \theta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{P_E}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}}}\right)^4.$$

Соотношения (65) получены в предположении, что максимум и минимум светимости соответствуют минимальным x_+ и максимальным x_- значе-

ниям безразмерного масштабного фактора x . Поскольку для любых нормальных фазовых траекторий $x > 0$, то это условие выполняется в точности только в случае при $\theta_0 > 0$. Если $\theta_0 < 0$, то на графиках осцилляций появляются дополнительные максимумы и минимумы. Действительно, производная по времени от относительной светимости L/L_0 имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(L/L_0) = -2yx^{-4} \left(1 + \frac{\theta_0}{x}\right)^3 (x + 3\theta_0).$$

Отсюда следует, что производная от светимости может обращаться в ноль, кроме точки, где $y = 0$, также в точках $X_1 = -\theta_0$ и $X_2 = -3\theta_0$. Поскольку $x > 0$, то последние две ситуации возможны только в случае $\theta_0 < 0$. Если для конкретной фазовой кривой $x_+ = -\theta_0$, то светимость при достижении масштабным фактором значения x_+ обращается в ноль. Если $x_+ < -\theta_0$, то светимость обращается в ноль дважды за период. Такое поведение возможно при достаточно больших по модулю значениях θ_0 и больших по размаху h_E осцилляций.

Для наглядности характера осцилляций на рис. 2,а,б представлены графики изменения безразмерного радиуса $x(\tau)$ (рис. 2,а) и безразмерной скорости $y(\tau)$ (рис. 2,б) в зависимости от безразмерного времени τ для двух начальных условий. На рис. 2,в изображены соответствующие фазовые кривые $y = y(x)$.

На рис. 3,а,б,в,г представлены графики осцилляций относительной светимости (63), соответствующие фазовым кривым на рис. 2,в (с теми же обозначениями кривых, соответствующих разным начальным условиям) для четырех значений параметра θ_0 как положительных (рис. 3,а,в), так и отрицательных (рис. 3,б,г).

На фазовой диаграмме две точки пересечения вертикальных линий с фазовыми кривыми указывают места, где для отрицательных значений θ_0 появляются дополнительные максимумы (в точках X'_1 и X'_2). Значения X'_1 и X'_2 соответствуют $\theta_0 = -0,3$, а X''_1 и X''_2 – значению $\theta_0 = -0,65$. При этом в точках, где $y = 0$, вместо максимума появляется минимум. В точках с координатой X''_1 светимость обращается в ноль.

Соответствующие соотношениям (65) кривые период–светимость для относительных величин L_{\max}/L_0 и L_{\min}/L_0 представлены на рис. 4 для нескольких положительных значений θ_0 . Сплошной линией обозначена ветвь максимальных значений L_{\max}/L_0 , а пунктирной – минимальных L_{\min}/L_0 . Точка, где обе ветви сливаются, соответствует бесконечно малым осцилляциям. Кривые, соответствующие (65), построены для экстремумов светимости в точках $y = 0$ и, следовательно, не отражают реальной ситуации с максимумом светимости, если он соответствует точке $X_2 = -3\theta_0$. Если соотношения параметров θ_0 и x_{\pm} таковы, что точка максимума светимости соответствует

$X_2 = -3\theta_0$, то светимость в этом максимуме не зависит от фазовой траектории, т.е. от периода осцилляций, и равна:

$$L / L_0 = (2/3)^4 |\theta_0|^{-2}; \tag{66}$$

это наглядно видно на рис. 3,б,г. В точках $x_- = X_1 = -\theta_0$ в случае, если это соотношение может выполняться для конкретного набора фазовых траекторий, светимость минимальна и обращается в ноль также в независимости от периода осцилляций.

