УДК 524.33-563, 52-33, 52-563, 53.01
doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-9

Масса и параметры вращения звезд в условиях динамического равновесия

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Ульяновск, Россия

zhvictorm@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели*. Предложена расширенная модель динамического равновесия звезд, учитывающая неоднородный химический состав вещества, а также дополнительных факторов, связанных с осцилляциями теплового потока и скрытой массы («темной материи»). *Материалы и методы*. Для вывода и анализа уравнений динамического равновесия звезд используется метод гидродинамических маркеров или лагранжевых переменных, дополненный новым описанием классического поля тяготения с помощью маркерных полей, а также новыми параметрами, характеризующими эффект скрытой массы или темной материи. Для описания тепловых свойств среды используется предположение о квазиадиабатичности процессов в звездах. *Результаты*. Проанализированы уравнения распределения температуры, учитывающие неоднородный химический состав и их численные решения на примере модели Солнца. Вычислены решения, соответствующие распределению скорости зонального потока для параметров Солнца, и проведен анализ этих решений. Выявлены общие критерии устойчивости зонального потока. Из условия устойчивости получены оценки эффекта типа скрытой массы, который проявляется только в структуре зонального потока. Выведены соотношения для ускорения свободного падения, учитывающие указанные дополнительные факторы, например массивность частиц среды. Получены обобщенные уравнения динамического равновесия среды. *Выводы*. Предложенная модель объясняет на качественном уровне основные характеристики распределения температуры в Солнце и ее короне, включая максимум температуры порядка $2 \cdot 10^6$ К при минимуме в фотосфере примерно 4800 К. Модель указывает на существенную роль новых параметров поля тяготения и теплового потока в формировании распределения зонального потока (вращения) звезд.

Ключевые слова: динамическое равновесие, строение звезд, нелинейные осцилляции, дифференциальное вращение, распределение температуры в Солнце и ее короне, темная материя

Финансирование: работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2024-060/1 от 13.02.2024 к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2024-060 от 18.01.2024, заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Для цитирования: Журавлев В. М. Масса и параметры вращения звезд в условия динамического равновесия // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 107–145. doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-9

Mass and rotation parameters of stars under conditions of dynamic equilibrium

© Журавлев В. М., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia
zhvictorm@gmail.com

Abstract. *Background.* The research proposes an extended model of the dynamic equilibrium of stars, taking into account the inhomogeneous chemical composition of matter, as well as additional factors associated with oscillations of heat flow and hidden mass ("dark matter"). *Materials and methods.* To derive and analyze the equations of dynamic equilibrium of stars, the method of hydrodynamic markers or Lagrangian variables is used, supplemented by a new description of the classical gravitational field using marker fields, as well as new parameters characterizing the effect of hidden mass or dark matter. To describe the thermal properties of the medium, the assumption of quasi-a-diabatic processes in stars is used. *Results.* Temperature distribution equations that take into account the inhomogeneous chemical composition and their numerical solutions are analyzed using the model of the Sun as an example. Solutions corresponding to the distribution of zonal flow velocity for solar parameters have been calculated, and an analysis of these solutions has been carried out. General criteria for the stability of the zonal flow are obtained. From the stability condition, estimates of the latent mass type effect, which manifests itself only in the structure of the zonal flow, are obtained. Relations for the acceleration of free fall are derived, taking into account the indicated additional factors, for example, the massiveness of the particles of the medium. Generalized equations of dynamic equilibrium of the medium are obtained. *Conclusions.* The proposed model explains at a qualitative level the main characteristics of the temperature distribution in the Sun and its corona, including a temperature maximum of the order of $2 \cdot 10^6$ [K] with a minimum in the photosphere of approximately 4800 [K]. The model indicates the significant role of new parameters of the gravitational field and heat flow in the formation of the distribution of the zonal flow (rotation) of stars.

Keywords: dynamic equilibrium, stellar structure, nonlinear oscillations, differential rotation, temperature distribution in the Sun and its corona, dark matter

Financing: the work was carried out within the framework of Additional Agreement No. 073-03-2024-060/1 from February 13, 2024 to the Agreement on the provision of a subsidy from the federal budget for financial support for the implementation of the state assignment for the provision of public services (performance of work) No. 073-03-2024-060 from January 18, 2024, concluded between Ulyanovsk tate Pedagogical University named after I.N. Ulyanov and the Ministry of Education of the Russian Federation.

For citation: Zhuravlev V.M. Mass and rotation parameters of stars under conditions of dynamic equilibrium. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(3):107–145. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-3-9

Введение

В работе [1] была представлена модель динамического равновесия астрофизических объектов с ее приложением к описанию нелинейных осцилляций звезд, в том числе к построению модели осцилляций Солнца. В работе [2] эта модель была дополнена и уточнена включением в нее химически неоднородной среды и дополнительными факторами осцилляции теплового потока и поля тяготения. Основой модели служат два исходных положения, являющиеся следствием переноса некоторых общих идей из новой теории пространства и материи [3–8] на модели строения и эволюции звезд в рамках классической теории тяготения. Первое положение связано со специальным разделением напряженности поля тяготения на две составляющие. Одна со-

ставляющая определяется маркерами или лагранжевыми переменными среды, а вторая представляет собой векторное поле, компенсирующее вихревую компоненту первой составляющей. Наиболее важным достижением представленной модели является вывод о том, что в условиях динамического равновесия в устойчивом состоянии звезды совершают пульсации, период и амплитуда которых зависят от начальной энергии, полученной в момент перехода к динамическому равновесию. Построенная модель позволила подобрать свободные параметры модели, связанные с эффективным показателем адиабаты и параметром зонального потока таким образом, что период осцилляций Солнца оказался равен примерно 11 годам, а минимум температуры в фотосфере при этом оказался равным примерно 4500 К. Тем не менее, как показано в данной работе, этот результат не может дать прямое объяснение 11-летнему циклу солнечной активности, поскольку приводит к неверным выводам относительно распределения массы Солнца в пространстве. В силу этого развитая модель требует изменений в выводе некоторых базовых соотношений, что и является основной целью данной работы.

С точки зрения пространственного распределения плотности вещества модель динамического равновесия позволяет описать непрерывные изменения плотности внутри звезды и ее окрестности, не прибегая к необходимости требовать обращения ее в ноль на поверхности звезды. Последнее требование является стандартным условием для определения радиуса звезды в большинстве моделей их статического равновесия [9–11], начиная от моделей звездных политроп Лейна – Эмдена (LEM) [12, 13]. Из наблюдательных данных для Солнца радиус звезды определяется как радиальное расстояние от центра звезды до первого минимума температуры. Этот минимум, располагающийся в фотосфере Солнца, имеет температуру порядка 4800 К. В соответствии с этим модель динамического равновесия в точности повторяет определение радиуса звезды как минимума температуры в фотосфере, который является неотъемлемым атрибутом этой модели. Кроме этого, модель описывает пространственные затухающие в асимптотике осцилляции температуры вблизи некоторой фиксированной ее величины, связанной с новым по отношению к статическим моделям звезд параметром динамического равновесия. Пространственные осцилляции температуры означают, что за минимумом в фотосфере обязательно следует ее максимум, который, по крайней мере на качественном уровне, объясняет наблюдаемый в короне Солнца максимум температуры порядка $2 \cdot 10^6$ К. Наличие такого максимума модели статического равновесия не объясняют.

Вместе с тем, как указывалось в [1, 2], исходная модель имеет три проблемы. Первая из них была связана с обращением локальной угловой скорости зонального потока на оси вращения в бесконечность. Вторая проблема состояла в том, что на больших расстояниях от звезды в условиях динамического равновесия средняя плотность среды асимптотически стремится к некоторой постоянной величине, которая связана с периодом осцилляции звезды. Чем меньше средняя асимптотическая плотность среды, тем больше период осцилляций. Поэтому при разумных периодах осцилляций асимптотическая плотность среды оказывается намного больше средней плотности межзвездного газа и пыли. Эта проблема связана с тем, что динамическое

равновесие достигается в пределе, когда плотность среды на больших расстояниях от звезды будет равна асимптотической модельной плотности. Такое динамическое равновесие можно назвать **абсолютным**, но не статическим, поскольку при этом звезда будет совершать радиально-зональные осцилляции вблизи положения равновесия. Поэтому в реальности звезды, в том числе и Солнце, с точки зрения рассматриваемой модели находятся в постоянном переходном режиме к абсолютному динамическому равновесию. Наблюдаемый звездный ветер, в том числе солнечный, как раз и является элементом перехода звезд к абсолютному равновесию.

Первая проблема была решена в работе [2] с помощью более точного описания компонентов теплового потока в звездах, которое дополнительно расширило возможности описания пульсаций светимости звезд, находящихся в динамическом равновесии. Для решения второй и третьей проблем необходима существенная модификация модели динамического равновесия за пределами максимума температуры в короне Солнца, что требует отдельного объемного анализа и поэтому будет обсуждаться в данной работе лишь в общих чертах. Первой основной задачей данной работы будет вывод формулы для массы звезд и ее связи с периодом их осцилляций, что дает дополнительную информацию для построения модели динамического равновесия, включающую солнечный ветер. Второй основной задачей работы является более точное описание зонального потока, учитывающее дополнительные параметры гравитационного поля, введенные в работе [2].

1. Уравнения динамики среды в представлении маркеров

Система уравнений, описывающая осцилляции звезд в режиме динамического равновесия, которая рассматривалась в работах [1, 2, 14], имеет стандартный вид:

$$u_t + uu_r + wu_z - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} p_r - \phi_r,$$

$$w_t + uw_r + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z - \phi_z, \tag{1}$$

$$v_t + uv_r + wv_z + \frac{uv}{r} = 0,$$

$$\rho_t + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\phi_r) + \frac{\partial}{\partial z}\phi_z = 4\pi G\rho, \tag{3}$$

$$p = p(\rho, s), \tag{4}$$

здесь $u(r,z,t)$, $v(r,z,t)$, $w(r,z,t)$ – компоненты вектора скорости $\boldsymbol{v} = (u,v,w)$ в цилиндрической системе координат r, z, φ. При построении модели предполагается наличие цилиндрической симметрии, т.е. отсутствие зависимости параметров среды от азимутального угла φ; $p(r,z,t)$ – давление газа;

$\rho(r,z,t)$ – плотность массы; $\phi(r,z,t)$ – потенциал поля тяготения; G – постоянная тяготения Ньютона; t – время. Уравнение (4) является уравнением состояния газа, где $s(r,z,t)$ – локальная энтропия газа. Наличие компоненты скорости $v(r,z,t)$ потока в зональном направлении эквивалентно дифференциальному вращению структуры вокруг вертикальной оси z.

Решение этих уравнений находится с помощью метода маркеров (лагранжевых переменных). Как показано в [1, 2, 14], плотность среды может быть представлена через маркеры в случае цилиндрической симметрии задачи следующим образом:

$$\rho = M(\boldsymbol{e})N(r,z,t), \quad N = r^{-1}|J|, \tag{5}$$

где $M(\boldsymbol{e})$ – функция маркеров $\boldsymbol{e} = \left(e^1, e^2\right)$, имеющая размерность массы и смысл средней массивности маркеров; $N = N(r,z,t)$ – концентрация маркеров, в определение которой входит Якобиан[1]. Тождество[2] в цилиндрической системе координат при условии цилиндрической симметрии можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(w\rho) = 0, \tag{6}$$

где ρ определяется соотношением (5). Это тождество при произвольной дифференцируемой функции $M\left(e^1, e^2\right)$ представляет собой классическое уравнение неразрывности или дифференциальный закон сохранения массы.

Для зональной составляющей гидродинамического потока v из третьего уравнения системы (1), если его записать в такой форме:

$$\frac{d}{dt}(rv) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)(rv) = 0, \tag{7}$$

следует, что функция $L = rv(r,z,t)$ является произвольной дифференцируемой функцией маркеров. В результате имеем

$$v = L\left(e^1, e^2\right)/r. \tag{8}$$

Еще одним важным элементом метода маркеров, который был использован в [1, 2, 14], является представление напряженности поля тяготения $\boldsymbol{g} = \left(g^1, g^2\right)$ в следующей форме (см. приложение):

$$g^1 = -\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\Gamma_0 \Xi r^{-1}|J|K^1 - \frac{\Gamma_0}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad g^2 = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\Gamma_0 \Xi r^{-1}|J|K^2 + \frac{\Gamma_0}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \tag{9}$$

где введены обозначения:

[1] Приведен в приложении, уравнение (87).

