УДК 530.182, 51-71, 51-72
doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-9

Нелинейные волновые уравнения и условия совместности полиномиальных дифференциальных соотношений

В. М. Журавлев[1], В. М. Морозов[2]

[1]Ульяновский государственный педагогический университет, Ульяновск, Россия
[2]Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия
[2]Ульяновское конструкторское бюро приборостроения, Ульяновск, Россия

[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели*. Рассматривается связь условий совместности нелинейных дифференциальных соотношений полиномиального типа с нелинейными волновыми и диффузионными уравнениями. Такой подход является вариантом метода нелинейных функциональных подстановок, являющимся одним из методов построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. *Материалы и методы*. Основным методом, который используется в работе, является метод нелинейных функциональных подстановок, который является развитием метода функциональных подстановок, применявшегося ранее для построения решений уравнений типа Бюргерса. В работе рассматривается вариант метода нелинейных функциональных подстановок с полиномиальными по вспомогательной функции базовыми соотношениями. *Результаты*. Полностью проанализированы условия совместности базовых соотношений с полиномиальными базовыми функциями. Найдены новые точные решения уравнений диффузионного типа и указана методология применения метода на практике. В качестве примеров приведена новая цепочка уравнений Бюргерса с нелинейными источниками. Установлена связь условий совместности с представлением Лакса. *Выводы*. Развитый подход позволяет строить точные решения новых нелинейных уравнений.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, точные решения нелинейных волновых и диффузионных уравнений, представление Лакса

Для цитирования: Журавлев В. М., Морозов В. М. Нелинейные волновые уравнения и условия совместности полиномиальных дифференциальных соотношений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 91–107. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-9

Nonlinear wave equations and compatibility conditions for polynomial differential relations

V.M. Zhuravlev[1], V.M. Morozov[2]

[1]Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia
[2]Samara National Research University, Samara, Russia
[2] Ulyanovsk instrument engineering and design office, Ulyanovsk, Russia
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Abstract. *Background*. The connection of the compatibility conditions for nonlinear differential relations of polynomial type with nonlinear wave and diffusion equations is considered. This approach is a variant of the method of nonlinear functional substitutions, which is one of the methods for constructing exact solutions to nonlinear partial differential equations. *Materials and methods*. The main method used in the work is the method of nonlinear functional substitutions, which is a development of the method of functional substitutions, which was previously used to construct solutions to Burgers-type equations. The study considers a variant of the method of nonlinear functional substitutions with basic relations that are polynomial in the auxiliary function. *Results*. The conditions for the compatibility of basic relations with polynomial basic functions are completely analyzed. New exact solutions of equations of the diffusion type are found and the methodology for applying the method in practice is indicated. As examples, a new chain of Burgers equations with nonlinear sources is given. A connection between the compatibility conditions and the Lax representation is established. *Conclusions*. The developed approach makes it possible to construct exact solutions of new nonlinear equations.

Keywords: method of functional substitutions, exact solutions of nonlinear wave and diffusion equations, Lax representation

For citation: Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Nonlinear wave equations and compatibility conditions for polynomial differential relations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(1):91–107. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-9

Введение

Одним из основных подходов к построению точных решений моделей нелинейных волновых процессов в настоящее время являются теории, опирающиеся на анализ условий совместности некоторых дифференциальных соотношений для вспомогательных функций. Например, теория солитонов опирается на метод обратной задачи (МОЗ) [1–4], ключевым элементном которой является представление Лакса, т.е. представление уравнения в форме условия совместности пары линейных операторов, снабженных нетривиальным спектральным параметром. Методы функциональных подстановок опираются на анализ совместности линейных [5, 6] и нелинейных дифференциальных соотношений [7, 8]. В работе [7] анализировались условия совместности двух дифференциальных соотношений первого порядка по производным вспомогательной функции и второго порядка по степени вспомогательной функции. В работе [8] анализировались условия совместности двух дифференциальных соотношений первого порядка по производным вспомогательной функции, но со сложной функциональной зависимостью от той же вспомогательной функции. В работе [7] было показано, что анализируемые условия совместности сводятся к универсальному представлению Лакса для множества уравнения типа Кортевега – де Вриза (КдВ). В работе [8] было показано, что условия совместности в некоторых случаях эквивалентны преобразованиям Бэклунда, а в ряде случаев позволяют вычислять наборы частных решений неинтегрируемых нелинейных уравнений в размерности (1 + 1), которые другим способом получить трудно.

В данной работе анализируются условия совместности дифференциальных соотношений, аналогичных тем, которые рассматривались в [7, 8], но с полиномиальной их зависимостью от вспомогательной функции. Такие условия являются естественным обобщением квадратичных соотношений, рассмотренных в [7]. Основной задачей работы является анализ условий совместности, представленных уравнениями на коэффициенты полиномиальных дифференциальных соотношений при произвольном конечном порядке полиномов. Также задачей работы является анализ возможностей с помощью такой схемы вычислять точные решения новых нелинейных уравнений в частных производных.