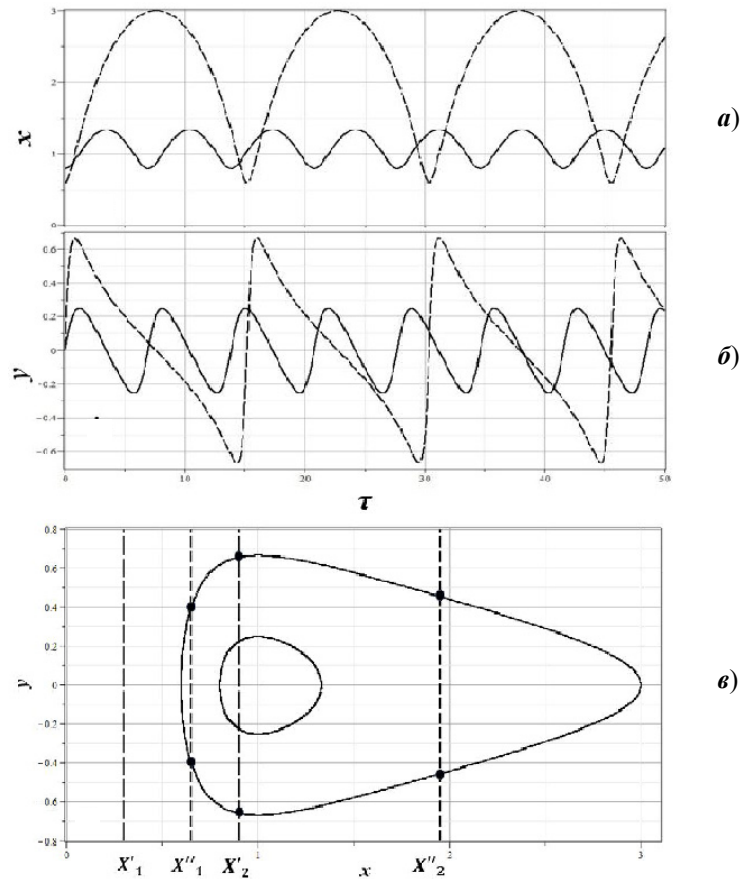


Рис. 2. Зависимости $x(\tau)$ (а), $y(\tau)$ (б), а также фазовые траектории звезды (в) с начальными условиями: кривая 1 – $(y(0) = 0, x(0) = 0,6)$ – пунктир, кривая 2 – $(y(0) = 0, x(0) = 0,8)$ – сплошная линия

Обычно диаграммы период–светимость для цефеид аппроксимируются зависимостями типа

$$\log(L / L_0) = a \log(P) + b, \tag{67}$$

а отклонения от этой зависимости квадратичными добавками по $\log(P)$ [20]. В моделях, построенных здесь и в [1], диаграммы период–светимость имеют

более сложную функциональную зависимость от периода P , хотя в целом подобны реальным диаграммам. Поэтому аппроксимации типа (67) могут совпадать с диаграммами (65) лишь на ограниченных интервалах значений периодов.

