ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 120, № 1
июль, 1999

 В. М. Журавлев*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

На основе специального представления операторов Лапласа и Даламбера строятся точные решения многомерных уравнений Лиувилля в классе функциональных форм степени n, равной размерности координатного пространства. Соответствующие решения уравнения Лиувилля полностью описаны в размерности координатного пространства $d = 3, 4$. В размерности $d > 4$ описаны их общий вид и способ получения алгебраических уравнений на коэффициенты функциональных n-форм.

Точно решаемые модели нелинейных процессов, в том числе и волновых, представляют собой, как правило, в каждом из разделов теоретической и математической физики тот остов, на который в дальнейшем опираются все последующие теоретические построения данного раздела. Чаще всего такими решениями являются различные автомодельные решения. Значительный прогресс в построении точно решаемых моделей в последнее время связан с развитием метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) (см., например, [1–3] и библиографию в этих работах) и различных его модификаций (например, в [4, 5]) для нелинейных уравнений в частных производных. Однако существуют два важных фактора, заставляющих искать некоторые альтернативы МОЗР в задачах распространения нелинейных волн. Во-первых, применение МОЗР в случае многомерных систем размерности $d > 1 + 2$ испытывает определенные трудности. Поэтому на практике использование МОЗР в прикладных задачах связано с понижением размерности координатного пространства с помощью специальных предположений относительно характера процесса, т.е. связано с сужением класса изучаемых явлений. Во-вторых, существуют области физики, в которых использование МОЗР в исследовании поведения волновых процессов затруднено вследствие их диссипативного характера. Например, к таким ситуациям относятся автоволновые процессы в средах с диффузией.

В работах [6, 7] был предложен класс моделей нелинейных волновых процессов в двумерных активных средах с диффузией, допускающих точные решения. Модели такого рода, имеющие размерность $1+2$, представляют собой обобщение двумеризованных цепочек Тоды (ЦТ) на случай двумерных диффузионных процессов и могут быть названы

*Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия.
E-mail: zhurav@themp.univ.simbirsk.su

диффузионными ЦТ. Однако следует заметить, что диффузионные ЦТ естественным образом обобщаются на случай процессов, описывающихся не только уравнениями с диффузионным оператором, но и с параболическим волновым оператором Шредингера, что важно для прикладных задач в нелинейной оптике и, возможно, в квантовой механике. Класс точных решений, полученный в работах [6, 7] для диффузионных ЦТ, является естественным обобщением решений двумеризованных ЦТ [4] и уравнения Лиувилля [8] в виде двумерной эрмитовой формы. Полезность диффузионных ЦТ для описания волн в двумерных средах с диффузией заставляет искать обобщения развитого подхода на случай моделей с координатным пространством размерности $d > 2$, что обеспечило бы аппарат описания нелинейных волн многомерными моделями с богатым классом точных решений, имеющих форму нелинейности типа нелинейности Тоды. Модели такого типа гораздо чаще встречаются на практике [7], чем многомерные точно интегрируемые модели, задаваемые многомерными вариантами МОЗР.

Первым шагом реализации программы построения многомерных моделей диффузионных ЦТ и их аналогов с другим типом операторов (например, с оператором Шредингера или с оператором телеграфного уравнения) по аналогии с двумерным случаем является исследование многомерных уравнений Лиувилля и многомеризованных ЦТ с операторами Лапласа и Даламбера в случае размерности $d > 2$. Такие уравнения представляют интерес и сами по себе, например, как частные случаи уравнений Клейна–Гордона, которые играют важную роль в современной теории поля. Примером может служить и уравнение Лиувилля в трехмерном пространстве, которое описывает статические изотермические конфигурации самогравитирующего идеального газа, находящегося в термодинамическом равновесии, описываемом распределением Больцмана. Уравнения такого рода встречаются в эйнштейновской теории гравитационного поля с материей в форме самогравитирующего самодействующего скалярного поля и т.п.