1. Условие совместности нелинейных дифференциальных соотношений

Пусть $T(x,t)$ – некоторая дифференцируемая по каждой из переменных вспомогательная функция. Рассмотрим два уравнения общего вида:

$$T_x = U(x,t,T), \; T_t = V(x,t,T), \tag{1}$$

где $U(x,t,T)$ и $V(x,t,T)$ – некоторые функции независимых переменных x и t, а также вспомогательной функции $T(x,t)$.

Условием совместности этой системы является уравнение

$$U_t + VU_T = V_x + UV_T. \tag{2}$$

В данной работе будем рассматривать функции $U(x,t,T)$ и $V(x,t,T)$ в виде конечных полиномов по T с коэффициентами, зависящими от x и t:

$$U = \sum_{k=0}^{n} U_i(x,t)T^i, \; V = \sum_{k=0}^{n} V_i(x,t)T^i, \tag{3}$$

здесь $U_i(x,t)$, $V_i(x,t)$ – некоторые вспомогательные функции.

Подставляя эти соотношения в уравнение совместности и приравнивая нулю слагаемые при одинаковых степенях T, приходим к нелинейной системе из $(2n-1)$ уравнений для $(2n+2)$ функций $U_i(x,t)$, $V_i(x,t)$. Эта система выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}U_i - \frac{\partial}{\partial x}V_i + \sum_{j=0}^{i+1} j\left(V_{i+1-j}U_j - U_{i+1-j}V_j\right) = 0, \; i = 0,\ldots,n, \tag{4}$$

$$\sum_{j=i-n+1}^{n} (j-2)\left(V_{i+1-j}U_j - U_{i+1-j}V_j\right) = 0, \; i = n+1,\ldots,2n-2. \tag{5}$$

Таким образом, для произвольного конечного n система уравнений (1) оказывается не полностью замкнутой и содержит при $n>1$ три свободных функциональных параметра.

Для упрощения анализа введем ограничение, полагая $U_n = k = \text{const}$. Это уменьшает на единицу число свободных коэффициентов разложения (3), и упрощает получаемые уравнения. Для удобства записи соотношений введем обозначение: $V_n = w(x,t)$.

Алгебраические уравнения (5) разрешаются относительно переменных $V_i, i = 0,\ldots,n-1$. В результате в предположении $n > 2$ имеем:

$$V_i = \frac{1}{k} w(x,t) U_i(x,t), \; i = 2,\ldots,n-1;$$

$$V_1 = \frac{1}{k} w U_1 + \frac{1}{k(n-1)} w_x, \tag{6}$$

$$V_0 = \frac{1}{k} w U_0 + F(x,t),$$

где

$$F = -\frac{1}{k^2 n(n-1)} \left((n-1) k U_{n-1,t} - (n-1) w U_{n-1,x} - U_{n-1} w_x \right). \tag{7}$$

Совокупность остальных уравнений для $n > 2$ можно записать в следующем виде:

$$(n-1)(kU_{j,t} - wU_{j,x} + k(j+1)FU_{j+1}) - (n-j)U_j w_x = 0, j = 2,\dots,n-2,$$

$$(n-1)\left(kU_{1,t} - wU_{1,x} + 2kFU_2\right) - (n-1)U_1 w_x - w_{xx} = 0, \tag{8}$$

$$(n-1)\left(kU_{0,t} - wU_{0,x} + kFU_1 - kF_x\right) - nU_0 w_x = 0.$$

Эта система, состоящая из $(n-1)$ уравнений, представляет собой систему нелинейных уравнений относительно функций $U_i(x,t), i = 0,\dots,n-2$ и $w(x,t)$. Таким образом, условие совместности двух дифференциальных уравнений (1) относительно функции $T(x,t)$ представляет собой систему нелинейных уравнений (8) вместе с (7), которая аналогична в определенной мере представлению Лакса интегрируемых солитонных уравнений (см. [1, 2]).

Используя (6), представление (1) можно записать теперь в более компактном виде:

$$T_x = P_{n-1}(x,t,T) + kT^n, \tag{9}$$

$$T_t = \frac{1}{k} w P_{n-1}(x,t,T) + F(x,t) + \frac{1}{k(n-1)} w_x T + wT^n, \tag{10}$$

здесь

$$P_{n-1}(x,t,T) = \sum_{j=0}^{n-1} U_j(x,t) T^j. \tag{11}$$

2. Упрощенные варианты системы

Желая получить упрощенные варианты системы, заметим, что формальной линейной заменой переменной $T = T' + f(x,t)$, не меняющей общей формы соотношений (1) и (9), можно добиться обращения в ноль одного из коэффициентов функции $u(x,t,T)$ при степенях T^i. От того, какой из коэффициентов U_i, $i = 0,\dots,n-1$, обращается в ноль, зависит форма уравнений для оставшихся коэффициентов. В реальности имеются только два не сводящихся друг к другу варианта. Это либо $U_{n-1}=0$, либо $U_1=0$. Эти два варианта в случае $n=2$, который рассматривался подробно в [7], совпадают: $U_{n-1}\equiv U_1=0$. Поэтому случай $n=2$ является особым. Далее будет показано, что общий случай $n>2$ может быть сведен к случаю $n=2$ при условии $U_1\neq 0$ и $U_{n-1}\neq 0$. Сейчас же рассмотрим два редуцированных варианта.