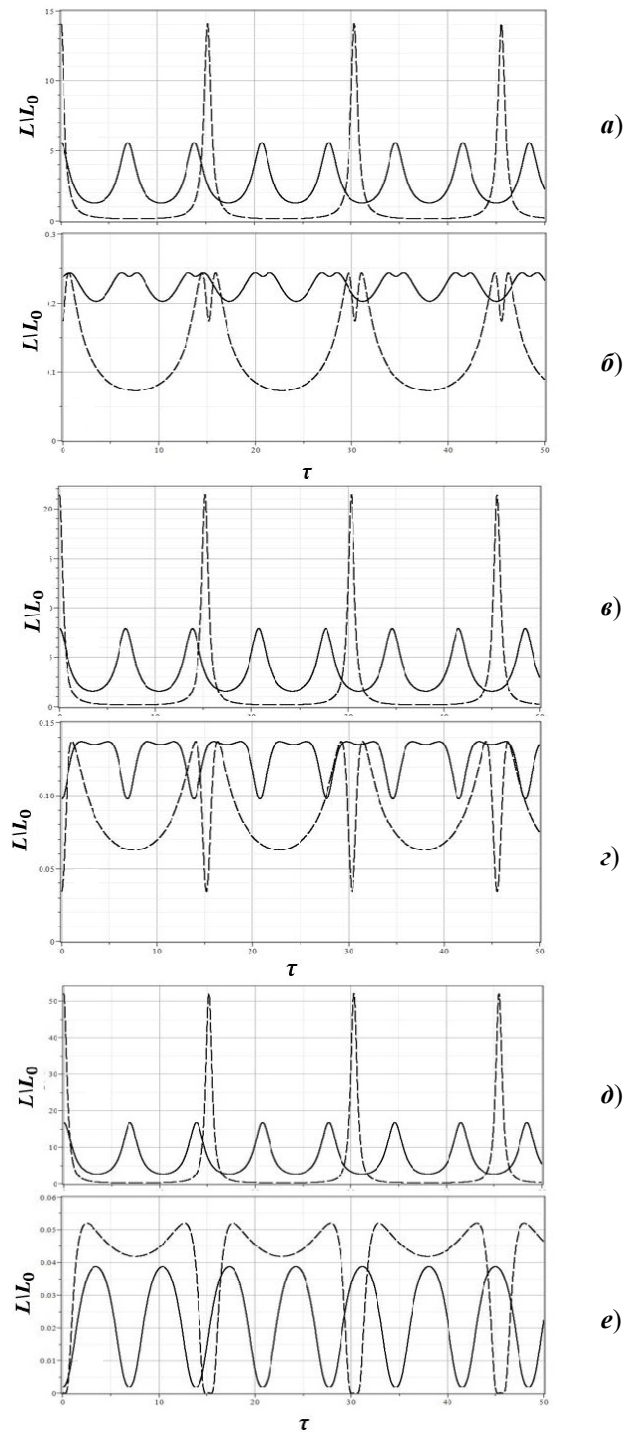


Рис. 3. Изменения относительной светимости для фазовых траекторий (см. рис. 1,б):
 $a - \theta_0 = 0,3$; $b - \theta_0 = -0,3$; $в - \theta_0 = 0,4$; $г - \theta_0 = -0,4$; $д - \theta_0 = 0,65$; $e - \theta_0 = -0,65$

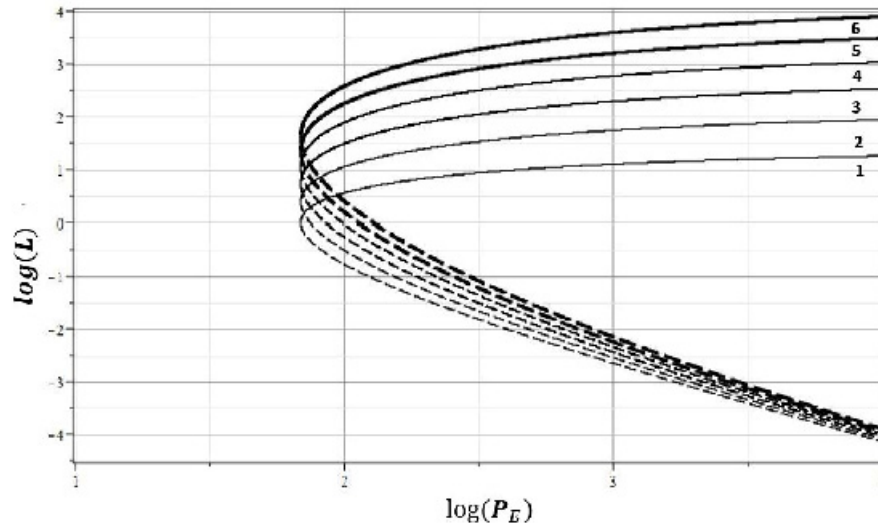


Рис. 4. Диаграммы период-светимость в зависимости от θ_0 ;
 кривые: 1 – $\theta_0 = 0$; 2 – $\theta_0 = 0,1$; 3 – $\theta_0 = 0,2$; 4 – $\theta_0 = 0,3$; 5 – $\theta_0 = 0,4$; 6 – $\theta_0 = 0,5$