В настоящей работе предлагается подход к построению точных решений таких уравнений в размерности пространства-времени $d = 3, 4$ и выше, основанный на идее использования квадратичных форм в случае $d = 2$. Обобщение этой идеи на многомерный случай состоит в специальном представлении операторов Лапласа и Даламбера в d-мерном координатном пространстве, которое называется ниже внедиагональным, и записи решений уравнений Лиувилля в виде форм степени d от набора функций, зависящих специальным образом от координатных переменных.

1. ВНЕДИАГОНАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ДАЛАМБЕРА И ЛАПЛАСА

Основная идея, на которой базируется метод квадратичных форм в теории двумеризованных ЦТ, предложенный в [6], состоит в том, что двумерные операторы Лапласа и Даламбера могут быть с помощью подходящей замены координат представлены в виде смешанной второй производной

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \qquad \Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Здесь $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Именно существование такого представления приводит к основному тождеству для квадратичных форм

$$\Psi(z,\bar{z}) = \sum_{i=1}^{N} a_i |\psi_i^2|,$$

которое можно записать в виде

$$\Delta \ln \Psi = \frac{W}{\Psi^2}, \tag{1}$$

где

$$W(z,\bar{z}) = \sum_{i<j=1}^{N} a_i a_j |w_{ij}^2|, \qquad w_{ij}(z) = \psi_i(z)\frac{d}{dz}\psi_j(z) - \psi_j(z)\frac{d}{dz}\psi_1(z).$$

Например, в случае $N = 2$ имеем

$$\Psi(z,\bar{z}) = a_1|\psi_1|^2 + a_2|\psi_2|^2, \qquad W(z,\bar{z}) = a_1 a_2 |w_{12}|^2.$$

Возможность использовать тождество (1) в многомерных задачах возникает благодаря специальному выбору системы координат, при котором операторы Лапласа и Даламбера имеют вид, который можно назвать внедиагональным. Будем называть внедиагональным такое представление операторов Лапласа и Даламбера, при которых они имеют вид суммы смешанных частных производных по координатам

$$\Delta = \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \varepsilon_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i<j}^{N} \gamma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}, \tag{2}$$

где

$$\varepsilon_i = \pm 1, \qquad z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \tag{3}$$

а a_{ij} – коэффициенты некоторого линейного преобразования координат $x \xrightarrow{\xi} z$, γ_{ij} – матрица постоянных коэффициентов с нулевой диагональю $\gamma_{ii} \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что в случае размерности пространства $n > 2$ внедиагональное представление является неоднозначным. Для того чтобы получить такое представление, необходимо потребовать выполнения $n(n-1)/2$ условий на n^2 коэффициентов a_{ij} преобразования $x \xrightarrow{\xi} z$ (3). Эти условия следующие:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} a_{kj} = \gamma_{ik}, \qquad i,j,k = 1,\ldots,n.$$

В силу свойств матрицы γ_{ij} эти соотношения для каждого $i = k$ имеют вид

$$\varepsilon_1 (a_{i1})^2 + \varepsilon_2 (a_{i2})^2 + \cdots + \varepsilon_n (a_{in})^2 = 0, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Из последних соотношений следует, что для оператора Лапласа (т.е. при всех $\varepsilon_i = +1$) для каждого номера i среди чисел a_{ij} должно быть хотя бы одно комплексное, и, следовательно, все координаты z_i становятся комплексными. Комплексность координат z_i для операторов Лапласа фактически удваивает реальную размерность координатного пространства, которую необходимо понижать специальным требованием действительности решений, что важно с точки зрения физических приложений. Поэтому случай уравнений Лиувилля с оператором Лапласа будет рассмотрен отдельно в заключительной части данной работы.

2. УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ С ОПЕРАТОРОМ ДАЛАМБЕРА В РАЗМЕРНОСТИ $d = 3$

Для того чтобы описать процедуру построения точных решений, в качестве примера рассмотрим уравнение Лиувилля с оператором Даламбера в пространстве-времени размерности $n = 3, 4$. Это уравнение имеет вид

$$\Box\Phi(t, x, y) = \Omega_0 \exp\{-2\Phi\}, \tag{4}$$

где Ω_0 – некоторая постоянная. С помощью преобразования

$$z_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}(t + y), \qquad z_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}(t - 2y), \qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(t + y)$$

представим оператор Даламбера в пространстве R^3 в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_3} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3}. \tag{5}$$

Будем искать решение уравнения (4) следующим образом:

$$\Phi(t, x, y) = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1, z_2, z_3)}{\sqrt{U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)W_{12}(z_3)}}\right\}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\Psi(z_1, z_2, z_3) = {} & \psi_1(z_1)\phi_1(z_2)\big[a\chi_1(z_3) + b\chi_2(z_3)\big] + \\ & + \psi_2(z_1)\phi_2(z_2)\big[c\chi_1(z_3) + d\chi_2(z_3)\big] + \\ & + \psi_1(z_1)\phi_2(z_2)\big[p\chi_1(z_3) + q\chi_2(z_3)\big] + \\ & + \psi_2(z_1)\phi_1(z_2)\big[r\chi_1(z_3) + s\chi_2(z_3)\big],\end{aligned} \tag{7}$$

$$U_{12}(z_1) = \psi_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\psi_2 - \psi_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\psi_1, \tag{8}$$

$$V_{12}(z_2) = \phi_1 \frac{\partial}{\partial z_2}\phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\phi_1, \tag{9}$$

$$W_{12}(z_3) = \chi_1 \frac{\partial}{\partial z_3}\chi_2 - \chi_2 \frac{\partial}{\partial z_3}\chi_1. \tag{10}$$

Как следует из (7), функция Ψ представляет собой кубическую форму в двумерном векторном пространстве функций ψ, ϕ, χ, параметрически зависящих от соответствующих координат. Вычисляя результат действия оператора $\Box$ на функцию Φ, получаем

$$\Box\Phi = \frac{U_{12}V_{12}W_{12}}{\Psi^2}\left\{\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} + \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} + \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)}\right\}, \tag{11}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
Q_1(z_1) = A_1\psi_1^2 + B_1\psi_2^2 + C_1\psi_1\psi_2,\\
Q_2(z_2) = A_2\phi_1^2 + B_2\phi_2^2 + C_2\phi_1\phi_2,\\
Q_3(z_3) = A_3\chi_1^2 + B_3\chi_2^2 + C_3\chi_1\chi_2,\\
A_1 = ac - qr, \quad B_1 = bd - qs, \quad C_1 = ad - ps + bc - qr,\\
A_2 = as - bp, \quad B_2 = pd - qc, \quad C_2 = ad + ps - bc - qr,\\
A_3 = aq - bp, \quad B_3 = pd - sc, \quad C_3 = ad - ps - bc + qr.
\end{gathered} \tag{12}$$

Утверждение 1. *Уравнение Лиувилля* (4) *в размерности* $d = 3$ *с оператором Даламбера* (5) *имеет класс точных решений в форме* (6), *в которой коэффициенты кубической формы* (7) *удовлетворяют соотношениям* (12) *при выполнении следующих условий*:

$$\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} = \lambda_1 = \mathrm{const}, \qquad \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 = \mathrm{const}, \qquad \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 = \mathrm{const}, \tag{13}$$

где постоянные λ_1, λ_2, λ_3 *связаны одним соотношением*

$$\Omega_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \tag{14}$$

Доказательство. Соотношения (13) и (14) являются достаточными условиями, при которых правая часть тождества (11) может быть записана в форме

$$\frac{U_{12}V_{12}W_{12}}{\Psi^2}\left\{\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} + \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} + \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)}\right\} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\frac{U_{12}V_{12}W_{12}}{\Psi^2} = \Omega_0 e^{-2\Phi}.$$

В результате тождество (11) имеет вид уравнения (4).