В случае $U_{n-1}=0$ обращается в ноль и функция $F(x,t)$. Для такого представления система уравнений (8) упрощается и принимает такую форму:

$$(n-1)\left(kU_{j,t}-wU_{j,x}\right)-(n-j)U_j w_x=0,\ \ j=2,\ldots,n-1,$$

$$(n-1)\left(kU_{1,t}-wU_{1,x}\right)-(n-1)U_1 w_x-w_{xx}=0, \tag{12}$$

$$(n-1)\left(kU_{0,t}-wU_{0,x}\right)-nU_0 w_x=0.$$

В этом случае уравнения для $U_i(x,t)$, $i=0,\ldots,n-2$, независимы друг от друга при заданной функции $w(x,t)$. Заметим также, что этот вариант почти полностью соответствует менее жесткому условию: $F=0$. Это условие эквивалентно уравнению:

$$(n-1)kU_{n-1,t}-(n-1)wU_{n-1,x}-U_{n-1}w_x=0, \tag{13}$$

которое не меняет других соотношений (8). Поэтому именно его и будем использовать далее.

В случае $U_1=0$ уравнения (8) для коэффициентов U_i, $i=2,\ldots,n-1$, остаются неизменными, а два других уравнения для U_0 и F примут такой вид:

$$U_2F=\frac{1}{2k(n-1)}w_{\text{xx}},$$

$$(n-1)\left(kU_{0,t}-wU_{0,x}-kF_x\right)-nU_0 w_x=0. \tag{14}$$

В отличие от случая $U_{n-1}=0,$ в данном варианте все уравнения оказываются зависимыми. В этом варианте, используя (8), можно последовательно исключить из системы все функции U_i, $i=2,\ldots,n-1$. В результате система сведется к системе из двух уравнений для трех функций $w(x,t),F(x,t)$ и $U_0(x,t)$, причем одно из уравнений будет иметь порядок производных n. Такую систему можно записать в следующей форме:

$$F_x=\frac{1}{k}D_0U_0, \tag{15}$$

$$F=\frac{1}{k^{n+2}n!}D_{n-1}\left(\frac{1}{F}D_{n-2}\left(\cdots\frac{1}{F}D_2\right)\right)\frac{w_{xx}}{F}. \tag{16}$$

Здесь введен оператор:

$$D_j = -\left(k\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x} - \frac{n-j}{n-1}w_x\right), j = 0,\ldots,n-1.$$

Соответственно, рекуррентная формула для вычисления коэффициентов U_i, $i = 3,\ldots,n-2$, может быть записана в такой форме:

$$U_{j+1} = \frac{1}{k(j+1)F}D_jU_j,\ \ j = 2,\ldots,n-2;\ U_2 = \frac{1}{2k(n-1)F}w_{xx}. \tag{17}$$

Если в ноль обращается любой коэффициент U_J, $J = 2,\ldots,n-2$, то в результате уравнение для U_J примет следующий вид:

$$U_{J+1}F = 0.$$

Отсюда либо $U_{J+1} = 0$, либо $F = 0$.. В последнем случае приходим к некоторому частному случаю варианта $U_{n-1} = 0$, в котором полагается дополнительно $U_J = 0$. Вариант же $U_{J+1} = 0$ приводит к тому, что все коэффициенты U_j с номерами $j > J$ также обращаются в ноль, что, в конце концов, опять приводит к условию $F = 0$. В результате мы опять приходим к предыдущему варианту с ограничениями. Также заметим, что требование $U_{n-1} = U_1 = 0$ приводит к вырожденному варианту системы.

3. Вариант $F = 0$

Рассматривая вариант $F = 0$, заметим, что система (8) и (13) представляет собой систему линейных уравнений относительно функций $U_i(x,t)$ первого порядка. Эти уравнения можно записать в форме дифференциальных законов сохранения:

$$k\frac{\partial}{\partial t}W_j - \frac{\partial}{\partial x}\left(wW_j\right) = 0,\ \ j = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения:

$$W_j = U_j^{p_j}(x,t), p_j = \frac{n-1}{n-j}, j = 0,2,\ldots,n-1, (n-1)U_1 = \frac{\partial \ln W_1}{\partial x}.$$

Вводя дополнительно функции Φ_j и полагая

$$W_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x},\ \ j = 0,1,2,\ldots,n-1, \tag{19}$$

систему законов сохранения (18) можно привести к системе линейных уравнений переноса:

$$k\frac{\partial}{\partial t}\Phi_j - w\frac{\partial}{\partial x}\Phi_j = 0, j = 0,1,2,\ldots,n-1. \tag{20}$$