[2] См. тождество (88) в приложении.

$$\Gamma_0 = 2\pi G M_0,$$

а также

$$K^{\alpha} = \sum_{b=1}^{2} e^b \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial e^b}, \ \alpha = 1,2. \tag{10}$$

Функции $\Xi(\boldsymbol{e},t)$ и $\Psi(r,z,t)$ – некоторые дифференцируемые функции. Множитель M_0 является постоянной с размерностью массы. Поле $\boldsymbol{g}_{\Psi}$ с компонентами

$$g_{\Psi}^{1} = -\frac{\Gamma_0}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \ g_{\Psi}^{1} = \frac{\Gamma_0}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

компенсирует вихревую составляющую первой компоненты поля $\boldsymbol{g}_{\Xi}$:

$$\boldsymbol{g}_{\Xi} = \Xi \boldsymbol{g}_K, \ \boldsymbol{g}_K = -\Gamma_0 r^{-1} |J| \boldsymbol{K}. \tag{11}$$

Как показано в [2] (см. приложение), поле g удовлетворяет обобщенному уравнению Пуассона:

$$\operatorname{div} g = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r g^1\right) + \frac{\partial}{\partial z} g^2 = -4\pi G D \rho, \tag{12}$$

где

$$D = \frac{\Xi M_0}{2M}\left(2 + e^1 \frac{\partial \ln(\Xi)}{\partial e^1} + e^2 \frac{\partial \ln(\Xi)}{\partial e^2}\right) =$$

$$= \frac{\Xi M_0}{2M}\left(2 + K^1 \frac{\partial \ln(\Xi)}{\partial r} + K^2 \frac{\partial \ln(\Xi)}{\partial z}\right). \tag{13}$$

В случае, если $M(\boldsymbol{e}) = 1$ и $\Xi = 1$, уравнение (12) переходит в классическое уравнение Пуассона с $D = 1$. В общем случае множитель D описывает появление в системе эффекта скрытой массы в форме эффективной плотности среды:

$$\rho_{eff} = D\rho$$

или «пятой силы» в форме эффективной «постоянной» тяготения $G_{eff} = GD$. Для того чтобы в (12) появился эффект темной материи при $\Xi = 1$, необходимо, чтобы значение массивности частиц среды отличалось от постоянной величины. Далее будет показано, что в случае среды, содержащей несколько химических элементов, например водород и гелий, функция массивности будет определяться распределением этих химических элементов в пространстве. Появление функции Ξ является обобщением, которое является следствием необходимости введения такой функции при описании кривой вращения пылевых дисковых структур [15]. Роль этой функции будет определена далее.

2. Тепловой режим звезд

Как и в [1, 2], в рамках рассматриваемой модели предполагается, что среда является идеальным газом. Тепловые процессы, сопровождающие эволюцию звезды, считаются квазиадиабатическими, при которых энтропия удовлетворяет (см. [1, 2]) уравнению переноса следующего вида:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial r}+w\frac{\partial s}{\partial z}=c_v\frac{d}{dt}\ln\sigma(t),$$

где c_v – молярная теплоемкость при постоянном объеме; $\sigma(t)$ – функция, характеризующая изменение энтропии за счет общего теплового потока с поверхности звезды. Решением этого уравнения является функция:

$$s=c_v\ln\left(\sigma(t)S(e)\right), \tag{14}$$

где $S(\xi,\zeta)$ – некоторая функция маркеров, называемая коэффициентом энтропии. В результате давление и температура в среде с учетом теплового потока описываются уравнениями:

$$p=\frac{A\sigma(t)}{\mu_g}S(e)\rho^{\gamma},\quad T=\sigma(t)S(e)\rho^{\gamma-1}, \tag{15}$$

где γ – показатель адиабаты; A – универсальная газовая постоянная; μ_g – молярная масса газа.

В отличие от [1], но в соответствии [2], будем предполагать, что вещество звезды может состоять из частиц различного сорта. В классической теории звезд наличие частиц различных типов учитывается в первую очередь зависимостью молярной массы полностью ионизированного газа от массовых долей частиц с различными значениями атомного веса и заряда ядра [9, 10]. Электронейтральная полностью ионизированная плазма (газ) содержит ядра химических элементов, заряженные положительно, которые составляют основную массу вещества, и электроны, вклад в массу которых незначителен, но заряд которых нейтрализует заряд ядер. Поэтому средняя масса одной частицы в малом объеме вещества меняется и за счет различной массивности ядер различных химических элементов, и за счет заряда их ядра. Несколько упрощенная формула для молярной массы электронейтральной плазмы имеет вид [9, 10]:

$$\mu_g=\frac{\mu_{\mathrm{H}}}{2n_{\mathrm{H}}+3n_{\mathrm{He}}/4+n_Z/2}, \tag{16}$$

где μ_{H} – молярная масса атомарного водорода, n_{H}, n_{He}, n_Z – массовые доли водорода H, гелия He^4 и более тяжелых элементов соответственно.

В описание плотности массы среды (5) входит функция массивности частиц $M(\boldsymbol{e})$, которая может быть связана с молярной массой вещества, состоящего из частиц различного вида. Пусть в объеме V содержится N_p ча-

стиц различных типов. Средняя концентрация частиц в объеме равна $n = N_p / V$, а плотность вещества может быть записана в такой форме:

$$\rho = \bar{m} n, \tag{17}$$

где $\bar{m}$ – средняя масса одной частицы в объеме. Учитывая, что концентрация частиц n пропорциональна концентрации маркеров $N(r,z,t)$ с некоторым безразмерным множителем n_0

$$n = n_0 N(r,z,t),$$

можем записать:

$$\rho = \bar{m} n_0 N. \tag{18}$$

Множитель n_0 имеет смысл количества частиц, имеющих один и тот же маркер в единице объема. Сравнивая соотношение (18) с (5), устанавливаем, что среднюю массу частицы в объеме V можно представить в следующем виде:

$$\bar{m} = \frac{M}{n_0}, \tag{19}$$

а из (17) теперь следует

$$n = \frac{\rho}{\bar{m}} = \frac{n_0}{M}\rho. \tag{20}$$

Заметим, что уравнение идеального газа теперь можно записать так:

$$p = \frac{n}{N_a} AT,$$

где N_a – число Авогадро; A – универсальная газовая постоянная.

Подставляя n из (20), находим:

$$p = \frac{n_0}{MN_a} A\rho T,$$

отсюда получаем

$$\mu_g = \frac{N_a}{n_0} M.$$

Для функции массивности частиц среды можно получить следующее соотношение:

$$M = M_0 \aleph(e), \quad M_0 = \frac{\mu_{\mathrm{H}} n_0}{N_a}, \tag{21}$$

где

$$\aleph(e) = (2n_{\mathrm{H}}(e) + 3n_{\mathrm{He}}(e)/4 + n_Z(e)/2)^{-1},$$

а массовые доли элементов $n_{\mathrm{H}}(e)$, $n_{\mathrm{He}}(e)$, $n_Z(e)$ – в общем случае теперь функции маркеров. Учитывая, что

$$\mu_{\mathrm{H}} = m_p N_a,$$

где m_p – масса протона, находим

$$M_0 = m_p n_0. \tag{22}$$

Формулы для плотности и давления можно переписать в такой форме:

$$\rho = M_0 \aleph N, \quad p = \frac{1}{\mu_{\mathrm{H}} \aleph} A \rho T. \tag{23}$$

Последнее соотношение для ρ и соотношение (21) позволяют указать на некоторые важные особенности темной материи в той форме, как она появляется в соотношении (12). В самом простом варианте, когда $\Xi = 1$, функция D принимает следующий вид:

$$D = 2n_{\mathrm{H}}(e) + 3n_{\mathrm{He}}(e)/4 + n_Z(e)/2 .$$

Отсюда следует, что в случае, если в среде превалируют легкие элементы, т.е. $n_{\mathrm{He}}(e) \simeq 0$, $n_Z(e) \simeq 0$, то $D > 1$ и плотность массы $D\rho$ в уравнении Пуассона оказывается большей, чем реальная масса вещества: $D\rho > \rho$. Если же вещество в основном состоит из тяжелых элементов, т.е. $n_{\mathrm{H}}(e) \simeq 0$, то плотность $D\rho$ будет давать обратный эффект: $D\rho < \rho$. Это наблюдение может оказаться очень существенным при описании явлений в массивных звездах, особенно на последних стадиях эволюции, когда вещество звезды содержит много тяжелых элементов, как это имеет место в случае химически пекулярных звезд.

Полученные в предыдущих разделах результаты теперь указывают, что все параметры среды, за исключением компонентов скорости u и w, выражаются через маркерные поля с помощью тех или иных следствий уравнений переноса среды и тождеств, связанных с маркерами.

3. Динамическое равновесие среды

Следующим шагом в выводе уравнений динамики среды является введение понятия динамического равновесия [1, 2]. Под динамическим равновесием понимается состояние среды или системы, при котором они эволюционируют со временем таким образом, что их внутренняя структура остается самоподобной. Для описания такой динамики вводят **автомодельные** переменные. Для рассматриваемой задачи автомодельные переменные [1, 2] имеют такой вид:

$$\xi = r / a(t), \quad \zeta = z / a(t),$$

а компоненты радиальных составляющих скорости потока имеют вид, аналогичный потоку Хаббла:

$$u = \dot{a}\xi,\ w = \dot{a}\zeta. \tag{24}$$

Соответственно, ускорение Эйлера для такого потока имеет простой вид:

$$\frac{du}{dt} = \ddot{a}\xi,\ \frac{dw}{dt} = \ddot{a}\zeta. \tag{25}$$

Уравнения переноса маркеров имеют общее решение:

$$e^a = E^a(\xi,\zeta),$$

т.е. маркеры являются функциями только автомодельных переменных. Отсюда следует, что все функции, зависящие от маркеров, можно рассматривать как функции автомодельных переменных.

Переходя к автомодельным переменным в выражениях для параметров среды и поля, получаем:

$$\rho = \frac{M_0}{a(t)^3} R(\xi,\zeta), \tag{26}$$

где

$$R = \aleph(\xi,\zeta)\frac{|J(\xi,\zeta)|}{\xi},\quad J = \det\begin{vmatrix} E^1_\xi & E^1_\zeta \\ E^2_\xi & E^2_\zeta \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Функцию $R(\xi,\zeta)$ в дальнейшем будем называть коэффициентом плотности. Аналогично скорость зонального потока можно представить в таком виде:

$$v = a^{-1}(t)V(\xi,\zeta),\ V = \xi^{-1}L(\xi,\zeta). \tag{28}$$

Функцию V будем называть коэффициентом зональной скорости.

Для замыкания системы уравнений для неопределенной заранее функции $S(\xi,\zeta)$ в данной работе, как и в [1, 2], используется соотношение

$$S = S_0 R^\delta, \tag{29}$$

где δ – некоторая постоянная, которая оценивается из сопоставления результатов моделирования с реальными данными. Постоянная S_0 является произвольным параметром, поскольку входит в выражение (14) в виде дополнительного множителя. Это позволяет в дальнейшем использовать этот произвол для фиксирования параметров уравнения распределения температуры. В этом случае выражения для давления и температуры примут вид

$$p = A\mu_{\text{H}}^{-1}\sigma(t)S_0 M_0^\gamma a^{-3\gamma}\aleph^{-1}R^{\gamma_{eff}},\ T = \sigma(t)S_0 M_0^{\gamma-1}a^{-3(\gamma-1)}R^{\gamma_{eff}-1}. \tag{30}$$

Здесь введено обозначение: $\gamma_{eff} = \gamma + \delta$, а величину

$$T = T(\xi,\zeta) = R^{\gamma_{eff}-1} \tag{31}$$

будем называть коэффициентом температуры.

Соотношение (29) является достаточно грубым приближением, сводящим рассматриваемую задачу к некоторому варианту теории звездных политроп Лейна – Эмдена, но учитывающему наличие потока тепла в звезде. В реальности для $S(\boldsymbol{e})$ необходимо решать отдельное уравнение переноса тепла в звездах с учетом ядерного источника энергии и непрозрачности самого вещества звезды. Вместе с тем учет этих факторов важен в основном для описания внутренней структуры звезд. Поскольку целью настоящей работы является описание распределения массы и особенностей поведения зонального потока во всей окрестности звезды, то оценка энтропии (29) может рассматриваться как первое полезное приближение. Такое приближение позволяет сделать ряд важных качественных выводов относительно распределения температуры и зонального потока, а также роли параметров тепловых процессов в звездах без излишней сложности. Включение уравнения переноса тепла, ядерного источника и звездного ветра следует рассматривать как модель следующего уровня сложности.

4. Уравнения динамического равновесия

Выражения для компонентов эйлерова ускорения (25) позволяют теперь построить решения двух последних непроинтегрированных уравнений. Это первые два уравнения системы (1), которые с учетом (29) теперь можно привести к такому виду:

$$\ddot{a}\xi - \frac{V^2(\xi,\zeta)}{a^3\xi} = -\frac{\Pi(t)}{a^2}F_1 - \frac{\Gamma_0}{a^2\xi}\left(\Xi K_1 + \Psi_\zeta\right),$$

$$\ddot{a}\zeta = -\frac{\Pi(t)}{a^2}F_2 - \frac{\Gamma_0}{a^2\xi}\left(\Xi K_2 - \Psi_\xi\right), \tag{32}$$

здесь

$$\Pi(t) = A\mu_{\mathrm{H}}^{-1}\sigma(t)S_0 M_0^{\gamma-1}a^{-3\gamma+4}. \tag{33}$$

Кроме этого, F_1 и F_2 – компоненты векторного поля в автомодельных переменных:

$$\bar{F} = \nabla\frac{T}{\aleph} + \frac{n_e}{\aleph}\nabla T, \tag{34}$$

также введены обозначения (см. приложение):

$$K_\alpha(\xi,\zeta) = a(t)|J|K_\alpha, \quad \alpha = 1,2, \quad n_e = \frac{1}{\gamma+\delta-1}. \tag{35}$$

Заметим также, что векторное поле $\bar{K}$ с компонентами $\bar{K} = (K_1, K_2)$ удовлетворяет тождеству (см. выражение (90) в приложении).