7. Общий анализ осцилляций

Наличие параметра θ_0 в обобщенных диаграммах (65), возможно, объясняет наличие различных типов цефеид (классические цефеиды, цефеиды типа II и т.д), а также и других типов пульсирующих звезд [20–25]. Многообразие возможностей в данной модели порождается тем, что параметр θ_0 может принимать как положительные значения, так и отрицательные. Это демонстрируют графики на рис. 3.

Из анализа графиков осцилляций светимости для различных значений θ_0 можно сделать следующие общие выводы. Во-первых, графики изменения светимости симметричны относительно середины периода, в котором светимость достигает либо максимума, либо локального минимума. Во-вторых, в случае отрицательных значений θ_0 , что соответствует отрицательным значениям Q_2 , осцилляции светимости по амплитуде значительно меньше, чем при $\theta_0 > 0$, и носят двухмодовый характер. В-третьих, для отрицательных значений θ_0 при условии $x_+ < -3\theta_0$ максимум амплитуды светимости не зависит от периода осцилляций, т.е. от фазовой кривой. В-четвертых, модели с $\theta_0 < 0$ и большими размахами осцилляций могут приводить к тому, что светимость звезды падает до очень низких значений – вплоть до полного ее отсутствия.

Первый вывод указывает на то, что в чистом виде модель светимости переменных звезд, соответствующая (63), выполняется только для s-цефеид с симметричной кривой блеска [22–24] (рис. 5,а). Для большинства цефеид кривая блеска несимметрична и более похожа на кривую $y = y(\tau)$ (рис. 5,б). Последнее означает, что если развитая в данной работе и в [1] модель осцилляций звезд пригодна для описания не s-цефеид, то светимость этих звезд должна формироваться не только за счет поверхностной яркости звезды (63),

зависящей от ее радиуса, но и от других факторов, влияющих на светимость, которые зависят от $y(\tau)$. Построение модели, которая бы учитывала такую возможность, не входит в цели данной статьи, но в качестве простой гипотезы можно предположить, что дополнительная светимость, определяющая несимметричный характер кривых блеска, может быть связана со звездным ветром, наличие которого в данной модели не учитывается. Кроме этого, на форму кривой блеска может влиять и магнитное поле, которое может быть учтено в данной модели [10].

Второй вывод указывает на то, что предложенная модель пульсирующих звезд может объяснить наличие двухмодового характера кривых блеска целого ряда цефеид [22–24] отрицательным значением параметра θ_0 , особенно после учета факторов, делающих кривую блеска несимметричной.

Третий вывод указывает на то, что, возможно, ряд переменных звезд с различными периодами, но одинаковыми светимостями, в максимуме может быть объединен в отдельный класс переменных звезд, поскольку диаграмма период–светимость для них не будет подчиняться соотношению (65).