Само представление (9) также допускает дифференциальный закон сохранения. Из первого уравнения этой системы можно вычислить полином

$P_{n-1}(x,t,T)$ (11). Подставляя это выражение во второе уравнение, после приведения подобных приходим к следующему уравнению:

$$k(n-1)T_t = (n-1)wT_x + w_x T.$$

Умножая это уравнение на T^{n-2}, приходим к дифференциальному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(kT^{n-1}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(wT^{n-1}\right) = 0. \quad (21)$$

По аналогии с (19), если ввести функцию Φ_n по правилу:

$$T^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}\Phi_n,$$

соотношение (21) также приводится к линейному уравнению первого порядка того же типа, что и первые $(n-1)$ уравнения системы (20):

$$k\frac{\partial}{\partial t}\Phi_n - w\frac{\partial}{\partial x}\Phi_n = 0. \quad (22)$$

Таким образом, условия совместности (1) и (9) сводятся при $n>2$ к системе линейных уравнений первого порядка (20) с произвольной функцией $w(x,t)$. При этом функция T^{n-1} также будет удовлетворять уравнению первого порядка (22).

4. Интегралы на характеристиках

Уравнения (20) и (22) являются вариантами одного и того же квазилинейного уравнения:

$$k\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1 - w\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1 = 0. \quad (23)$$

Общее решение этого уравнения сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений на интегральных траекториях этой системы, которые имеют вид

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = 0, \ \ k\frac{dx}{dt} = -w(x,t). \quad (24)$$

Таким образом, Φ_1 и все остальные функции Φ_i, $i = 0,2,\ldots,n$, являются интегралами уравнения (23). В результате имеем следующие соотношения:

$$\Phi_i = I_i(\Theta), \ \ i = 0,2\ldots,n, \ \ \Phi_1 = \Theta. \quad (25)$$

Здесь для упрощения записи выражений в дальнейшем введено обозначение $\Theta = \Phi_1(x,t)$. Из этого следует, что все коэффициенты полиномов в правой части (1) можно представить в форме функций от Θ и ее производных.

Используя (25), для коэффициентов полиномов (1) и функции T получаем выражения через интегралы движения:

$$U_i = \left(\frac{\partial}{\partial x} I_i(\Theta)\right)^{q_i} = (\Theta_x)^{q_i} (J_i(\Theta))^{q_i}, i = 0, 2..., n-1,$$

$$U_1 = \frac{1}{n-1} (\Theta_x)^{-1} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \tag{26}$$

$$T = \left(\frac{\partial}{\partial x} I_n(\Theta)\right)^{\frac{1}{n-1}} = (\Theta_x)^{\frac{1}{n-1}} (J_n(\Theta))^{\frac{1}{n-1}},$$

где введены обозначения:

$$q_i = \frac{n-i}{n-1},\ \ J_i = I_i'(\Theta),\ \ i = 0, 2, \ldots, n-1;\ \ J_n = I_n'(\Theta). \tag{27}$$

Используя теперь обозначения (27), вычислим вид функции P_{n-1}, входящей в систему (9). Имеем:

$$P_{n-1} = U_0 + U_1 T + \sum_{k=2}^{n-1} U_i T^i =$$

$$= (\Theta_x)^{\frac{n}{n-1}} (J_0)^{\frac{n}{n-1}} + \frac{1}{n-1} (\Theta_x)^{\frac{2-n}{n-1}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} (J_n)^{\frac{1}{n-1}} + (\Theta_x)^{\frac{n}{n-1}} \sum_{j=2}^{n-1} (J_j)^{\frac{n-j}{n-1}} (J_n)^{\frac{j}{n-1}} =$$

$$= (\Theta_x)^{\frac{n}{n-1}} (J_n)^{\frac{1}{n-1}} \left(G_{n-1}(\Theta) + \frac{1}{n-1} (\Theta_x)^{-2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right), \tag{28}$$

здесь

$$G_{n-1} = (J_n)^{-\frac{1}{n-1}} \left((J_0(\Theta))^{\frac{n}{n-1}} + \sum_{j=1}^{n-1} (J_j(\Theta))^{\frac{n-j}{n-1}} (J_n(\Theta))^{\frac{j}{n-1}} \right) =$$

$$= J_n(\Theta) \left[\left(\frac{J_0}{J_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{J_j}{J_n}\right)^{\frac{n-j}{n-1}} \right]. \tag{29}$$

Вычислим теперь функцию T_x, используя (9):

$$T_x = \frac{1}{n-1} (J_n)^{\frac{1}{n-1}} (\Theta_x)^{\frac{2-n}{n-1}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{n-1} (\Theta_x)^{\frac{n}{n-1}} J_n' (J_n)^{\frac{2-n}{n-1}}.$$