5. Разделение переменных

В уравнениях (32) и (33) имеются неопределенные пока функции $R(\xi,\zeta)$, $V(\xi,)$, $\Psi(\xi,\zeta,t)$ и $\sigma(t)$. Поскольку рассматривается автомодельная

задача, то вид этих функций должен соответствовать условиям разделения переменных. Для получения условий разделения переменных представим функции Ψ и Ξ в общем виде:

$$\Psi = \Psi_0(\xi,\zeta) + a^{-1}(t)\Psi_1(\xi,\zeta),\ \ \Xi = \Xi_0(\xi,\zeta)\left(1 + \frac{a_G(\xi,\zeta)}{a(t)}\right), \tag{36}$$

где $\Psi_0(\xi,\zeta)$, $\Psi_1(\xi,\zeta)$, $\Xi_0(\xi,\zeta)$ и $a_G(\xi,\zeta)$ – некоторые вспомогательные функции. Функция $a_G(\xi,\zeta)$ имеет размерность длины.

Для функции $\Pi(t)$ для возможности разделения переменных является формальное представление:

$$\sigma = \sigma_1(t)\big(1 + a_T / a(t)\big),\quad \Pi = \Pi_0(t)\big(1 + a_T / a(t)\big),$$

$$a_T = \text{const},\ \ \Pi_0 = \frac{A\sigma_1(t)}{\mu_{\text{H}}} M_0^{\gamma-1} a^{-3\gamma+4}, \tag{37}$$

где функция $\sigma_1(t)$ определяется из условия разделения переменных, а постоянная a_T имеет размерность длины. Безразмерный параметр $\theta = a_T / a$ характеризует свойства потока тепла в звезде и его изменения при изменении масштабного фактора. Его значение для кривой блеска пульсирующих звезд описано в [2]. Потребуем теперь выполнения следующего условия:

$$\frac{\Pi_0(t)}{\Gamma_0} = Q_0 = \text{const}.$$

В результате подстановки соотношений (36) и (37) в (32) приходим к условиям разделения переменных для пространственного распределения зонального потока:

$$\Gamma_0^{-1} V^2 = \left(a_G \Xi_0 K_1 + \Psi_\zeta\right) + a_T Q_0 \xi F_1 + f\xi^2,$$

$$\left(a_G \Xi_0 K_2 - \Psi_\xi\right) + a_T Q_0 \xi F_2 + f\zeta\xi = 0, \tag{38}$$

и для распределения плотности среды вместе с компонентами вектора K^1 и K^2:

$$\Lambda\xi^2 + Q_0 \xi F_1 + \Xi_0 K^1 + \Psi_{0,\zeta} = 0,$$

$$\Lambda\zeta\xi + Q_0 \xi F_2 + \Xi_0 K^2 - \Psi_{0,\xi} = 0. \tag{39}$$

Условием разделения переменных по времени будет уравнение

$$\ddot{a} = \frac{\mu}{a^3} + \frac{\nu}{a^2}, \tag{40}$$

где $\nu = \Gamma_0 \Lambda$, $\mu = \Gamma_0 f$; f и Λ – параметры разделения переменных.

Уравнение (40) описывает эволюцию масштабного фактора $a(t)$ в зависимости от параметров разделения μ, ν и от начальных условий. Далее это уравнение будем называть **уравнением осцилляций** в зависимости от типа начальных условий.

Уравнения (38) и (39) следует рассматривать как уравнения относительно маркеров E^1, E^2, а также относительно функций Ψ_0, Ψ_1 и V. Число уравнений меньше числа неизвестных, поэтому одна из функций должна определяться начальными условиями в момент перехода системы в режим динамического равновесия. В реальности нет необходимости отыскивать все неизвестные. Достаточно вычислить функции $V(\xi,\zeta)$ и $R(\xi,\zeta)$, чтобы определить важные с точки зрения сравнения с экспериментом характеристики наблюдаемой структуры звезд. Для этого из (38) и (39) можно исключить функции Ψ_0, Ψ_1, вычисляя дивергенцию от каждой пары этих уравнений. В результате такой процедуры и некоторых преобразований для вычисления V и R получаем следующие два уравнения:

$$\Gamma_0^{-1}\frac{1}{\xi}\frac{\partial V^2}{\partial\xi}=3f+a_TQ_0\mathrm{div}\left(\bar{F}\right)+\mathrm{d}iv\left(a_G\Xi_0\xi^{-1}\bar{K}\right), \tag{41}$$

$$2\lambda+Q_0\mathrm{d}iv\left(\bar{F}\right)+\mathrm{div}\left(\Xi_0\xi^{-1}\bar{K}\right)=0, \tag{42}$$

здесь введено обозначение:

$$\mathrm{div}\left(\bar{F}\right)=\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi F_1)+\frac{\partial}{\partial\zeta}(F_2),$$

а оператор div вычисляется в автомодельных переменных цилиндрической системы координат.

Параметр $\lambda=3\Lambda/2$ называется (см. [1, 2]) **параметром динамического равновесия**. Комбинируя уравнения (41) и (42), первое из этих уравнений удобно привести к следующему виду:

$$\frac{1}{\gamma_0\xi}\frac{\partial V^2}{\partial\xi}=3f+2a_T\lambda+\mathrm{div}\left(\Xi_a\xi^{-1}\bar{K}\right). \tag{43}$$

здесь введено обозначение: $\Xi_a=\left(a_G-a_T\right)\Xi_0$, в соответствии с (90):

$$\mathrm{div}\left(\Xi_0\xi^{-1}\bar{K}\right)=2\frac{D_0}{\aleph}R,\ \ \mathrm{div}\left(\Xi_a\xi^{-1}\bar{K}\right)=2\frac{D_a}{\aleph}R,$$

где

$$D_0\frac{R}{\aleph}=\frac{R\Xi_0}{\aleph}+\frac{\Xi_0}{2\xi}\left(K^1\frac{\partial\ln\Xi_0}{\partial\xi}+K^2\frac{\partial\ln\Xi_0}{\partial\zeta}\right),$$

$$D_a\frac{R}{\aleph}=\frac{R\Xi_a}{\aleph}+\frac{\Xi_a}{2\xi}\left(K^1\frac{\partial\ln\Xi_a}{\partial\xi}+K^2\frac{\partial\ln\Xi_a}{\partial\zeta}\right). \tag{44}$$

Функции D_0 и D_a являются функциями маркеров и описывают дополнительные свойства эффекта «темной материи». Поэтому их можно рассматривать как независимые функциональные параметры модели, вместо Ξ_0 и Ξ_a. Используя эти соотношения, уравнения (41) и (42) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\gamma_0 \xi}\frac{\partial V^2}{\partial \xi} = 3f + 2a_T\lambda + 2\frac{D_a}{\aleph}R, \tag{45}$$

$$\lambda + \frac{Q_0}{2}\operatorname{div}\left(\bar{F}\right) + \frac{D_0}{\aleph}R = 0. \tag{46}$$

Учитывая, что в выражение для $\Pi_0(t)$ входит произвольный пока множитель S_0, параметр разделения переменных $Q_0/2$ можно без ограничения общности положить равным 1.

Физический смысл полученных уравнений состоит в том, что первое из этих уравнений описывает пространственное распределение зональной скорости, а второе – распределение температуры и плотности.

Исключим теперь из уравнений (45) и (46) слагаемые, содержащие $\Xi_0 K^1$ и $\Xi_0 K^2$, используя для этого (39), приходим после несложных преобразований (см. приложение) к уравнению

$$\lambda - \frac{1}{3}\lambda\left(\xi\frac{\partial \ln\Xi_0}{\partial \xi} + \zeta\frac{\partial \ln\Xi_0}{\partial \zeta}\right) + \Xi_0\operatorname{div}\left(\frac{1}{\Xi_0}\bar{F}\right) + \frac{\Xi_0}{\aleph}R = N\left[\Psi_0, \Xi_0\right], \tag{47}$$

где

$$F\left[\Psi_0, \Xi_0\right] = \frac{1}{2\xi}\left(\Psi_{0,\zeta}\frac{\partial \ln\Xi_0}{\partial \xi} - \Psi_{0,\xi}\frac{\partial \ln\Xi_0}{\partial \zeta}\right).$$

Аналогичную форму можно получить и для уравнения (45).

Уравнения (45) и (47) являются наиболее общим вариантом модели, допускающей разделение переменных в условиях динамического равновесия и предположении о форме компонентов поля $\boldsymbol{g_K}$ (11). Однако в эти уравнения входят функции Ξ_0, a_G и Ψ_0, функциональная форма которых не определена известными физическими законами. Поэтому далее имеет смысл рассматривать лишь некоторые упрощенные варианты модели, которые дали бы новую информацию о свойствах указанных функций на основе сравнения результатов вычислений в рамках модели с реальными данными. В первую очередь упрощение моделей сводится к условию $F\left[\Psi_0, \Xi_0\right] = 0$, которое выполняется при общем требовании:

$$\Psi_0 = U\left(\Xi_0\right),$$

где $U\left(\Xi_0\right)$ – произвольная дифференцируемая функция одного аргумента. Это условие означает, что вихревая составляющая поля $\boldsymbol{g}_\Xi$ либо отсутствует, либо является функцией от Ξ_0.

Следующий тип упрощений сводится к выбору $\Xi_0 = 1$ и $a_G = \text{const}$. В этом случае уравнение для T можно записать в такой форме:

$$\lambda + \aleph^{-1} T^{n_e} + \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = 0. \tag{48}$$

Необходимость в обобщенной модели с $\Xi_0 \neq \text{const}$ и $a_G \neq \text{const}$, как уже отмечалось, связана с необходимостью использовать такие предположения при построении моделей пылевых дисков типа галактик [15]. Функции Ξ_0 и a_G являются основными факторами при описании эффекта скрытой массы или темной материи в структуре галактик. Поскольку для отдельных звезд эффект темной материи явно не обнаруживается в наблюдательных данных, то предположение $\Xi_0 = 1$ и $a_G = \text{const}$ можно считать вполне адекватным современным данным для звезд.

В качестве альтернативной гипотезы можно предположить, что $\Xi_0 = \aleph$. Это согласуется, с одной стороны, с общей концепцией, изложенной кратко в [15], а с другой – позволяет представить составляющую напряженности гравитационного поля $\boldsymbol{g}_{\Xi}$ в такой форме:

$$\boldsymbol{g}_{\Xi} = -\Gamma_0 \left(1 + a_G(\xi, \zeta) / a(t)\right) \rho \boldsymbol{K}.$$

Следовательно, в выражение (11) теперь входит именно плотность массы среды ρ, а не концентрация маркеров N. Однако такая гипотеза требует более детальной проверки. Выведены соотношения для ускорения свободного падения, учитывающие указанные дополнительные факторы, например массивность частиц среды. Получены обобщенные уравнения динамического равновесия среды.

6. Модифицированное уравнение Лейна – Эмдена

Уравнение (46) при переходе к сферическому приближению (подробнее смотрите [1]) принимает вид модифицированного уравнения Лейна – Эмдена (mLEM), которое в случае $\Xi_0 = 1$ можно записать в форме

$$\lambda + \aleph^{-1} T^{n_e} + \frac{1}{\chi^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\chi^2 F\right] = 0, \tag{49}$$

здесь

$$F = \frac{n_e}{\aleph} \frac{\partial T}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \chi} \frac{T}{\aleph},$$

введено обозначение

$$\chi = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2} = \sqrt{r^2 + z^2} / a. \tag{50}$$

Величина χ – это безразмерный радиус сферической системы координат.

Заметим, что в случае однородной по химическому составу звезды величина $\aleph$ всюду постоянна: $\aleph = \text{const}$. Например, для звезды, содержащей

только водород $\aleph = 1/2$. В этом случае уравнение (49) принимает вид уравнения из работы [1] после замен $\lambda\aleph \to \lambda$ и $(n_e + 1) \to 1$. Поскольку λ – параметр разделения переменных, то его значение определяется подбором по принципу соответствия распределения температуры определенным критериям. Поэтому указанное преобразование не влияет на результаты, полученные в [1].