Найдем конкретный вид решений (6). Уравнения (13) представляют собой однотипные дифференциальные уравнения на функции ψ_1, ψ_2, ϕ_1, ϕ_2, χ_1, χ_2. Например, для функций ψ_1, ψ_2 имеем

$$\psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2 = \frac{1}{\lambda_1}(A_2\psi_1^2 + B_2\psi_2^2 + C_2\psi_1\psi_2). \tag{15}$$

Это уравнение после подстановки $u(z_1) = \psi_2(z_1)/\psi_1(z_1)$ принимает следующий вид:

$$u' = \frac{1}{\lambda_1}(A_1 + B_1 u^2 + C_1 u).$$

Обозначим через u_1 и u_2 корни квадратного алгебраического уравнения $A_1 + B_1 u^2 + C_1 u = 0$:

$$u_1 = -\frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4A_1B_1}}{2B_1}, \qquad u_2 = -\frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4A_1B_1}}{2B_1},$$

тогда решение имеет вид

$$u(z_1) = \frac{u_1 + u_2 q_1 \exp\{\mu_1 z_1\}}{1 + q_1 \exp\{\mu_1 z_1\}} = (u_2 - u_1)\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu_1 z_1}{2} + \xi_1\right) + (u_1 + u_2), \tag{16}$$

где q_1 – произвольная постоянная, а

$$\mu_1 = \frac{u_2 - u_1}{\lambda_1}.$$

Аналогичные решения получаются для функций $v(z_2) = \phi_2(z_2)/\phi_1(z_2)$ и $w(z_3) = \chi_2(z_3)/\chi_1(z_3)$:

$$\begin{aligned} v(z_2) &= \frac{v_1 + v_2 q_2 \exp\{\mu_2 z_2\}}{1 + q_2 \exp\{\mu_2 z_2\}} = (v_2 - v_1)\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu_2 z_2}{2} + \xi_2\right) + (v_1 + v_2), \\ w(z_3) &= \frac{w_1 + w_2 q_3 \exp\{\mu_3 z_3\}}{1 + q_3 \exp\{\mu_3 z_3\}} = (w_2 - w_1)\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu_3 z_2}{2} + \xi_3\right) + (w_1 + w_2), \end{aligned} \tag{17}$$

где q_2, q_3 – произвольные постоянные, $\xi_i = \ln\sqrt{q_i}$, v_1, v_2 и w_1, w_2 – корни соответствующих квадратных уравнений

$$A_2 + B_2 v^2 + C_2 v = 0, \qquad A_3 + B_3 w^2 + C_3 w = 0$$

и

$$\mu_2 = \frac{v_2 - v_1}{\lambda_2}, \qquad \mu_3 = \frac{w_2 - w_1}{\lambda_3}.$$

Окончательно получаем выражение для Ψ:

$$\begin{aligned} \Psi(z_1, z_2, z_3) = \psi_2(z_1)\phi_2(z_2)\chi_2(z_3)\big[&au(z_1)v(z_2)w(z_3) + \\ &+ bu(z_1)v(z_2) + pu(z_1)w(z_3) + rv(z_2)w(z_3) + \\ &+ cw(z_3) + qu(z_1) + sv(z_2) + d\big]. \end{aligned}$$

После подстановки этого выражения в (6) решение для Φ (7) не будет содержать произвольных функций $\psi_2(z_1)$, $\phi_2(z_2)$, $\chi_2(z_3)$ и будет выражаться только через функции $u(z_1), v(z_2), w(z_3)$.

3. УРАВНЕНИЕ ДАЛАМБЕРА В РАЗМЕРНОСТИ $d = 3$

Заметим, что вместе с построением класса точных решений уравнений Лиувилля получено специальное представление для решений уравнения Даламбера.

Утверждение 2. *Уравнение Даламбера*

$$\Box\Phi = 0 \tag{18}$$

имеет класс решений, которые представимы в виде

$$\Phi = \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0} \ln\left\{\frac{\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,z_1,z_2,z_3)}{\sqrt{U_{12}(\lambda_1,z_1)V_{12}(\lambda_2,z_2)W_{12}(\lambda_3,z_3)}}\right\} \tag{19}$$

либо в более простой форме

$$\Phi = \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0} \ln\bigl\{\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,z_1,z_2,z_3)\bigr\}, \tag{20}$$

где в обоих случаях для каждой тройки комплексных чисел λ_1, λ_2, λ_3, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

функция $\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,z_1,z_2,z_3)$ имеет вид кубической формы (7) *относительно функций $\psi_1(z_1)$, $\phi_1(z_2)$, $\chi_1(z_3)$, $\psi_2(z_1)$, $\phi_2(z_2)$, $\chi_2(z_3)$, удовлетворяющих условиям* (13), *с коэффициентами, удовлетворяющими* (12).