Подставляя теперь полученные соотношения в (9), находим, что это соотношение эквивалентно следующему соотношению:

$$\frac{1}{n-1}J_n' J_n^{-2} = \left(\frac{J_0}{J_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \sum_{j=2}^{n-1}\left(\frac{J_j}{J_n}\right)^{\frac{n-j}{n-1}} + k. \tag{30}$$

Из этого соотношения следует, что выражение для P_{n-1} можно записать так:

$$P_{n-1} = \frac{1}{n-1}(\Theta_x)^{\frac{n}{n-1}}(J_n(\Theta))^{\frac{1}{n-1}} \times$$

$$\times\left(J_n'(\Theta)J_n^{-1}(\Theta) - k(n-1)J_n(\Theta) + (\Theta_x)^{-2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}\right). \tag{31}$$

Таким образом, условие совместности системы (1) сводится к системе уравнений на траектории (24) и условию (30), связывающему интегралы движения системы (24) между собой.

5. Квадратичное представление совместных базовых соотношений

В работе [7] было показано, что базовые соотношения (1) при $n = 2$ приводятся к представлению Лакса ряда нелинейных уравнений, часть из которых интегрируется полностью, а часть лишь частично. Покажем, что представление Лакса может быть получено для всех конечных $n \geq 2$. Этот факт будет получен с помощью формального приведения системы (1) для любого конечного $n \geq 2$ к виду, аналогичному $n = 2$.

Для того чтобы привести (9) к квадратичному виду (т.е. виду, аналогичному $n = 2$), умножим уравнения этой системы на T^{n-2}. В результате эта система может быть записана в такой форме:

$$T_x = R + UT + KT^2, \tag{32}$$

$$T_t = P + \frac{1}{K}(WU + W_x)T + WT^2, \tag{33}$$

здесь введены обозначения:

$$T = T^{n-1},\ R = (n-1)T^{n-2}P_{n-1;1}(x,t,T),\ K = k(n-1),\ U = (n-1)U_1; \tag{34}$$

$$P = \frac{1}{K}WR + T^{n-2}F(x,t)(n-1),\ W = (n-1)w(x,t), \tag{35}$$

$$P_{n-1;1} = U_0 + \sum_{j=2}^{n-1}U_iT^i = \frac{1}{n-1}(\Theta_x)^{\frac{n}{n-1}}(J_n(\Theta))^{\frac{n}{n-1}}\left(J_n'(\Theta)J_n^{-2}(\Theta) - K\right). \tag{36}$$

В запись функций R и P входят функции U_i, а также и сама функция T. Если $U_i(x,t)$ удовлетворяют вместе с $w(x,t)$ системе условий совместности (8), а функция T является общим решением (1), система (32) совместна, а соответствующие функции T, R, P, U, W вычисляются по формулам

(34). Обратное утверждение, состоящее в том, что если T, R, U, W и P являются решением уравнений совместности (32), то исходя из этих решений можно вычислить и решения $T = T^{1/(n-1)}$ исходной системы базовых соотношений (1), является неверным. Это следует из того, что функций T, R, U, W и P недостаточно, чтобы вычислить все коэффициенты U_i при $n > 2$.

6. Условия совместности в новых обозначениях

Условием совместности системы (31)–(32) являются два уравнения:

$$R_t - P_x + PU - \frac{1}{K} R\left(UW + W_x\right) = 0, \tag{37}$$

$$U_t + 2kP - 2WR - \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(UW + W_x\right) = 0. \tag{38}$$

Из второго уравнения находим P:

$$P = \frac{1}{2K}\left[2WR + \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(UW + W_x\right) - U_t\right]. \tag{39}$$

Подставляя это соотношение в первое уравнение системы (37), приходим к уравнению совместности, содержащему три неизвестные функции:

$$R_t - \frac{1}{2K}\left(\frac{\partial}{\partial x} - U\right)\left[2WR + \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(UW + W_x\right) - U_t\right] - \frac{1}{K}\left(UW + W_x\right) = 0. \tag{40}$$

В случае $U = (n-1)U_1 = 0$ приходим к более простому уравнению:

$$W_{xxx} + 4KRW_x + 2KWR_x - 2K^2 R_t = 0, \tag{41}$$

которое рассматривалось в [7].

Отметим следующее обстоятельство, которое указывает на некоторые скрытые связи между коэффициентами. Сравнивая (39) и (34), для P приходим к следующему соотношению:

$$T^{n-2} F(x,t)(n-1) = \frac{1}{2K}\left[\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(UW + W_x\right) - U_t\right],$$

или

$$-\frac{T^{n-2}}{k^2 n}\left((n-1)kU_{n-1,t} - (n-1)wU_{n-1,x} - U_{n-1}w_x\right) = \frac{1}{2K}\left[\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}\left(UW + W_x\right) - U_t\right].$$

В случае $U_1 = U_{n-1} = 0$ сразу находим $W_{xx} = 0$. Последнее приводит условия совместности к системе тривиальных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