Граничными условиями для этого уравнения являются следующие соотношения:

$$T(0) = 1, \;\; F(0) = 0. \tag{51}$$

В отличие от классического уравнения Лейна – Эмдена [9, 10], производная от температуры (и плотности) по радиусу не обращается в ноль в центре, если не обращается в ноль производная от N. Исходя из граничного условия (51), можно переписать соотношения для температуры и плотности среды. В силу (51) $R(0) = 1$, что дает:

$$\rho(0,t) = \frac{M_0}{a^3(t)}, \;\; T(0,t) = \sigma(t) M_0^{\gamma-1} a^{-3(\gamma-1)}.$$

В результате плотность на любом расстоянии от центра можно представить таким образом:

$$\rho(r,t) = \rho(0,t) R(\chi), \;\; T(r,t) = T(0,t) T(\chi). \tag{52}$$

7. Пространственное распределение массивности

С учетом сделанных замечаний относительно массы звезд в динамическом равновесии необходимо пересмотреть выбор параметров модели, которые были сделаны в [1] при ее сопоставлении реальным данным для Солнца. Кроме этого, в отличие от модели, построенной и исследованной в [1], в данной работе следует учесть массивность частиц среды, т.е. некоторые общие сведения относительно функции $\aleph(\xi,\zeta)$. Согласно современным оценкам вещество Солнца в фотосфере состоит в основном из водорода и гелия с массовыми долями:

$$n_{\mathrm{H}} \simeq 0,75, \;\; n_{\mathrm{He}^4} \simeq 0,25, \;\; n_Z < 0,01.$$

О распределении этих величин внутри Солнца абсолютно надежных данных нет. Однако можно предположить, что концентрация гелия в центральных областях Солнца, где идут ядерные реакции синтеза гелия, выше, чем в фотосфере Солнца, но ненамного больше, чем $n_{\mathrm{He}^4}(0) \simeq 0,25$. Поскольку эта величина точно неизвестна, то $n_{\mathrm{He}^4}(0)$ можно рассматривать как свободный параметр модели со значением в диапазоне $n_{\mathrm{He}^4}(0) \in [0,25; 0,35]$.

В солнечном ветре содержание гелия He^4 падает до $n_{\mathrm{He}^4} \simeq 0,04$ согласно стандартной модели. Обозначим через $n_0 = n_{\mathrm{He}^4}(0)$ концентрацию

гелия в центре Солнца. Тогда можно ожидать, что функция $\aleph(\chi)$ будет иметь вид функции, представленной на графике (1). Такую функцию можно представить в следующем виде:

$$\aleph = \alpha\left(1 - \tanh\left(q\left(r - r_0\right)\right)\right) + n_\infty. \qquad (53)$$

На больших расстояниях от центра величина $\aleph$ должна стремиться к величине $1/2$, что соответствует чисто водородной плазме в солнечном ветре $n_{He^4} = 0$. Отсюда находим $n_\infty = 1/2$. Полагая, что r_0 есть радиус фотосферы, т.е. радиус Солнца, находим, что в фотосфере

$$\aleph(r_0) = \alpha + n_\infty = \alpha + 1/2,$$

Отсюда получаем: $\alpha = \aleph(r_0) - 1/2$. Параметр q можно теперь оценить, исходя из значения $\aleph(0)$ в центре звезды. Имеем:

$$\aleph(0) = \alpha\left(1 + \tanh\left(qr_0\right)\right) + n_\infty,$$

отсюда

$$\tanh\left(qr_0\right) = \frac{\aleph(0) - 1/2}{\aleph(r_0) - 1/2} - 1 = \beta,$$

или

$$q = \frac{1}{2r_0}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right).$$

График $\aleph(\chi)$ как функции нормированной на радиус фотосферы координаты r/r_f представлен на рис. 1.

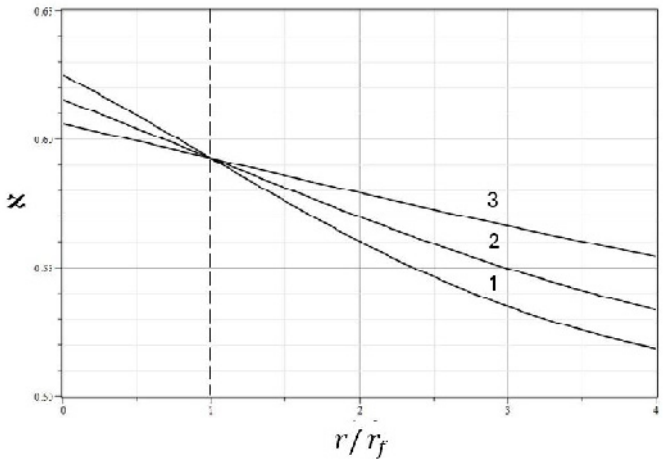


Рис. 1. Распределение $\aleph$ (53) для трех значений массовой доли гелия He^4 $n_{He^4}(0)$ в центре Солнца: *1* – $n_{He^4}(0) = 0{,}32$; 2 – $n_{He^4}(0) = 0{,}3$; 3 – $n_{He^4}(0) = 0{,}28$

8. Уравнение осцилляций

Для дальнейшего необходимо рассмотреть основные свойства уравнения осцилляций (40). Эту систему удобно привести к безразмерному виду, вводя новые переменные:

$$x = a / a_0, \;\; y = t_0 \dot{a} / a_0, \;\; \tau = t / t_0,$$

где

$$a_0 = \mu / |\nu|, \;\; t_0 = \frac{\mu^{3/2}}{|\nu|^2}. \tag{54}$$

В этом случае (40) приобретает вид динамической системы:

$$\frac{dy}{d\tau} = x^{-3} + \operatorname{sign}(\nu) x^{-2}, \;\; \frac{dx}{d\tau} = y, \tag{55}$$

в которой отсутствуют свободные параметры, кроме знака величины ν. Особая точка $x_0 = 1, y_0 = 0$ является центром (см. [1]). Таким образом, при $\nu < 0$ для начальных условий вблизи особой точки с $a_0 = \mu / |\nu|$ эволюция газодинамической структуры представляет собой колебания с частотой, близкой к $\Omega_0 = 1 / t_0$.

Динамическая система (55) имеет интеграл движения:

$$\frac{y^2}{2} + \operatorname{sign}(\nu) \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} = E, \tag{56}$$

что позволяет вычислить период осцилляций в зависимости от $-0{,}5 \le E < 0$:

$$P(|E|) = 2 \int_{x_+}^{x_-} \frac{x dx}{\sqrt{2Ex^2 + 2x - 1}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2|E|^{3/2}}, \tag{57}$$

здесь $x_\pm$ – значения безразмерного масштабного фактора в максимуме и минимуме отклонения от положения равновесия. При $E \ge 0$ эволюция переходит при $t \to \infty$ в неограниченное расширение.

9. Масса звезд в случае динамического равновесия

Рассмотрим вариант моделей, при котором $M = 1$ и $D_0 = 1$. Такие модели как раз и рассматривались в [1]. В этом случае уравнение (49) позволяет простым образом вычислять массу материи, содержащейся внутри областей, ограниченных сферами, радиусы которых совпадают с экстремумами плотности (или температуры) в пространстве. Экстремумы плотности и температуры совпадают. Для этого перепишем уравнение (49) при сделанных предположениях в виде

$$\chi^2 \lambda + \chi^2 R + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\chi^2 \frac{\partial}{\partial \chi} T \right) = 0. \tag{58}$$

Вычисляя интеграл по χ от соотношения (66) в диапазоне $[0,\chi_0]$, получаем:

$$\int_0^{\chi_0}\chi^2\lambda d\chi+\int_0^{\chi_0}R\chi^2 d\chi+\chi_0^2\left(\frac{\partial}{\partial\chi}T\right)\Bigg|_{\chi=\chi_0}=0.$$

Выберем в качестве χ_0 безразмерный радиус, соответствующий первому минимуму функции R, который отождествляется с радиусом фотосферы звезды. В результате получаем:

$$\int_0^{\chi_0}R\chi^2 d\chi=-\int_0^{\chi_0}\chi^2\lambda d\chi. \tag{59}$$

Величина

$$M_s(r_0)=4\pi\int_0^{r_0}\rho r^2 dr$$

представляет собой массу вещества внутри сферы радиуса r_0.

Учитывая соотношение (52), можно записать последнюю формулу в таком виде:

$$M_s(r_0)=4\pi\rho(0,t)a^3(t)\int_0^{\chi_0}R\chi^2 d\chi.$$

Сравнивая последнее соотношение с (59), находим:

$$M_s(r_0)=\frac{4\pi}{3}|\lambda|\rho(0,t)(a(t)\chi_i)^3=\frac{4\pi}{3}\overline{\rho}R_0^3, \tag{60}$$

где $R_0=a(t)q\chi_0$ – истинный радиус фотосферы звезды; $\overline{\rho}=|\lambda|\rho(0,t)$ – средняя плотность внутри области, ограниченной радиусом фотосферы.

Если обозначить через r_i радиусы сфер, на которых плотность достигает экстремумов, то масса вещества внутри этих сфер будет равна:

$$M_s(r_i)=\frac{4\pi}{3}|\lambda|\rho(0,t)(a(t)\chi_i)^3=\frac{4\pi}{3}\overline{\rho}R_i^3, \tag{61}$$

где $\chi_i=r_i/a$ – безразмерный радиус сферы, а R_i – истинный.

Таким образом, в случае если массивность частиц и множитель D скрытой массы равны единице, то масса вещества внутри области с радиусами, на которых температура и плотность достигают экстремума, будут точно равны массе той же области, если бы в ней вещество распределялось равномерно со средней плотностью $\overline{\rho}=|\lambda|\rho_0$, где ρ_0 – плотность в центре звезды.

С другой стороны (см. [1]), период осцилляций звезды в рассматриваемой модели в точке равновесия $x_0=1$ зависит только от λ. Действительно,

из граничного условия $R(0)=1$ и соотношения для плотности (5) в точке равновесия находим:

$$M_0 = \rho(0) a_0^3, \;\; a_0 = R_\odot / \chi_0, \tag{62}$$

где $R_\odot$ – реальный радиус звезды (определенный по минимуму температуры в фотосфере), а χ_0 – безразмерный радиус минимума фотосферы, определяемый в результате численного счета. Из определения параметров μ и ν, а также определения a_0 (54), получаем:

$$\nu = \Gamma_0 \lambda, \;\; \mu = a_0 |\lambda|. \tag{63}$$

Из формулы (57) при $E=-0,5$ и формулы (54) для t_0 в размерном виде получаем соотношение для периода осцилляций:

$$P = \sqrt{\frac{3\pi}{|\lambda| G \rho_0}}, \tag{64}$$

который зависит только от плотности в центре звезды и параметра динамического равновесия λ. Используя (60) и (61) , находим:

$$\frac{R_i^3}{P^2} = \frac{M_s(i) G}{4\pi^2}, \tag{65}$$

что в точности совпадает по форме с третьим законом Кеплера.

Из указанного следует, что для того чтобы период осцилляций звезды в динамическом равновесии при сделанных упрощениях равнялся P, требуется, чтобы вся масса звезды содержалась внутри шара радиуса R_i. В частности, для того чтобы период осцилляций Солнца был равен примерно 11 лет, что примерно равно периоду обращения Юпитера вокруг Солнца, масса последнего должна в среднем содержаться внутри орбиты Юпитера. Однако при этом периоды обращения других планет должны были бы отличаться от реально наблюдаемых, поскольку внутри их орбит содержалась бы масса, существенно отличающаяся от массы Солнца.

Второй вывод, который можно сделать из соотношения (65), состоит в том, что частицы среды, находящейся в динамическом равновесии, в процессе осцилляций звезд совершают движение по эллиптическим орбитам, которое складывается из зонального их перемещения со скоростью v и радиальных осцилляций со скоростями $u = \dot{a}\xi$ и $w = \dot{a}\zeta$. Это означает, что вся совокупность частиц среды совершает синхронное коллективное орбитальное движение вокруг звезды.

10. Оценка массы в случае $M \neq 1$

В случае $M \neq 1$ вычисление массы внутри сфер, ограниченных радиусами, на которых производная температуры обращается в ноль, несколько изменяется, но это в целом не оказывает существенного влияния на величину самой массы из-за малых изменений M по радиусу звезды.