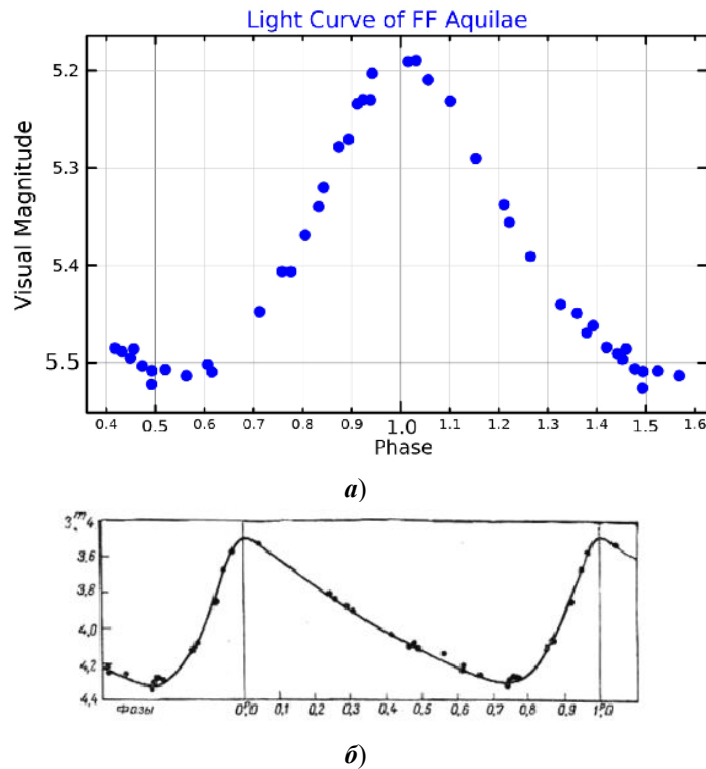


Рис. 5. Кривые блеска FF-Орла (a) [26] и δ -Цефея (b) [24]

Четвертый вывод дает основания предполагать, что для некоторых переменных звезд светимость может падать до чрезвычайно малых значений. Этот вывод указывает на возможную связь между знаком θ_0 , размахом колебаний и потерей устойчивости звездой, что приводит к их коллапсу или взрыву. Действительно, по смыслу Q_2 знак этой величины определяет ту

часть силы Архимеда, которая необходима для поддержания зонального потока того или иного вида. В случае, если максимум локальной угловой скорости находится на оси вращения ($\alpha < 0 \rightarrow Q_2 < 0 \rightarrow \theta_0 < 0$), то компоненты силы давления вычитаются. Если в процессе осцилляций достигается состояние $x = -\theta_0$, то суммарное давление в звезде обращается в ноль. Обращение давления в ноль является следствием динамического равновесия звезды. Однако такое состояние должно оказывать существенное влияние на характер термоядерных реакций в звезде, которые создают необходимый для поддержания равновесия поток тепла через звезду. Поскольку в явном виде источник энергии в форме совокупности термоядерных реакций в модели не фигурирует, то падение давления в реальности может приводить к коллапсу звезды. Поэтому условие приближения безразмерного масштабного фактора к точке $x = -\theta_0$, возможно, может служить критерием перехода звезды в неустойчивое состояние, близкое к коллапсу.

Из практически важных следствий соотношений (63) и (66) существует возможность связывать радиус звезды в максимумах светимости со значением параметра θ_0 , отражающим тепловой режим звезды во время осцилляций. Согласно (66) для звезд, для которых выполняется соотношение $x_+ < -3\theta_0$ в момент достижения максимума светимости, последняя определяется через θ_0 . Это при условии возможности оценить L_0 дает оценки и для радиуса звезды, и для параметра θ_0 .

Следует также отметить, что знак θ_0 для солнечных осцилляций, рассмотренных в [1], остается открытым, поскольку эти осцилляции имеют очень малый размах, а осцилляции светимости почти незаметны. Однако это не исключает того, что для Солнца параметр θ_0 может быть отрицательным. С помощью неравенства (44) можно получить ограничение на параметры α и θ_0 для Солнца. Используя оценки $M_0 \approx 2,07 \cdot 10^{22}$ [г], $a_0 \approx 5,72 \cdot 10^6$ [см], $\mu \approx 2,3 \cdot 10^{11}$ [см²/с] и $\lambda \approx -7,7879456 \cdot 10^{-12}$ из [1], находим

$$\alpha \leq 7 \cdot 10^{11} \text{ [см}^2\text{/с]}.$$

Отсюда, учитывая (39), получаем

$$a_T = \frac{\alpha}{4\pi GM_0} < 4 \cdot 10^{-5} \text{ [см]}, \quad \theta_0 = a_T / a_0 < 8 \cdot 10^{-12}.$$