В случае $F = 0$ T, R, P, U, W являются функциями интеграла Θ и его производных:

$$R = (\Theta_x)^2\left(J_n'(\Theta) - KJ_n^2(\Theta)\right), \tag{42}$$

$$U=(\Theta_x)^{-1}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}=\frac{\partial\ln\Theta_x}{\partial x},\;\; W=K\frac{\Theta_t}{\Theta_x}. \tag{43}$$

Отсюда следует, что при любом выборе $\Theta(x,t)$ и интегралов $J_i(\Theta)$, удовлетворяющих (30), система уравнений

$$R_t-\frac{1}{K}\left(\frac{\partial}{\partial x}-U\right)(WR)-\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}(UW+W_x)=0, \tag{44}$$

$$U_t-\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial x}(UW+W_x)=0 \tag{45}$$

обращается в тождество.

Последнее тождество проверяется прямой подстановкой выражений для U и W из (42).

7. Цепочка уравнений Бюргерса

Поскольку функция Θ является произвольной, то на нее можно накладывать дополнительные ограничения, которые при подстановке во второе уравнение системы (44) приводят к некоторым интегрируемым уравнениям, если интегрируемым является уравнение для Θ. Такой подход является определенной модификацией метода функциональных подстановок [5, 6]. В частности, дополнительное соотношение

$$W=\gamma U \tag{46}$$

(γ – постоянная) эквивалентно линейному уравнению теплопроводности:

$$K\Theta_t=\gamma\Theta_{xx}.$$

При этом второе тождество в (44) превращается в уравнение Бюргерса:

$$KU_t-2\gamma UU_x-\gamma U_{xx}=0.$$

При этом связь

$$U=\frac{\partial\ln\Theta_x}{\partial x}$$

представляет собой известную подстановку Коула – Хопфа.

Рассмотрим теперь дополнительное соотношение следующего вида:

$$W=\gamma U+\beta\Theta+\alpha, \tag{47}$$

где γ, α, β – постоянные. Это уравнение эквивалентно уравнению Бюргерса для функции Θ:

$$K\Theta_t=\gamma\Theta_{\text{xx}}+\beta\Theta\Theta_x+\alpha\Theta_x.$$

Это уравнение интегрируется также с помощью подстановки Коула – Хопфа:

$$\Theta=2\frac{\gamma}{\beta}\frac{\partial\ln\zeta}{\partial x},$$

которая сводит его к линейному уравнению теплопроводности:

$$K\zeta_t = \gamma\zeta_{xx} + \alpha\zeta_x.$$

Подстановка же (47) в (44) приводит к следующему уравнению:

$$U_t - 2\gamma UU_x - \gamma U_{xx} - \beta\frac{\partial}{\partial x}(\Theta U) - \alpha U_x - \beta\Theta_x = 0. \tag{48}$$

Обращая зависимость U от Θ, находим:

$$\Theta_x = C_1 e^{\int_0^{x'} U(x'',t)dx''}, \quad \Theta = C_1\int_0^x e^{\int_0^{x'} U(x'',t)dx''} dx' + C_2.$$

Таким образом, получаем уравнение Бюргерса со сложным нелинейным источником.

Дополнительное соотношение

$$W = \gamma U + \beta\Theta_x + \alpha, \tag{49}$$

где γ, α, β – постоянные, сводится к уравнению

$$K\Theta_t = \gamma\Theta_{xx} + \beta(\Theta_x)^2 + \alpha. \tag{50}$$

После дифференцирования по x и замены $\Theta_x = \chi(x,t)$ это уравнение превращается в уравнение Бюргерса:

$$K\chi_t = \gamma\chi_{xx} + 2\beta\chi\chi_x.$$

Подстановка же соотношения (49) в уравнение (44) и последующее дифференцирование этого уравнения по x приводят к следующему уравнению:

$$KU_t - 2\gamma UU_x - \gamma U_{xx} - \alpha U_x - \beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^v = 0, \;\; v_x = U. \tag{51}$$

Это уравнение можно назвать уравнением Бюргерса с нелинейным источником. Поскольку уравнение Бюргерса интегрируется, то и это уравнение также интегрируется.

Уравнение (51) можно также использовать в качестве условия связи между W и U, делая замену $U \to \Theta$. В результате получим новое нелинейное уравнение. Действительно, представим уравнение (51) в следующем виде:

$$K\frac{U_t}{U_x} = 2\gamma U + \gamma\frac{U_{xx}}{U_x} + \alpha + \frac{\beta}{U_x}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^v = 0.$$

Учитывая соотношение

$$e^v = \Theta_x,$$

получаем уравнение в следующей форме:

$$K\frac{U_t}{U_x}=2\gamma U+\gamma\frac{U_{\mathrm{xx}}}{U_x}+\alpha+\beta\frac{\Theta_x\left(U_x+U^2\right)}{U_x}=0.$$

После формальной замены $U\to\Theta$ это соотношение можно рассматривать как новую интегрируемую связь W и U:

$$W=2\gamma\Theta+\gamma U+\alpha+\beta\frac{e^V\left(\Theta_x+\Theta^2\right)}{\Theta_x}, \tag{52}$$