Полученные решения для уравнения Даламбера представляют собой разложение решений в ряд по негармоническим волнам, относящихся к нескольким основным типам. Для действительных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а также u_i, v_i, w_i функции ψ_i, ϕ_i, χ_i имеют форму "кинков". При выполнении условий действительности для каждой компоненты эти общие свойства сохраняются и у каждого из элементов суммы (20). В случае комплексности постоянных λ_1, λ_2, λ_3 поведение отдельных элементов сумм в (19) и (20) может быть достаточно сложным. Заметим также, что суммы в (19) и (20) могут быть модифицированы дифференцированием по координатам и ее числовым параметрам. В результате могут быть получены решения уравнения Даламбера (18) в форме рядов с более общим видом элементов сумм и специальными свойствами.

4. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Более общие решения могут быть получены следующими двумя способами. Первый из них состоит в возможности отменить одно из условий (13), например первое (для функций от z_1). В этом случае решение для Φ можно записать в виде

$$\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1,z_2,z_3)}{\sqrt{R_1(z_1)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)W_{12}(z_3)}}\right\}, \tag{21}$$

где
$$R_1(z_1) = \frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} + \lambda_2 + \lambda_3\right), \tag{22}$$
а все остальные функции от z_2, z_3 описываются теми же соотношениями (7). Отличие от рассмотренного случая состоит в том, что теперь произвольны функции $\psi_1(z_1)$, $\psi_2(z_1)$ и, следовательно, $u(z_1)$, а функции $v(z_2)$, $w(z_3)$ определяются соотношениями (17). По аналогии решения этого типа могут быть получены отменой любого другого из условий в (13). В каждом из этих случаев решение зависит от одной произвольной функции: либо $u(z_1)$, либо $v(z_2)$, либо $w(z_3)$. С помощью прямой проверки доказывается следующее утверждение.

Утверждение 3. *Уравнение Лиувилля (4) с оператором Даламбера (5) в размерности $d = 3$ имеет класс точных решений в форме (21), в которой коэффициенты кубической формы (7) удовлетворяют соотношениям*
$$\begin{gathered} Q_2(z_2) = A_2\phi_1^2 + B_2\phi_2^2 + C_2\phi_1\phi_2, \\ Q_3(z_3) = A_3\chi_1^2 + B_3\chi_2^2 + C_3\chi_1\chi_2, \\ A_2 = as - bp, \qquad B_2 = pd - qc, \qquad C_2 = ad + ps - bc - qr, \\ A_3 = aq - bp, \qquad B_3 = pd - sc, \qquad C_3 = ad - ps - bc + qr \end{gathered} \tag{23}$$
при выполнении (22) и условий
$$\frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 = \mathrm{const}, \qquad \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 = \mathrm{const}, \tag{24}$$
где постоянные λ_2, λ_3 произвольны.

Еще один класс решений параметризуется следующим образом.

Утверждение 4. *Уравнение Лиувилля (4) с оператором Даламбера (5) в размерности $d = 3$ имеет класс точных решений в форме*
$$\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1, z_2, z_3)}{\sqrt{\Theta(z_1, z_2, z_3)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)W_{12}(z_3)}}\right\}, \tag{25}$$
где $\Theta(z_1, z_2, z_3) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$. При этом коэффициенты кубической формы $\Psi(z_1, z_2, z_3)$ (7) удовлетворяют тем же соотношениям (12), а сами функции ψ_i, ϕ_i, χ_i – новым уравнениям
$$\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} = \lambda_1 z_1, \qquad \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 z_2, \qquad \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 z_3 \tag{26}$$
с постоянными λ_1, λ_2, λ_3, удовлетворяющими соотношению
$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0. \tag{27}$$

Доказательство. В силу условий (26) тождество (11) принимает вид

$$\Box \ln \Psi = \frac{\Theta(z_1, z_2, z_3)}{\Psi^2}.$$

Основываясь на легко поверяемом тождестве

$$\Box \ln \Theta(z_1, z_2, z_3) = -\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\Theta^2(z_1, z_2, z_3)}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right), \tag{28}$$

выражение в правой части которого обращается тождественно в нуль при условии (27), получаем требуемое утверждение.