Аналогом уравнения (66) при $M = M_0\aleph$ является следующее соотношение:

$$\chi^2\aleph\lambda + \chi^2 R + \aleph\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\chi^2 F\right) = 0. \qquad (66)$$

Интегрируя это соотношение по χ, приходим к следующему выражению для массы внутри радиуса χ_0, соответствующего минимуму температуры:

$$M(\chi_0) = 4\pi|\lambda|\int_0^{\chi_0}\aleph\chi^2 d\chi - 4\pi\int_0^{\chi_0}\aleph\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\chi^2 F\right)d\chi.$$

Вычисляя по частям второй интеграл в правой части, находим:

$$I_0 = \int_0^{\chi_0}\aleph\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\chi^2 F\right)d\chi = \aleph(\chi_0)\chi_0^2 F(\chi_0) - \int_0^{\chi_0}\frac{\partial\aleph}{\partial\chi}\chi^2 F d\chi,$$

здесь учитывался явный вид функции $F(\chi)$ и то, что χ_0 – минимум температуры. Далее по аналогии получаем такое соотношение:

$$I_0 = -\chi_0^2 T(\chi_0)\left.\frac{\partial\ln\aleph}{\partial\chi}\right|_{\chi=\chi_0} - \int_0^{\chi_0}\frac{\partial\ln\aleph}{\partial\chi}\left((n_e+1)T_\chi - \frac{\partial\ln\aleph}{\partial\chi}\right)\chi^2 d\chi.$$

Поскольку градиент функции $\aleph$ по радиусу является малой величиной, то в первом приближении величиной I_0 при оценке массы можно пренебречь. В результате находим:

$$M(\chi_0) \simeq 4\pi|\lambda|\int_0^{\chi}\aleph\chi^2 d\chi. \qquad (67)$$

В силу теоремы о среднем масса может быть записана в такой форме:

$$M(\chi_0) \simeq \rho(0)\frac{4\pi}{3}|\lambda|\aleph_*\chi_0^3, \qquad (68)$$

где $\aleph_*$ – значение $\aleph$ в некоторой промежуточной точке. Поскольку $0{,}5 \le \aleph < 2$, то получаем оценку массы, не очень отличающуюся от случая $\aleph = 1$. Для Солнца $\aleph$ меняется в диапазоне $[0{,}5; 0{,}7]$, что дает несколько меньшую оценку массы, чем в случае с $\aleph = 1$. Поэтому общие выводы относительно распределения массы в случае модели Солнца, сделанные в предыдущем разделе, остаются практически неизменными.

11. Распределение температуры с учетом массивности частиц

Решения уравнения (66) для модели Солнца, рассмотренной ранее в [1] для случая $\aleph = 1$, построенной в [2] и обобщенной в данной работе, проводи-

лись для массовой доли He^4 $n_{He^4}(0) = 0,28$ в центре Солнца. Значения всех основных параметров Солнца, которые использовались для вычисления решений уравнения (49), соответствуют стандартной модели Солнца, как и в работах [1, 2]. Эти данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

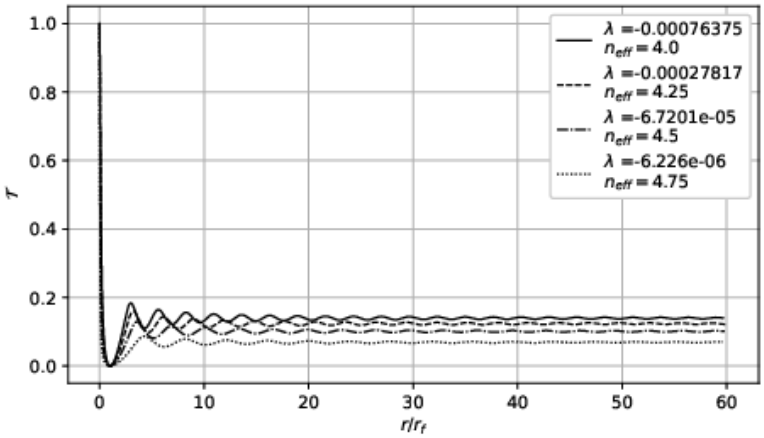
Значения основных параметров Солнца согласно стандартной модели

Параметр	Значение
Радиус $R_\odot$	$7 \cdot 10^{10}$ см
Зональная скорость на экваторе $v_\odot$	$2 \cdot 10^5$ см/с
Показатель адиабаты γ	$5/3$
Плотность в центре $\rho_\odot$	150 г/см^3
Температура в центре $T_\odot$	$15 \cdot 10^6$ К
Масса	$2 \cdot 10^{33}$ г

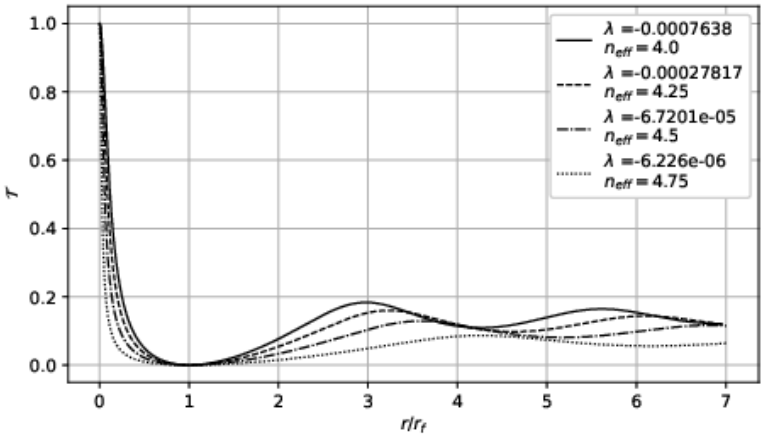
Расчет основных параметров модели производился по схеме, предложенной в [1]. Наблюдаемый радиус Солнца отождествляется с радиусом, на котором достигается первый минимум температуры. В безразмерном виде эта величина обозначается как r_f. Для каждого набора исходных параметров величина r_f определяется численно. Кроме этого, численно оцениваются безразмерные величины r_c и r_{fc}, которые соответствуют численному значению положения максимума температуры после первого минимума и последующего второго минимума температуры, лежащего в короне Солнца. Величина r_c отождествляется с положением реально наблюдаемого в короне Солнца максимума температуры, равного примерно $2 \cdot 10^6$ К. Безразмерная величина r_{fc} используется для вычисления интегральной оценки массы вещества M_c в сфере радиусом r_{fc}. Через M_f обозначается суммарная масса вещества внутри сферы с радиусами r_f, т.е. в той области, которая в стандартной модели считается наблюдаемым радиусом Солнца. Полная масса вещества в сфере с безразмерным радиусом r_{end} обозначается M_{full}. Значение r_{end} обозначает границу области вычислений по радиусу.

На рис. 2 представлены графики изменения температуры для четырех значений эффективного показателя политропы n_{eff}, которые могут в той или иной степени сопоставлены реальным данным. Каждая кривая для заданных значений n_{eff} подбиралась с помощью изменения параметра динамического равновесия λ таким образом, чтобы температура в минимуме фотосферы (первый минимум температуры) была равна примерно 4800 К с отклонением в большую сторону не более 50 К. Кроме этого, при построении соответствующей кривой подбиралось значение параметра r_0 в модели распределения функции $\aleph$ таким образом, чтобы оно совпадало с точностью до трех

знаков после запятой со значением r_f. Изменения в r_0 меняли и величину температуры в минимуме фотосферы, и положение самого минимума. Однако подбором r_0 всегда удавалось добиться нужного совпадения этой величины с r_f для каждого фиксированного числа точек сетки. На рис. 2,***а*** представлены кривые, полученные таким способом в диапазоне расстояний до 60 радиусов Солнца, что примерно соответствует радиусу орбиты Меркурия. На рис. 2,***б*** представлены распределения температуры в пределах 7 радиусов Солнца, в которые помещаются максимум в короне и последующий минимум температуры для каждого значения n_{eff}, которые отображены на графиках вместе с полученным значением λ.



а)



б)

Рис. 2. Распределение температуры для нескольких значений эффективного показателя политропы n_{eff} (указаны на графиках) для $n_{\mathrm{He}^4}(0) = 0,28$ на интервалах: ***а*** – [0, 60]; ***б*** – [0, 7] (в радиусах фотосферы)

Результаты вычисления указанных выше параметров распределения массы и температуры для каждой кривой представлены в табл. 2. Отдельной строкой в этой таблице указаны периоды осцилляций Солнца, соответствую-

щие выбранным параметрам n_{eff} и λ. Как видно, периоды пульсаций Солнца для этих параметров существенно меньше, чем основной период активности Солнца, равный примерно 11 годам. Такой период был получен в [1] для $n_{eff} = 5$ и $\aleph = 1$ также путем подбора параметра λ, при котором температура в минимуме фотосферы равнялась бы примерно 4500 К. Как уже указывалось, этот результат приводит к тому, что вещество, равное массе Солнца $M_{\odot}$ стандартной модели, оказывается распределенным внутри сферы с радиусом орбиты Юпитера, что противоречит наблюдаемым данным.

Таблица 2

Численные значения параметров модели температуры и массы для четырех значений эффективного показателя политропы

Параметр	$n_{eff} = 4,00$	$n_{eff} = 4,25$	$n_{eff} = 4,50$	$n_{eff} = 4,75$
λ	$-7,63750e-04$	$-2,7817e-04$	$-6,72010e-05$	$-0,622600e-05$
T_f $[K]$	$4842,0$	$4832,0$	$4806,0$	$4831,0$
T_c $[K]$	$2,754e+06$	$2,404e+06$	$1,940e+06$	$1,304e+06$
r_c / r_f	$2,98$	$3,24$	$3,60$	$4,27$
M_f [г]	$1,033e+32$	$3,768e+31$	$9,082e+30$	$8,473e+29$
$M_f / M_{\odot}$	$0,052$	$0,019$	$0,005$	$0,42e-3$
r_{fc} / r_f	$4,26$	$4,63$	5,17	6,17
M_c [г]	$7,322e+33$	$3,395e+33$	$1,126e+33$	$1,752e+32$
$M_c / M_{\odot}$	$3,66$	$1,70$	$0,56$	$0,09$
M_{full} [г]	$1,751e+37$	$6,504e+36$	$1,553e+36$	$1,430e+35$
$M_{full} / M_{\odot}$	$8755,0$	$3252,0$	$776,5$	$71,5$
P [с]	$9,753e+00$	$1,616e+01$	$3,288e+01$	$1,080e+02$

Для сравнения с результатами работы [1] на рис. 3 представлены кривые распределения температуры вблизи Солнца для моделей с $n_{eff} = 4,5$, соответствующих $\aleph \neq 1$ и $\aleph = 1$.

Можно видеть, что отклонения в распределении температуры в модели с неравномерной массивностью частиц от модели с $\aleph = 1$ (как в работе [1]) отличаются незначительно. Однако при этом заметно отличаются значения параметра динамического равновесия. Они приведены на самом рисунке.

Как показывает анализ графиков и параметров массы, для всех моделей с различными значениями n_{eff} масса вещества на больших расстояниях от звезды растет существенным образом. Это связано с тем, что при $r \to \infty$ температура и плотность среды в условиях динамического равновесия должны выходить на некоторые постоянные значения, которые существенно выше, чем средняя плотность вещества на больших расстояниях от звезд в реальности. В силу этого можно констатировать, что динамическое равновесие, соответствующее рассматриваемой модели, нарушается за пределами максимума температуры в короне звезд, в данном случае Солнца.

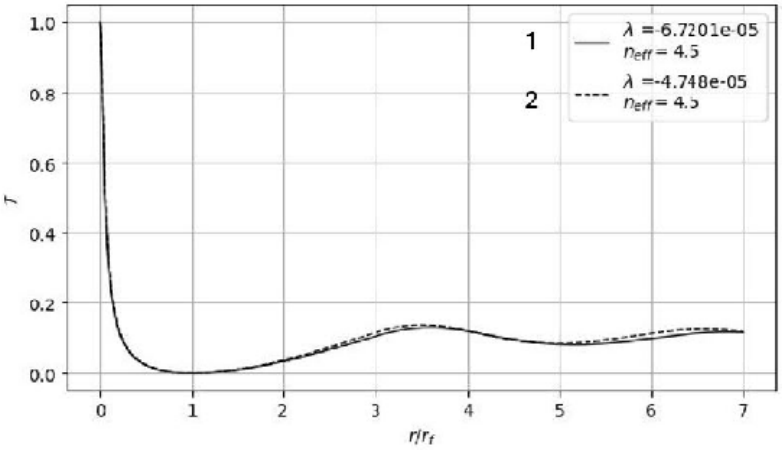


Рис. 3. Распределение температуры для $n_{eff} = 4,5$ (λ указаны на графиках) для двух моделей: *1* – $\aleph = 1$ (классическая модель Лейна – Эмдена); *2* – $\aleph(r)$ с $n_{\mathrm{He}^4}(0) = 0,28$

Из этого следуют два основных вывода. Первый состоит в том, что звездный ветер с точки зрения данной модели является следствием превышения температуры, необходимой для динамического равновесия на больших расстояниях от звезды, над реальной температурой в этой области. Второй вывод состоит в том, что в ближней области короны, по крайней мере для Солнца, модель дает качественно правильное описание распределения температуры. Для значений $n_{eff} = 4,5$ масса в пределах второго минимума температуры, для которых вычислялась величина M_c из табл. 1, наиболее близко подходит под величину массы Солнца, если учитывать дополнительную массу в короне за радиусом r_{fc}. При этом масса M_f в пределах фотосферы оказывается существенно меньше, чем реальная масса Солнца $M_\odot$. Можно предполагать, что после учета солнечного ветра и уравнения переноса тепла (о чем речь шла раньше) модель будет описывать быстрое убывание температуры за пределами максимума в короне и давать более точное согласие с массой Солнца. При этом температура в максимуме должна соответствовать наблюдаемому значению $\simeq 2 \cdot 10^6$ К. Эта величина согласно графикам на рис. 3 как раз соответствует $n_{eff} = 4,5$ или $n_{eff} = 4,25$. Убывание температуры за пределами максимума в короне должно обеспечить величину массы вещества в пределах радиуса орбиты Меркурия, равной наблюдаемой массе Солнца $M_\odot$. Из табл. 2 видно, что масса вещества в пределах орбиты Меркурия превосходит массу Солнца в сотни раз из-за асимптотического постоянства плотности на больших расстояниях.