Заключение

Приведены новые соотношения, уточняющие модель динамического равновесия звезд, при котором звезды совершают периодические пульсации. Показано, что в уточненной модели решается проблема сингулярности локальной угловой скорости зонального потока на оси вращения звезды. Данный результат в модели связан с уточнением условий разделения переменных, которые обусловлены разбиением суммарной силы давления газа в среде на две составляющие. Одна составляющая, как и в предыдущей версии модели, уравновешивает силу тяготения вместе с силой реакции среды на

существование потока Хаббла. Вторая же поддерживает зональный поток. В предыдущей версии модели зональный поток поддерживался исключительно составляющей силой тяготения. Разделение силы давления на две составляющие связано с дополнительной особенностью теплового потока в звездах при их осцилляциях. Это приводит к некоторым изменениям в форме зависимости светимости звезд при осцилляциях от времени, а также в форме диаграммы период–светимость. В отличие от предыдущего варианта модели [1], теперь диаграмма период–светимость зависит от параметра θ_0 , характеризующего тепловой режим в звездах. Это позволяет объяснить существование различных типов переменных звезд наличием в них различных вариантов соотношения параметров θ_0 и x_{\pm} . Вместе с тем введение параметра θ_0 не решает проблему несимметричности реальных кривых блеска большинства пульсирующих звезд, для решения которой требуются дополнительные исследования.

Кроме уточнения, связанного с зональным потоком и тепловым режимом звезд, в работе введено важное уточнение, касающееся распределения в пространстве параметра массивности частиц среды. Как было показано, наличие такого параметра определяется существованием неоднородного химического состава звезд. Эта неоднородность связана с различными термоядерными реакциями, протекающими в звездах, которые приводят к появлению в среде более тяжелых элементов, чем водород. Как показано в рамках данной модели, эффект неоднородного распределения массивности в пространстве автоматически приводит к появлению эффекта скрытой массы. Однако такой эффект должен быть существенным лишь для звезд на последних стадиях эволюции, когда в среде появляются значительно более тяжелые элементы, чем водород и гелий. В соответствии с этим обстоятельством эффект скрытой массы или «темной материи» должен проявляться в структуре галактик и их скоплений, где в моделях их структуры и эволюции под точками «среды» понимают сами звезды. Однако анализ этих ситуаций выходит за рамки данной работы.

В вариант модели звездных осцилляций в данной работе не включено магнитное поле. Как уже отмечалось, модели звездных осцилляций, основанные на предыдущем варианте модели, обсуждались в [10]. Эти модели с магнитным полем, как и модель осцилляций, имели особенности на оси вращения звезд. Решение проблемы сингулярности на оси вращения решает в целом и проблему особенности магнитного поля на оси вращения. Однако модель магнитного поля, основанная на уточненной модели звездных осцилляций, требует дополнительных исследований.

Список литературы

1. Журавлев В. М. Модели динамического равновесия астрофизических объектов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2022. Т. 162, № 6. С. 850–877.
2. Lane J. H. On the Theoretical Temperature of the Sun, under the hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its Internal Heat. And depending on Laws of Gases as known to Terrestrial Experiment // American Journal of Science and Arts. Second Series. 1870. Vol. 50. P. 57–74.
3. Emden R. Gaskugeln. Leipzig : B.G. Teubner, 1907. 500 с.