где

$$V=\int\limits_0^x\Theta\left(x',t\right)dx'.$$

Подставляя это соотношение в (44), получаем новое интегрируемое уравнение Бюргерса с нелинейным источником:

$$KU_t-2\gamma UU_x-\gamma U_{xx}-\alpha U_x-\frac{\partial}{\partial x}J_3\left(\Theta,\Theta_x,\Theta_{xx}\right)=0, \tag{53}$$

где

$$J_3=\left(2\gamma\Theta+\beta F\left(V,\Theta,\Theta_x\right)\right)U+2\gamma\Theta_x+\beta\frac{\partial}{\partial x}F\left(V,\Theta,\Theta_x\right),\ \ F=\frac{e^V\left(\Theta_x+\Theta^2\right)}{\Theta_x}.$$

Этот процесс можно продолжать до бесконечности, получая уравнения Бюргерса со все более сложным нелинейным источником. По аналогии с уравнением (48), (51) и другие уравнения цепочки можно записать так:

$$KU_t-2\gamma UU_x-\gamma U_{xx}-\alpha U_x-J_j\left(\Theta,\Theta_x,\Theta_{xx},\ldots\right)=0,\ \ j=0,1,\ldots,\infty,$$

где

$$J_0=0,\ \ J_1=\beta\left(\Theta U+\Theta_x\right),\ \ J_2=2\beta\Theta_{\mathrm{xx}},\ldots$$

Следует отметить, что схема использования тождества (44) для вычисления новых интегрируемых нелинейных уравнений по сути эквивалентна определенной модификации метода функциональных подстановок, рассмотренной в работах [5, 6]. Поэтому она применима и для построения уравнений, отличных от уравнений Бюргерса с различными типами нелинейности. Например, рассматривая связь между U и W следующего вида:

$$\mathrm{UW}+W_x+\alpha W+\beta=0, \tag{54}$$

получаем нелинейное интегрируемое уравнение телеграфного типа:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ln W+\beta\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{W}-\alpha W_x=0. \tag{55}$$

После подстановки U и W из (42) это уравнение оказывается линейным относительно функции Θ:

$$K\Theta_{\text{xt}} + \alpha K\Theta_t + \beta\Theta_x = 0. \quad (56)$$

Это уравнение представляет собой линейное телеграфное уравнение. Выражая из (54) U, получаем:

$$U = -\frac{W_x}{W} - \alpha - \frac{\beta}{W}.$$

Подставляя это уравнение во второе тождество (44), приходим к нелинейному уравнению (55). Это уравнение было получено в другой эквивалентной записи в работе [5].

8. Квадратичные дифференциальные соотношения и представление Лакса

Другим аспектом подхода, основанного на вычислении условий совместности (1), является возможность перейти в его рамках к представлению Лакса для ряда уравнений в размерности (1 + 1). Такой подход был описан в работе [7]. Воспроизведем его здесь в несколько более расширенной версии.

По аналогии с работой [7] заметим, что первое уравнение (32) представляет собой уравнение Риккати, которое линеаризуется с помощью подстановки:

$$T = -\frac{1}{K}\frac{\partial \ln\Psi(x,t)}{\partial x}. \quad (57)$$

В результате для функции $\Psi(x,t)$ имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - U\frac{\partial\Psi}{\partial x} + KR\Psi = 0. \quad (58)$$

Преобразуем теперь второе уравнение (32) с помощью формальной замены:

$$R = T_x - UT - KT^2. \quad (59)$$

В результате находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}T - \frac{1}{2K^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(2KWT + WU + W_x - KU_t\right) = 0. \quad (60)$$

Используя подстановку (57), получаем дифференциальный закон сохранения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \ln\Psi}{\partial t} - \frac{W}{K}\frac{\partial \ln\Psi}{\partial x} + \frac{1}{2K}\left(UW + W_x\right)\right] - KU_t = 0.$$

Вводя дополнительно функцию S по правилу

$$U = \frac{\partial}{\partial x}S,$$

приходим к еще одному линейному уравнению для Ψ:

$$\Psi_t - \frac{W}{K}\Psi_x + \frac{1}{2K}\left(S_x W + W_x - KS_t\right)\Psi = \Lambda(t)\Psi, \tag{61}$$

где $\Lambda(t)$ – произвольная дифференцируемая функция t.

Поскольку уравнения (58) и (61) являются линейными относительно функции Ψ, им соответствуют линейные операторы:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial}{\partial x} + KR, \tag{62}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2K}\left(2W\frac{\partial}{\partial x} - S_x W - W_x + KS_t\right) - \Lambda(t). \tag{63}$$

Прямыми вычислениями устанавливаем, что условие коммутативности по модулю оператора L этих операторов:

$$L, A = -2\frac{W_x}{K}L, \tag{64}$$

эквивалентно уравнению (40).