Вместе с тем, опираясь на предыдущий анализ, следует также констатировать, что наличие значительной массы вещества за пределами фотосферы может играть существенную роль в описании ряда явлений как внутри Солнца, так и за его пределами. Значительно меньшая масса в пределах фото-

сферы может играть важную роль в протекании ядерных реакций в солнечном ядре. Значительная же масса вещества в короне и за ее пределами должна играть определенную роль в эффектах орбитального движения Меркурия, например, влиять на смещение перигелия Меркурия. Более существенную роль указанное распределение массы должно играть в орбитальном движении комет вблизи Солнца, что можно установить с помощью точных наблюдений за их движением в этой области. Однако более детальное обсуждение этих важных вопросов выходит за рамки данной статьи.

12. Скорость зонального потока

Уравнение (45) позволяет при заданных функциях R, D_a вычислить зональную скорость. Интегрируя уравнение (45), получаем следующее обобщенное выражение для $V^2(\xi,\zeta)$:

$$V^2 = |\lambda|\Gamma_0(a_0 + a_T)\xi^2 + 2\Gamma_0(a_G - a_T)H(\xi,\zeta) + C_0(\zeta), \tag{69}$$

где введено обозначение:

$$H(\xi,\zeta) = \int_0^{\xi} \frac{R}{\aleph}\xi d\xi. \tag{70}$$

Функция $C_0(\zeta)$ – постоянная интегрирования по ξ, зависящая произвольным образом от ζ. Если учесть, что на оси вращения при $\xi = 0$ локальная угловая скорость $\omega = v/r = a^{-2}V(\xi,\zeta)/\xi$ зонального потока должна быть конечной величиной, то отсюда сразу следует $C_0(\zeta) = 0$. При выводе (69) учитывалась связь между μ, ν и $|\lambda|$.

Из (69) вычислим значения угловой и зональной скорости на оси вращения при $\xi = 0$, на экваторе звезды при $\xi_0 = \chi_0$ и на бесконечности от звезды. Эти расчеты аналогичны расчетам, проведенным в [2].

Введем обозначение: $\Omega = V(\xi,\zeta)/\xi$, т.е. $\Omega(\xi,\zeta)$ – коэффициент локальной угловой скорости. Реальная угловая скорость связана с зональной скоростью v соотношением $\omega = v/r = V/a^2\xi = \Omega/a^2$. Вблизи нуля функция $H(\xi,\zeta)$ раскладывается в ряд Тейлора:

$$H(\xi,\zeta) \simeq \int_0^{\xi}\left[\frac{R(0,\zeta)}{\aleph(0,\zeta)} + \xi\left.\frac{\partial N(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} + O\left(\xi^2\right)\right]\xi d\xi = \frac{R(0,\zeta)}{2\aleph(0,\zeta)}\xi^2 + O\left(\xi^3\right).$$

В сферически симметричном приближении вблизи точки равновесия $a \simeq a_0$ с учетом граничного условия $R(0) = 1$ находим:

$$\Omega_0^2 = a_0^4\omega_0^2 = |\lambda|\Gamma_0(a_0 + a_T) + (a_G - a_T)\frac{\Gamma_0}{\aleph(0)}, \tag{71}$$

т.е. угловая скорость ω_0 на оси вращения конечна.

Для получения значения V^2 при $\xi \to \infty$ и $\zeta = 0$ представим (69) в таком виде:

$$V^2 = |\lambda| \Gamma_0 (a_0 + a_G) \xi^2 + 2\Gamma_0 (a_G - a_T) I(\xi, \zeta), \tag{72}$$

где

$$I(\xi, \zeta) = \int_0^{\xi} \left(\frac{R}{\aleph} + \lambda \right) \xi d\xi .$$

Поскольку при $\xi \to \infty$ величина $R / \aleph + \lambda$ по модулю стремится к нулю достаточно быстро, то

$$\lim_{\xi \to \infty} I(\xi, \zeta) = I_0(\zeta) < \infty,$$

т.е. на бесконечности эта величина ограничена. Из (72) следует, что зональная скорость будет оставаться постоянной на бесконечности величиной, если выполнено условие

$$a_G = -\frac{\mu}{|\nu|} = -a_0. \tag{73}$$

В случае невыполнения этого условия квадрат угловой скорости на бесконечности будет равен величине

$$\Omega_\infty^2 = |\lambda| \Gamma_0 (a_0 + a_G). \tag{74}$$

Выражение справа остается положительным при условии

$$a_G \geq -a_0,$$

которое дает ограничение снизу на значение a_G. В случае $a_G = -a_0$ угловая скорость на бесконечности будет равна нулю. Конечность зональной скорости на бесконечности в исследованиях структуры галактик и их скоплений является признаком наличия эффекта скрытой массы или темной материи. Обычно к звездам этот эффект не относят. Тем не менее в рассматриваемой модели, как и в [15], наличие параметра типа a_G указывает на возможность объяснения эффекта темной материи модификацией закона тяготения Ньютона.

Расчет значения зональной скорости на экваторе позволяет сделать оценку величин a_T и a_G. Зональная скорость по определению связана с $V(\xi, \zeta)$ соотношением: $v = a^{-1} V(\xi, \zeta)$. Обозначим через v_0 зональную скорость на экваторе звезды. Тогда при $\zeta = 0$ находим:

$$a_0^2 v_0^2 = |\lambda| \Gamma_0 (a_0 + a_T) \xi_0^2 + 2\Gamma_0 (a_G - a_T) H(\xi_0, 0). \tag{75}$$

При заданных значениях угловой скорости ω_0 на оси вращения и зональной скорости на экваторе можно получить значения a_T и a_G, разрешая

соотношения (71) и (75) относительно этих параметров. В результате получаем следующие соотношения:

$$a_T = \alpha_0 \left(\omega_0^2 + W \right),$$

$$a_G = a_T - \aleph_0 |\lambda| \left(a_0 + a_T \right) + \frac{\aleph_0}{\Gamma_0} a_0^4 \omega_0^2, \tag{76}$$

здесь

$$W = \frac{d_0}{H_0 \aleph_0 a_0^3}, \quad d_0 = |\lambda| \Gamma_0 \left(H_0 \aleph_0 - \xi_0^2 / 2 \right) + a_0 v_0^2 / 2,$$

$$\alpha_0 = \frac{2 a_0^4 H_0 \aleph_0}{\Gamma_0 |\lambda| \left(2 H_0 \aleph_0 - \xi_0^2 \right)}.$$

В этих соотношениях свободными параметрами являются зональная скорость на экваторе звезды v_0 и угловая скорость вращения в центре звезды ω_0. Для параметризации условий устойчивости зонального потока будет использоваться и величина угловой скорости зонального потока на экваторе $\omega_f = v_0 / \left(a_0 r_f \right)$. Если зональная скорость на экваторе является в принципе наблюдаемой величиной даже для удаленных звезд, то угловая скорость в центре звезды – ненаблюдаемый параметр, хотя он играет важную роль в том, как меняется зональный поток внутри звезды и вне ее. Чтобы определить эти свойства, рассмотрим вопрос: при каких значениях угловой скорости ω_0 существует физически адекватное распределение зональной скорости внутри и вне звезды. Проблема состоит в том, что при определенных значениях ω_0 параметры a_T и a_G могут принимать такие значения, что на некотором расстоянии от центра звезды квадрат зональной скорости будет отрицательной величиной. Этот факт будет означать, что в некоторой области пространства нарушается динамическое равновесие зонального потока. Критерием этого является обращение зональной скорости в ноль на некотором ненулевом расстоянии ξ_* от центра звезды. Если такая точка существует, то в ней согласно (69) должно выполняться соотношение

$$|\lambda| \left(a_0 + a_T \right) \xi_*^2 + 2 \left(a_G - a_T \right) H_* = 0,$$

где $H_* = H\left(\xi_* \right)$. Это соотношение можно переписать следующим образом:

$$\xi_*^2 = K\left(\omega \right) \frac{2 H_*}{|\lambda|}. \tag{77}$$

В этом соотношении введено обозначение:

$$K\left(\omega \right) = \frac{a_T - a_G}{a_T + a_0} = \frac{\omega^2 - \omega_f^2}{\omega^2 - \omega_{cr}^2} \frac{r_f^2}{2 H_0}, \tag{78}$$

здесь

$$\omega_{cr} = \frac{v_0}{a_0\sqrt{2H_0\aleph_0}}. \tag{79}$$

Из определения функции $H(\xi,\zeta)$ следует, что $H_* > 0$ и $H_0 > 0$. Поэтому скорость зонального потока может обращаться в ноль в точке $\xi_* > 0$ только при следующем условии:

$$K(\omega_0) = \frac{\omega_0^2 - \omega_f^2}{\omega_0^2 - \omega_{cr}^2} \cdot \frac{r_f^2}{2H_0} > 0. \tag{80}$$

если этот параметр отрицателен, то угловая скорость нигде не будет обращаться в ноль, за исключением, возможно, точки $\xi_* = 0$, поскольку $H(0) = 0$. Это означает, что условием устойчивости зонального потока является условие $K(\omega_0) < 0$. При фиксированном значении ω_f возможны две ситуации. Первая соответствует условию $\omega_{cr} > \omega_f$, а вторая – условию $\omega_{cr} < \omega_f$. В первом случае $K(\omega_0) < 0$ при условии:

$$\omega_f \le \omega_0 \le \omega_{cr}. \tag{81}$$

Во втором варианте $K(\omega_0) < 0$ при выполнении неравенства

$$\omega_{cr} \le \omega_0 \le \omega_f. \tag{82}$$

Таким образом, в обоих случаях диапазон устойчивости зонального потока по отношению к угловой частоте в центре звезды лежит между значениями ω_f и ω_{cr}. На рис. 4 представлены оба варианта зависимости $K(\omega_0)$ от ω_0. Можно видеть, что в области ω_0 со значениями $\omega_0 < \omega_f$ в случае ***а*** и $\omega_0 > \omega_f$ в случае ***б*** величина $K(\omega_0)$ оказывается достаточно малой положительной величиной. Это указывает на то, что область неустойчивости в этом случае будет возникать вблизи центра звезды.

В областях, где $K(\omega_0)$ принимает большие положительные значения, неустойчивость будет возникать на больших расстояниях от центра звезды. Заметим также, что при $\omega_0 \to \omega_{cr}$ величина $K(\omega_0)$ стремится по модулю к бесконечности.

В случае $\omega_0 = \omega_{cr}$ выполняется равенство: $a_T + a_0 = 0$. В этом случае выражение для скорости зонального потока принимает в экваториальной плоскости такой вид:

$$v^2 = 2\frac{\Gamma_0}{a_0^2}(a_G + a_0)H(\xi,0) = \frac{v_0^2}{H_0}H(\xi,0). \tag{83}$$