4. Жевакин С. А. К теории цефеид. I // *Астрономический журнал*. 1953. № 30. P. 161–179.
5. Жевакин С. А. К теории звездной переменности. II // *Астрономический журнал*. 1954. № 31. С. 141–153.
6. Zhevakin S. A. Physical foundations of the theory of pulsations of variable stars // *Annual Review of Astron. and Astrophys.* 1963. № 1. С. 367–400.
7. Iben I. *Stellar Evolution Physics. Vol. 1: Physical Processes in Stellar Interiors.* Cambridge University Press, 2013. 908 p.
8. Iben I. *Stellar Evolution Physics. Vol. 2: Advanced Evolution of Single Stars.* Cambridge University Press, 2013. 618 p.
9. Dupret M.-A. Current problems in stellar pulsation theory // arXiv:1901.08809v1 [astro-ph.SR].
10. Журавлев В. М. Магнитное поле звезд, находящихся в динамическом равновесии // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2022. № 4. С. 13–30.
11. Журавлев В. М. Модели динамики самогравитирующего политропного газа // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2020. № 4. С. 10–22.
12. Журавлев В. М. Модели динамики пылевидной материи в собственном гравитационном поле. Метод гидродинамических подстановок // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2017. Т. 152, № 3. С. 495.
13. Zhuravlev V. M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure // *Gravitation and Cosmology*. 2011. Vol. 17, № 3. P. 201.
14. Zhuravlev V. M. Enduction equations for fundamental fields and dark matter // *Gravitation and Cosmology*. 2017. Vol. 23, № 2. P. 95.
15. Zhuravlev V. M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles // *Gravitation and Cosmology*. 2022. Vol. 28. № 4. P. 319–341.
16. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Теория тяготения и эволюция звезд*. М. : Наука, 1971. 484 p.
17. Горбачкий В. Г. *Космическая газодинамика*. М. : Наука, 1977. 360 с.
18. Богоявленский О. И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике*. М. : Наука, 1980. 320 с.
19. Preston G. V. The chemically peculiar stars of the upper main sequence // *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1974. Vol. 12. С. 257–277.
20. Бердников Л. Н. Цефеиды. М., 2006. URL: <http://www.astronet.ru/db/msg/1212211>
21. Кокс Дж. П. *Теория звездных пульсаций*. М. : Мир, 1983. 326 с.
22. *Пульсирующие звезды* / под ред. Б. В. Кукаркина. М. : Наука, 1970. 372 с.
23. Расторгуев А. С. *Звездные маяки Вселенной*. М. : ГАИШ, 2015. URL: <http://lnfm1.sai.msu.ru/rastor>
24. Самусь Н. Н. *Переменные звезды : уч. пособие по курсу «Астрономия»*. URL: <https://heritage.sai.msu.ru/ucheb/Samus/index.html>
25. Paul S., Chattopadhyay T. Structural properties and classification of variable stars: A study through unsupervised machine learning techniques // arXiv:2201.08755v1
26. Kiss László L. A photometric and spectroscopic study of the brightest northern Cepheids – I // *Observations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1998. Vol. 297 (3). P. 825–838. URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=111182923>

References

1. Zhuravlev V.M. Models of dynamic equilibrium of astrophysical objects. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of experimental and theoretical physics*. 2022;162(6):850–877. (In Russ.)
2. Lane J.H. On the Theoretical Temperature of the Sun, under the hypothesis of a Gaseous Mass maintaining its Volume by its Internal Heat. And depending on Laws of Gas-