Заметим, что уравнения (58) и (61) могут с помощью формальной замены могут быть приведены к более простому виду. Вводя функцию Φ по правилу

$$\Psi = e^{S(x,t)/2}\Phi(x,t),$$

эти уравнения приводим к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mathrm{KR}_U \Phi = 0, \tag{65}$$

$$\Psi_t - \frac{W}{K}\Psi_x + \frac{1}{2K}W_x \Phi = \Lambda(t)\Phi, \tag{66}$$

где

$$R_U = R + \frac{1}{2}U_x - \frac{1}{4}U^2.$$

Операторы представления Лакса, действующие на функции Φ, теперь выглядят так:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + KR_U, \tag{67}$$

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2K}\left(2W\frac{\partial}{\partial x} - W_x\right) - \Lambda(t). \tag{68}$$

Условие коммутативности этих операторов остается прежним (64), а уравнение совместности принимает следующий вид:

$$W_{xxx} + 4KR_U W_x + 2KWR_{U,x} - 2K^2 R_{U,t} = 0. \tag{69}$$

Поэтому построение решений уравнений, которые следуют из (40) после разложения функций по спектральному параметру, можно получать непосредственно из представления (67), а сами уравнения – из (69). Процедура разложения по спектральному параметру описана в [7].

Заключение

В работе продемонстрировано, что общим источником методов получения интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных в размерности (1 + 1), основанных как на подстановках, так и на представлении Лакса, может служить схема вычисления условий совместности (1) с полиномиальными функциями (3) в правой части. В работе вычислены и проанализированы такие условия совместности. Показано, что условия совместности сводятся к уравнениям на коэффициенты полиномов, число которых меньше, чем число неизвестных функций. Этот произвол позволяет накладывать на коэффициенты полиномов дополнительные условия, что дает новые нелинейные связи между ними в форме нелинейных тождеств. Эти тождества можно в некоторых случаях рассматривать как нелинейные интегрируемые уравнения. В работе приведены примеры таких уравнений. Важным является то, что описанный в работе подход оказывается достаточно универсальным в том смысле, что с его помощью можно вычислять и интегрируемые уравнения типа Бюргерса и уравнения, интегрируемые с помощью метода обратной задачи, имеющие представление Лакса. В работе не были проанализированы все следствия, вытекающие из тождеств (44). Такой анализ требует отдельного рассмотрения и сравнения с методом функциональных подстановок.

Список литературы

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М. : Наука, 1980.
2. Lamb G. R. Becklund transformations at the turn of century // Lecture Notes in Mathematics / ed. by R. M. Miura. Springer, 1976. 515 p.
3. Лэм Дж. Л. Ведение в теорию солитонов. М. : Мир, 1983.
4. Солитоны / под ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М. : Москва, 1983.
5. Журавлев В. М. Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 1. С. 58–71.
6. Журавлев В. М. Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок : монография. Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2019. 181 с.
7. Журавлев В. М., Морозов В. М. Представление Лакса с операторами первого порядка для новых нелинейных уравнений типа Кортевега – де Вриза // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 178–191.
8. Журавлев В. М., Морозов В. М. Нелинейные функциональные подстановки и преобразования для нелинейных диффузионных и волновых уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. № 2. С 81–98.

References

1. Zakharov V.E., Manakov S.V., Novikov S.P., Pitaevskiy L P. *Teoriya solitonov: metod obratnoy zadachi = Soliton theory: inverse problem method*. Moscow: Nauka, 1980. (In Russ.)

2. Lamb G.R. Becklund transformations at the turn of century. *Lecture Notes in Mathematics*. Ed. by R.M. Miura. Springer, 1976:515.
3. Lem Dzh.L. *Vedenie v teoriyu solitonov = Introduction to the theory of solitons.* Moscow: Mir, 1983. (In Russ.)
4. Bullaf R., Kodri F. (eds.). *Solitony = Solitons.* Moscow: Moskva, 1983. (In Russ.)
5. Zhuravlev V.M. Generalized Cole–Hopf substitution method and new examples of linearizable nonlinear evolution equations. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2009;158(1):58–71. (In Russ.)
6. Zhuravlev V.M. *Nelineynye integriruemye modeli fizicheskikh protsessov. Metod funktsional'nykh podstanovok: monografiya = Nonlinear integrable models of physical processes. Functional substitution method: monograph*. Ul'yanovsk: Izd-vo UlGU, 2019:181. (In Russ.)
7. Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Lax representation with first-order operators for new nonlinear Korteweg – de Vries type equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = Universoty proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):178–191. (In Russ.)
8. Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Nonlinear functional substitutions and trasformations for nonlinear diffusion and wave equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = Universoty proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022;2:81–98. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34); профессор кафедры теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia); professor of the sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

Виталий Михайлович Морозов
младший научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34)

E-mail: aieler@rambler.ru

Vitaliy M. Morozov
Junior researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 31.03.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.04.2023

Принята к публикации / Accepted 19.05.2023