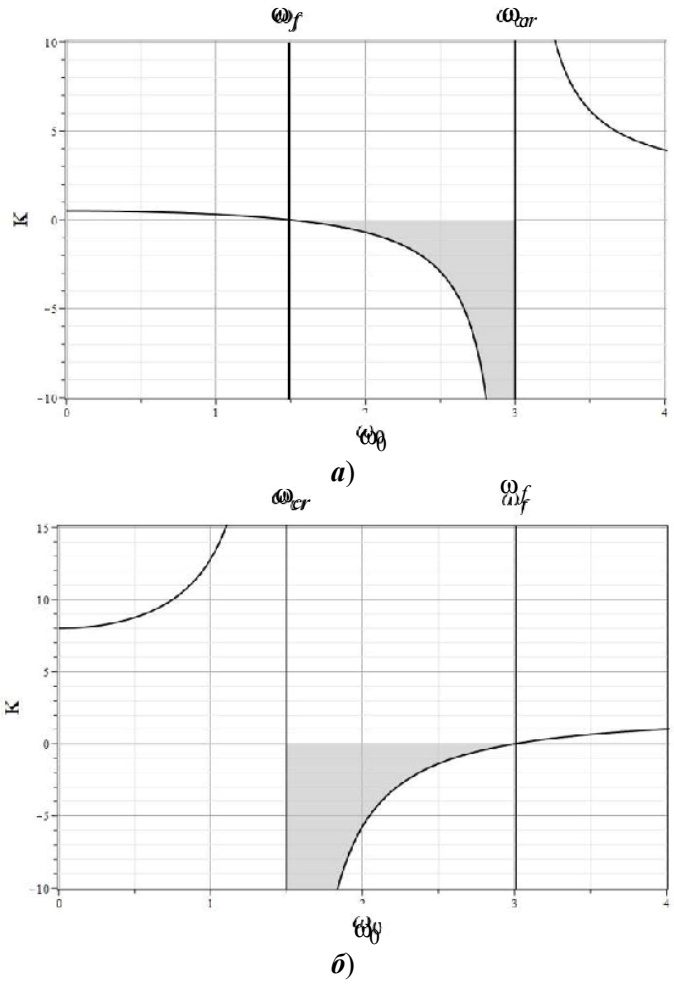
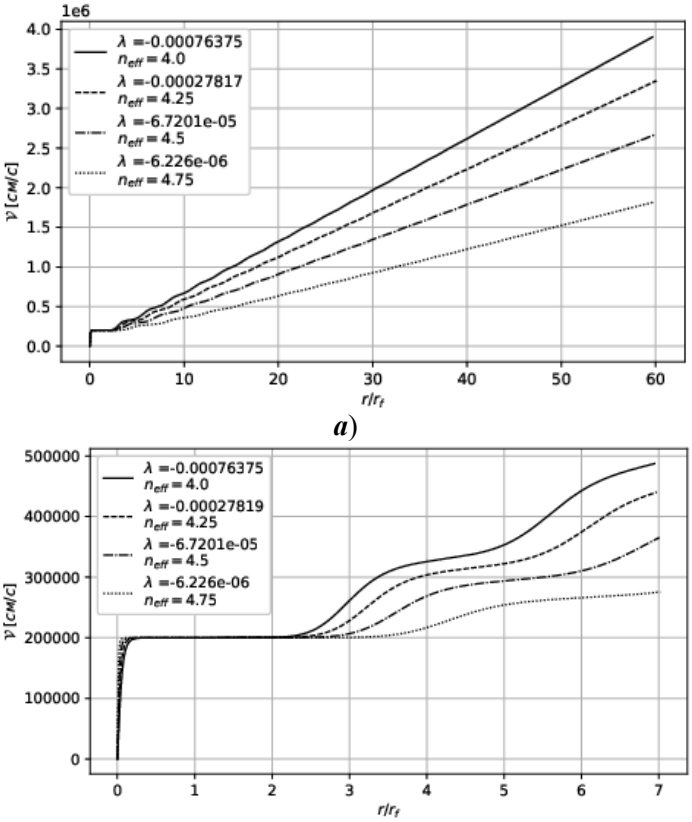


Рис. 4. Зависимость $K = K(\omega)$ в случаях: ***а*** – условие (81); ***б*** – условие (82)

В соответствии с этими оценками на рис. 5 представлена зависимость $v = v(r / r_f)$ для параметров модели Солнца, распределение температуры которых представлено на рис. 2. Из оценок параметров a_T, a_G и a_0 оказывается, что для Солнца реализуется вариант $\omega_f < \omega_{cr}$, т.е. вариант ***а*** на рис. 4.

На рис. 5,***а*** представлены графики изменения зональной скорости для модели Солнца от расстояния в радиусах минимума фотосферы r_f вплоть до расстояния, близкого к радиусу орбиты Меркурия. Графики зональной скорости приведены для каждого n_{eff} со значениями угловой скорости $\omega_0 \simeq \omega_{cr}$. Для этих кривых приведены оценки всех основных параметров модели зональной скорости в табл. 2. На больших расстояниях зональная скорость растет почти линейно и, как видно из графиков, с ростом n_{eff} зональная скорость растет медленнее с расстоянием от центра. Для более наглядного представления о характере изменений скорости вблизи центра и короне на рис. 5,***б*** изображены кривые $v = v(r / r_f)$ внутри области до семи радиусов фотосфе-

ры. Внутри этой области зональная скорость вблизи центра быстро растет почти точно до значения v_0 на экваторе, а затем в широком диапазоне остается почти постоянной величиной в соответствии с законом (83). Таким образом, в случае $\omega_0 \simeq \omega_{cr}$ зональная скорость изменяется существенно нелинейно в ближней окрестности звезд.

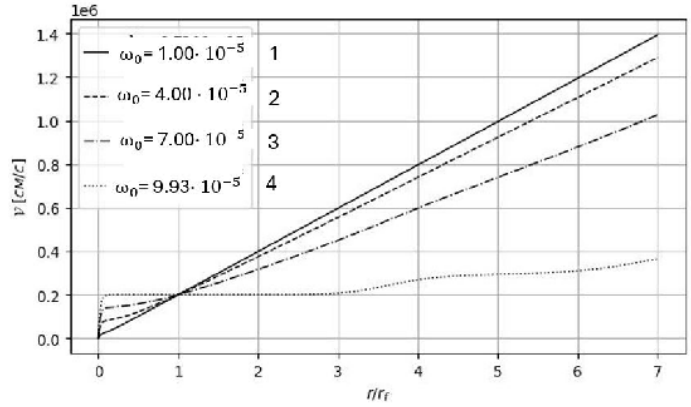


а)

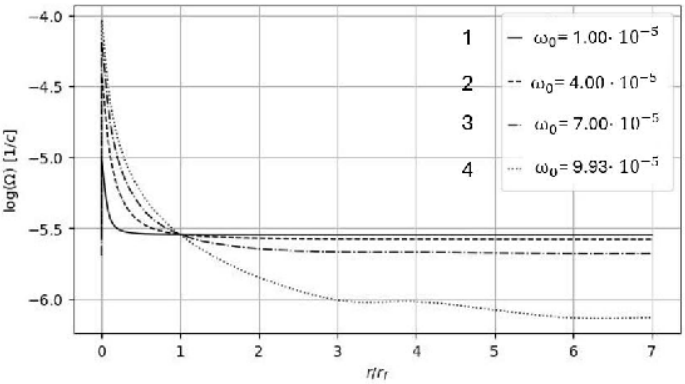
б)

Рис. 5. Распределение зональной скорости вблизи $\omega_0 = \omega_{cr}$, $(a_T / a_0 = -1)$ для нескольких значений эффективного показателя политропы n_{eff} (указаны на графиках) для $n_{He^4}(0) = 0,28$ на интервалах: ***а*** – [0, 60]; ***б*** – [0, 7] (в радиусах фотосферы)

На рис. 6 приведены графики изменения зональной и локальной угловой скорости потока для $n_{eff} = 4,5$ для нескольких значений угловой скорости ω_0 из диапазона устойчивости. Значение $n_{eff} = 4,5$ выбрано исходя из соображений, которые были обозначены при анализе распределения массы. Как видно из графиков, зональная скорость при $\omega_0 \simeq \omega_f$ меняется почти линейно, а при приближении к значению ω_{cr} уменьшается и испытывает все более существенные нелинейные изменения. Такая тенденция является общей и при других значениях n_{eff}.



а)



б)

Рис. 6. Распределение зональной скорости (***а***) и локальной угловой скорости (***б***) для нескольких значений ω при $n_{eff} = 4,5$ для $Y(0) = 0,28$ на интервале [0, 7] (в радиусах фотосферы)

13. Особенности эффектов зонального потока

Наиболее важным установленным при численном счете свойством рассматриваемых моделей является наличие относительно узкого диапазона, в котором может принимать значения локальная угловая скорость в центре звезды для того, чтобы зональный поток оставался устойчивым на всех расстояниях от центра звезды. Это означает, что если по каким-то внешним или внутренним причинам угловая скорость в центре звезды выйдет за пределы этого диапазона, то на некотором расстоянии от центра зональный поток теряет устойчивость и в этой области появляются возмущения. Если такие возмущения возникают внутри звезды, то их наличие можно будет наблюдать лишь при их выходе на поверхность звезды. Поскольку зональный поток является источником магнитного поля звезд (модель магнитного поля в условиях динамического равновесия [14]), то именно возмущения магнитного поля могут служить индикатором нарушения динамического равновесия внутри звезды. Это указывает на то, что наблюдаемые магнитные аномалии с циклом примерно 11 лет для Солнца могут быть связаны с таким нарушением устойчивости зонального потока. В этом случае можно предполагать, что основной 11-летний цикл солнечной активности может быть связан именно с резонанс-

ным воздействием орбитального движения Юпитера на флуктуации параметров зонального потока в случае $\omega_0 \simeq \omega_{cr}$. При этом нестабильность 11-летнего цикла может быть связана с воздействием орбитального движения других планет на параметры зонального потока в Солнце.

Еще одной важной особенностью полученных результатов для Солнца является близость значений параметров a_T и a_G к величине $-a_0$. В соответствии с (11) компонента ускорения свободного падения g_Ξ может быть представлена в такой форме:

$$\boldsymbol{g}_\Xi = \boldsymbol{g}_K + x^{-1}\left(a_G / a_0\right)\boldsymbol{g}_K \simeq k_T g_K,$$

где

$$k_G = 1 + a_G / a_0 = 1 + \left|a_G / a_0\right|. \tag{84}$$

Аналогичное соотношение (34) для компонентов давления можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \overleftarrow{F} + x^{-1}\left(a_T / a_0\right)\overleftarrow{F} \simeq k_T \overleftarrow{F},$$

где

$$k_T = 1 + a_T / a(t) = 1 - \left|a_T / a_0\right|. \tag{85}$$

Здесь предполагается, что для Солнца $x = a(t) / a_0 \simeq 1$ (см. [1]). Значения k_G и k_T приведены в табл. 3 и 4, из которых видно, что величины k_G и k_T малы. Это означает, что и компоненты ускорения свободного падения и силы давления, отвечающие соответственно за пространственное распределение и за зональный поток, почти совпадают друг с другом по величине, но имеют обратные знаки. Различия в величине компонентов будут существенно различаться лишь при больших амплитудах осцилляций, т.е. при $\left|x(t) - 1\right| >> 0$. Таким образом, указанные компоненты сил сбалансированы между собой, по крайней мере, для моделей с параметрами Солнца.

Таблица 3

Численные значения параметров зональной скорости
для четырех значений эффективного показателя политропы
(значения соответствуют кривым на рис. 3)

Параметр	$n_{eff} = 4{,}00$	$n_{eff} = 4{,}25$	$n_{eff} = 4{,}50$	$n_{eff} = 4{,}75$
λ	$-7{,}63750e-04$	$-2{,}7817e-04$	$-6{,}72010e-05$	$-0{,}622600e-05$
ω_{cr} [с$^{-1}$]	$4{,}336229e-05$	$6{,}122246e-05$	$9{,}937372e-05$	$2{,}220977e-04$
a_0 [см]	$1{,}389e+09$	$9.763e+08$	$5.981e+08$	$2{,}656e+08$
a_T / a_0	$\simeq -1{,}0$	$\simeq -1{,}0$	$\simeq -1{,}0$	$\simeq -1{,}0$
k_T	$\simeq 0{,}0$	$\simeq 0{,}0$	$\simeq 0{,}0$	$\simeq 0{,}0$
a_G / a_0	$-0{,}999982$	$-0{,}999963$	$-0{,}999905$	$-0{,}999526$
k_G	$0{,}18e-4$	$0{,}37e-4$	$0{,}95e-4$	$0{,}474e-3$

Таблица 4

Численные значения параметров зональной скорости для пяти значений ω_0 (значения соответствуют кривым на рис. 6)

Параметр	$\omega_0 = \omega_f$	$\omega_0 = 1,0e^{-5}$	$\omega_0 = 4,0e^{-5}$	$\omega_0 = 7,0e^{-5}$	$\omega = \omega_{cr}$
a_T / a_0	$-0,99806849$	$-0,99808650$	$-0,99838050$	$-0,09902732$	$\simeq -1,0$
k_T	$0,193151e-2$	$0,191350e-2$	$0,161950e-2$	$0,97268e-3$	$\simeq 0,0$
a_G / a_0	$-0,998069$	$-0,99808561$	$-0,99836515$	$-0,99898014$	$-0,999526$
k_G	$0,193151e-2$	$0,191439e-2$	$0,163485e-2$	$0,101986e-2$	$0,9504e-4$

С точки зрения тепловых процессов в звездах следует обратить внимание и на то обстоятельство, что отрицательные значения и близость a_T / a_0 к -1, как было описано в [2], могут существенным образом влиять на пульсации светимости звезд. Поскольку пульсации Солнца по амплитуде очень малы $\left|1 - x(t)\right| << 1$, то для Солнца полученные значения $a_T / a_0 \simeq -1$ не будут приводить к серьезным изменениям светимости, что и наблюдается в реальности. Однако для других типов пульсирующих звезд, например цефеид, такие значения a_T могут иметь существенное значение. Этот вопрос требует отдельного анализа.