- es as known to Terrestrial Experiment. *American Journal of Science and Arts. Second Series*. 1870;50:57–74.
3. Emden R. *Gaskugeln*. Leipzig: B.G. Teubner, 1907:500.
 4. Zhevakin S.A. Toward the theory of Cepheids. 1. *Astronomicheskij zhurnal = Astronomical journal*. 1953;(30):161–179. (In Russ.)
 5. Zhevakin S.A. Towards a theory of stellar variability. 2. *Astronomicheskij zhurnal = Astronomical journal*. 1954;(31):141–153. (In Russ.)
 6. Zhevakin S.A. Physical foundations of the theory of pulsations of variable stars. *Annual Review of Astron. and Astrophys.* 1963;(1):367–400.
 7. Iben I. *Stellar Evolution Physics. Vol. 1: Physical Processes in Stellar Interiors*. Cambridge University Press, 2013:908.
 8. Iben I. *Stellar Evolution Physics. Vol. 2: Advanced Evolution of Single Stars*. Cambridge University Press, 2013:618.
 9. Dupret M.-A. Current problems in stellar pulsation theory. *arXiv:1901.08809v1 [astro-ph.SR]*.
 10. Zhuravlev V.M. Magnetic field of stars in dynamic equilibrium. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2022;(4):13–30. (In Russ.)
 11. Zhuravlev V.M. Models of dynamics of self-gravitating polytropic gas. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2020;(4):10–22. (In Russ.)
 12. Zhuravlev V.M. Models of the dynamics of dusty matter in its own gravitational field. Method of hydrodynamic substitutions. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of experimental and theoretical physics*. 2017;152(3):495. (In Russ.)
 13. Zhuravlev V.M. A topological interpretation of quantum theory and elementary particle structure. *Gravitation and Cosmology*. 2011;17(3):201.
 14. Zhuravlev V.M. Enduction equations for fundamental fields and dark matter. *Gravitation and Cosmology*. 2017;23(2):95.
 15. Zhuravlev V.M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles. *Gravitation and Cosmology*. 2022;28(4):319–341.
 16. Zel'dovich Ya.B., Novikov I.D. *Teoriya tyagoteniya i evolyutsiya zvezd = The theory of gravity and the evolution of stars*. Moscow: Nauka, 1971:484. (In Russ.)
 17. Gorbatskiy V.G. *Kosmicheskaya gazodinamika = Space gas dynamics*. Moscow: Nauka, 1977:360.
 18. Bogoyavlenskij O.I. *Metody kachestvennoy teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoy dinamike = Methods of qualitative theory of dynamical systems in astrophysics and gas dynamics*. Moscow: Nauka, 1980:320. (In Russ.)
 19. Preston G.V. The chemically peculiar stars of the upper main sequence. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 1974;12:257–277.
 20. Berdnikov L.N. *Tsefeidy = Cepheids*. Moscow, 2006. (In Russ.). Available at: <http://www.astronet.ru/db/msg/1212211>
 21. Cox J.P. *Teoriya zvezdnykh pul'satsiy = Stellar pulsation theory*. Moscow: Mir, 1983:326. (In Russ.)
 22. Kukarkina B.V. (ed.). *Pul'siruyushchie zvezdy = Pulsating stars*. Moscow: Nauka, 1970:372. (In Russ.)
 23. Rastorguev A.S. *Zvezdnye mayaki Vselennoy = Star beacons of the Universe*. Moscow: GAISH, 2015. (In Russ.). Available at: <http://infml.sai.msu.ru/rastor>
 24. Samus' N.N. *Peremennye zvezdy: uch. posobie po kursu «Astronomiya» = Variable stars: textbook for the course "Astronomy"*. (In Russ.). Available at: <https://heritage.sai.msu.ru/ucheb/Samus/index.html>
 25. Paul S., Chattopadhyay T. Structural properties and classification of variable stars: A study through unsupervised machine learning techniques. *arXiv:2201.08755v1*

26. Kiss La'szlo' L. A photometric and spectroscopic study of the brightest northern Cepheids – I. *Observations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* 1998;297(3):825–838. Availablew at: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=111182923>

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев

доктор физико-математических наук,
профессор, научный сотрудник
лаборатории гравитации, космологии
и астрофизики, Ульяновский
государственный педагогический
университет (Россия, г. Ульяновск,
пл. Ленина, 4/5)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Viktor M. Zhuravlev

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, researcher of the
laboratory of gravity, cosmology
and astrophysics, Ulyanovsk State
Pedagogical University
(4/5 Lenina square, Ulyanovsk, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 15.09.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 30.10.2023

Принята к публикации / Accepted 27.11.2023