С точки зрения теории тяготения найденное значение $a_G \simeq -a_0$ является фактически первой оценкой эффекта «темной материи» в строении звезд. По своему смыслу компонента ускорения свободного падения с множителем a_G, как это следует из (11), приводит к появлению вместе с функцией массивности частиц дополнительного множителя в правой части уравнения Пуассона (12), который можно интерпретировать как наличие скрытой массы или темной материи. Первоначально предполагалось, что a_G будет малой величиной и не будет играть существенной роли в распределении зональной скорости. Однако полученные оценки дают обратный результат, состоящий в том, что только при таких значениях $a_T / a_0 \simeq -1$ и $a_G / a_0 \simeq -1$ появляется устойчивость зонального потока в некотором диапазоне угловых скоростей в центре звезды. Этот вывод непосредственно следует из общего анализа устойчивости зонального потока, проведенного выше. Вместе с тем эффекты, связанные с a_G, как это следует из всего численного анализа построенной модели, в наблюдательных данных проявляются исключительно в структуре зонального потока и не оказывают существенного влияния на распределение температуры и плотности в звезде и ее окрестности. Это утверждение справедливо, по крайней мере, в случае упрощенного варианта модели в форме предположения $a_G = \text{const}$. Именно этим можно объяснить сложность выявления эффекта скрытой массы или «темной материи» при анализе данных о звездах, поскольку только на поверхности звезды можно наблюдать скорости зонального потока с помощью прямых наблюдений.

Заключение

Основными результатами работы является следующее. Во-первых, в работе был проведен аналитический и численный расчет массы вещества

звезды, сосредоточенной на разных расстояниях от центра. Этот анализ показал, что найденный в работе [1] вариант модели с $n_{eff} = 5$ и температурой $T_f \simeq 4500\,\text{K}$ и дающий период осцилляций Солнца примерно 11 лет, не может в реальности реализоваться. В такой модели масса Солнца должна быть распределена в сферической области с радиусом, равным радиусу орбиты Юпитера, поскольку орбитальный его период как раз равен примерно 11 годам. Этот результат связан с тем, что в модели динамического равновесия отдельные частицы среды, по сути, совершают орбитальное движение, аналогичное планетам, и для них выполняется фактически третий закон Кеплера. Поэтому в реальности период осцилляций Солнца будет лежать в диапазоне от нескольких часов до сотен часов. Окончательный вывод по этому поводу можно будет сделать после построения модели динамического равновесия, которая включала бы прямой учет ядерного источника в уравнении переноса тепла и учет звездного (солнечного) ветра во внешней области короны. Эти вопросы требуют отдельного анализа, а в данной работе были лишь обозначены как важные проблемы данной модели.

Во-вторых, в работе установлена явная связь между функцией массивности частиц M с нормированной величиной молярной массы в форме функции $\aleph$ (53). На основе этой связи выведены модифицированные уравнения распределения температуры и плотности в пространстве с учетом неоднородного распределения частиц среды. Эти уравнения можно рассматривать как уточненный вариант обобщенных уравнений теории Лейна – Эмдена, которые были выведены в [2]. Как было показано, на основе сравнения результатов численного анализа массивность частиц не играет существенной роли в строении Солнца, что подтверждает предварительный вывод, сделанный в работе [2]. Тем не менее для массивных звезд на последних стадиях эволюции распределение массивности может играть значительную роль в структуре таких звезд.

В-третьих, в работе рассмотрено обобщение модели зонального потока, включающего дополнительный элемент, связанный с введением в теорию обобщенной формы компоненты гравитационного поля $\boldsymbol{g}_{\Xi}$, содержащего дополнительный множитель $\Xi(\xi,\zeta,t)$, который играет важную роль в описании эффекта скрытой массы или темной материи в работе [15], где в кратком виде представлена модель структуры и эволюции дисковых структур типа галактик также в рамках квазиклассической теории тяготения. Эта квазиклассическая теория тяготения, как упоминалось во введении, является следствием новой теории пространства и материи, представленной в работах [3–8]. Как было показано, этот дополнительный множитель с параметром a_G играет важную роль в устойчивости зонального потока. В результате численного анализа распределения скорости зонального потока в работе установлено, что параметры a_G и a_T (последний был введен в работе [2]), близки к значению масштабного фактора a_0 в точке точного динамического равновесия. Этот факт указывает на то, что эффект, аналогичный эффекту скрытой массы или «темной материи», наблюдаемый в структуре галактик и их скоплений, играет существенную роль и в структуре звезд. Данный эффект в звездах, как и в галактиках, проявляет себя в структуре зонального потока, т.е. параметрах

вращения системы вокруг центральной оси. В пространственном распределении температуры и плотности для звезд этот эффект практически не проявляет себя. Поскольку наблюдения за зональным потоком в звездах и их окрестностях сосредоточены в основном вблизи поверхности звезд, то эффект, аналогичный эффекту «темной материи», не обнаруживается в прямых наблюдениях в Солнечной и других звездных системах. Тем не менее, поскольку параметры a_G / a_0 и $a_T / a0$ немалые и близки по модулю к 1, то эти эффекты могут быть обнаружены в реальных данных при соответствующем анализе.

В-четвертых, в работе показано, что в модели имеется параметр – локальная угловая скорость зонального потока в центре звезды ω_0, который для устойчивости зонального потока должен находиться в достаточно узком диапазоне значений. Это может указывать на особую роль зонального потока в возникновении резонансных явлений в структуре звезды, связанных с изменением ω_0 под действием внешних сил. Можно предполагать, что 11-летний цикл солнечной активности является следствием такого резонансного воздействия, например, со стороны орбитального движения Юпитера и других планет. Однако этот вопрос требует дополнительного анализа.

Приложение

1. Под маркерами понимаются функции $e^a(r,z,t)$, $a=1,2$, удовлетворяющие уравнениям переноса потоком со скоростью $v=(u,v,w)$:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t}+(v,\nabla)e^a=0,\ a=1,2. \tag{86}$$

Обозначим через $|J|$ якобиан преобразования от маркеров к физическим координатам:

$$|J|=\left|\det\hat{J}\right|,\ \hat{J}=\begin{vmatrix} e_r^1 & e_z^1 \\ e_r^2 & e_z^2 \end{vmatrix}. \tag{87}$$

Тогда дифференцируя (86) и сворачивая результат с элементами матрицы, обратной к $\hat{J}$, приходим к тождеству:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial e^b}\left(\frac{\partial^2 e^a}{\partial x^\beta \partial t}+\frac{\partial}{\partial x^\beta}(v,\nabla)e^a\right)=\frac{\partial}{\partial t}N+\mathrm{d}iv(Nv)=0, \tag{88}$$

где $N=r^{-1}|J|$. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющемуся индексу. Это тождество следует рассматривать как закон сохранения числа маркеров при переносе среды потоком со скоростью v.

2. Для вывода представления поля тяготения с помощью маркеров рассмотрим элементарное тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a}e^a=\frac{\partial}{\partial e^1}e^1+\frac{\partial}{\partial e^2}e^2=2.$$

Переходя в этом тождестве к физическим координатам в цилиндрической системе координат, преобразуем его к такой форме:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rr^{-1}|J|e^{a}\frac{\partial r}{\partial e^{a}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r^{-1}|J|e^{a}\frac{\partial z}{\partial e^{a}}\right)=2r^{-1}|J|.$$

Используя это тождество, после простых преобразований получаем обобщенное уравнение Пуассона (12).

3. Компоненты вектора $K=\left(K^{1},K^{2}\right)$ рассчитываются исходя из того, что производные $\partial x^{\alpha}/\partial e^{a}$ являются элементами матрицы Якоби с элементами $\partial e^{a}/\partial x^{\alpha}$. В результате находим:

$$|J|\frac{\partial r}{\partial e^{1}}=\frac{\partial e^{2}}{\partial z},\ |J|\frac{\partial r}{\partial e^{2}}=-\frac{\partial e^{2}}{\partial r},$$

$$|J|\frac{\partial z}{\partial e^{1}}=-\frac{\partial e^{1}}{\partial z},\ |J|\frac{\partial z}{\partial e^{2}}=\frac{\partial e^{1}}{\partial r},$$

отсюда получаем:

$$|J|K^{1}=\frac{\partial e^{2}}{\partial z}e^{1}-\frac{\partial e^{1}}{\partial z}e^{2},\ |J|K^{2}=\frac{\partial e^{1}}{\partial r}e^{2}-\frac{\partial e^{2}}{\partial r}e^{1}. \tag{89}$$

Переходя в этих выражениях к автомодельным переменным, получаем следующие соотношения:

$$|J|K^{1}=\frac{1}{a}\left(E^{1}\frac{\partial E^{2}}{\partial\zeta}-\frac{\partial E^{1}}{\partial\zeta}E^{2}\right)=\frac{1}{a}K^{1}(\xi,\zeta),$$

$$|J|K^{2}=-\frac{1}{a}\left(E^{1}\frac{\partial E^{2}}{\partial\xi}-\frac{\partial E^{1}}{\partial\xi}E^{2}\right)=\frac{1}{a}K^{2}(\xi,\zeta).$$

Отсюда прямыми вычислениями находим:

$$\frac{\partial K_{1}}{\partial\xi}+\frac{\partial K_{2}}{\partial\zeta}=2J. \tag{90}$$

Список литературы

1. Журавлев В. М. Модели динамического равновесия астрофизических объектов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2022. Т. 162, № 6. С. 850–877.
2. Журавлев В. М. Динамическое равновесие и осцилляции химически неоднородных звезд // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 158–188.
3. Журавлев В. М. Геометрия, топология и физические поля. Ч. I: Заряд и электромагнитное взаимодействие // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 4. С. 6–24.

4. Журавлев В. М. Геометрия, топология и физические поля. Ч. II: Масса и гравитация // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2014. № 4. С. 25–39.
5. Журавлев В. М. Геометрия, топология и физические поля. Часть III: Уравнение индукции фундаментальных полей // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 3. С. 44–60.
6. Журавлев В. М. Геометрия, топология и физические поля. Ч. IV: Топологическая структура элементарных частиц // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2015. № 4. С. 104–118.
7. Zhuravlev V. M. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, № 2. P. 95–104.
8. Zhuravlev V. M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles // Gravitation and Cosmology. 2022. Vol. 28, № 4. P. 319–341.
9. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М. : Наука, 1971. 484 с.
10. Горбацкий В. Г. Космическая газодинамика. М. : Наука, 1977. 360 с.
11. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М. : Наука, 1980. 320 с.
12. Lane J. H. American Journal of Science and Arts. Second Series. 1870.
13. Emden R., Teubner B.G. Gaskugeln. Leipzig, 1907.
14. Журавлев В. М. Магнитное поле звезд, находящихся в динамическом равновесии // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2022. № 4. С. 13–30.
15. Журавлев В. М. Эволюция пылевых дисков и джеты в моделях динамического равновесия. Роль «темной материи» // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2024. № 1. С. 54–58.

References

1. Zhuravlev V.M. Models of dynamic equilibrium of astrophysical objects. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Journal of experimental and theoretical physics.* 2022;162(6):850–877. (In Russ.)
2. Zhuravlev V.M. Dynamic equilibrium and oscillations of chemically inhomogeneous stars. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(4):158–188. (In Russ.)
3. Zhuravlev V.M. Geometry, topology and physical fields. Part 1: Charge and electromagnetic interaction. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2014;(4):6–24. (In Russ.)
4. Zhuravlev V.M. Geometry, topology and physical fields. Part 2: Mass and gravity. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2014;(4):25–39. (In Russ.)
5. Zhuravlev V.M. Geometry, topology and physical fields. Part 3: Induction equation of fundamental fields. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions.* 2015;(3):44–60. (In Russ.)
6. Zhuravlev V.M. Geometry, topology and physical fields. Part 4: Topological structure of elementary particles. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2015;(4):104–118. (In Russ.)
7. Zhuravlev V.M. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter. *Gravitation and Cosmology*. 2017;23(2):95–104.
8. Zhuravlev V.M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles. *Gravitation and Cosmology*. 2022;28(4):319–341.
9. Zel'dovich Ya.B., Novikov I.D. *Teoriya tyagoteniya i evolyutsiya zvezd = The theory of gravitation and the evolution of stars*. Moscow: Nauka, 1971:484. (In Russ.)

10. Gorbatskiy V.G. *Kosmicheskaya gazodinamika = Space gas dynamics.* Moscow: Nauka, 1977:360. (In Russ.)
11. Bogoyavlenskiy O.I. *Metody kachestvennoy teorii dinamicheskikh sistem v astrofizike i gazovoy dinamike = Methods of qualitative theory of dynamic systems in astrophysics and gas dynamics*. Moscow: Nauka, 1980:320. (In Russ.)
12. Lane J.H. *American Journal of Science and Arts. Second Series*. 1870.
13. Emden R., Teubner B.G. *Gaskugeln*. Leipzig, 1907.
14. Zhuravlev V.M. Magnetic field of stars in dynamic equilibrium. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions.* 2022;(4):13–30. (In Russ.)
15. Zhuravlev V.M. Evolution of dust disks and jets in dynamic equilibrium models. The role of "dark matter". *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2024;(1):54–58. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник лаборатории гравитации, космологии и астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова (Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, 4/5)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, researcher of the laboratory of gravity, cosmology and astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov (4/5 Lenina square, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 03.05.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.06.2024

Принята к публикации / Accepted 22.07.2024