Решения вида (25) зависят вновь только от функций $u(z_1)$, $v(z_2)$, $w(z_3)$, которые теперь имеют следующий вид:

$$u(z_1) = \frac{u_1 - u_2 q_1 z_1^{\mu_1}}{1 - q_1 z_1^{\mu_1}}, \quad v(z_2) = \frac{v_1 - v_2 q_2 z_2^{\mu_2}}{1 - q_2 z_2^{\mu_2}}, \quad w(z_3) = \frac{w_1 - w_2 q_3 z_3^{\mu_3}}{1 - q_3 z_3^{\mu_3}}, \tag{29}$$

где все постоянные определяются теми же соотношениями, что и для решений (16) и (17).

Следствием тождества (28) является и следующий результат. Рассмотрим последовательность функций

$$\Theta_a(z_1, z_2, z_3) = f_1^{(a)}(z_1) + f_2^{(a)}(z_2) + f_3^{(a)}(z_3), \qquad a = 1, 2, \dots .$$

В силу тождества (28) эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\Box \ln \Theta_a = -\frac{f_1^{(a)'} f_2^{(a)'} f_3^{(a)'}}{\Theta_a^2(z_1, z_2, z_3)}\left(\frac{1}{f_1^{(a)'}} + \frac{1}{f_2^{(a)'}} + \frac{1}{f_3^{(a)'}}\right).$$

Здесь и далее введено обозначение

$$f_k^{(a)'}(z_k) = \frac{df_k^{(a)}(z_k)}{dz_k}.$$

Отсюда следует утверждение.

Утверждение 5. *Последовательность функций*

$$\Phi_a(z_1, z_2, z_3) = \ln\left[\frac{\Theta_a(z_1, z_2, z_3)}{h_1^{(a)} h_2^{(a)} h_3^{(a)}}\right]$$

удовлетворяет уравнениям ЦТ

$$\Box \Phi_a = e^{-2\Phi_a + \Phi_{a+1}}, \qquad a = 1, 2, \dots, \tag{30}$$

в пространстве размерности $d = 3$, *если функции* $f_k^{(a)}(z_k)$ *и* $h_k^{(a)}(z_k)$ *удовлетворяют рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$f_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{1}{f_k^{(a)\prime}(z_k)}, \qquad h_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{\left[h_k^{(a)}(z_k)\right]^2}{f_k^{(a)\prime}(z_k)},$$
$$k = 1, 2, 3, \qquad a = 1, 2, \ldots .$$

ЦТ (30) будет конечной, если существует такой номер $a = a_0$, для которого

$$f_k^{(a_0)}(z_k) = \mathrm{const}, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Цепочка будет периодической, если для некоторого номера $a = a_0$ и каждого номера $k = 1, 2, 3$ выполняются уравнения

$$f_k^{(a_0)}(z_k) = f_k^{(1)}(z_k), \qquad h_k^{(a_0)}(z_k) = h_k^{(1)}(z_k).$$

5. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДАЛАМБЕРА И ЛИУВИЛЛЯ В РАЗМЕРНОСТИ $d = 4$

Для уравнения Лиувилля в пространстве-времени размерности 4 действительные решения строятся аналогичным образом. Наиболее простое внедиагональное представление оператора Даламбера для $n = 4$ имеет вид

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_3^*} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2},$$

где $z_3 = (x+iy)/2$, $z_3^* = (x-iy)/2$, $z_1 = (z-t)/2$, $z_2 = (z+t)/2$. Это представление отличается от рассмотренного в предыдущем разделе тем, что число смешанных производных во внедиагональном представлении оператора Даламбера меньше максимального и равно двум. Однако все основные построения решений аналогичны тем, которые были проведены в размерности $d = 3$. Точные решения уравнения Лиувилля в размерности $d = 4$ представляют практический интерес. Поэтому в данном разделе опишем только сами точные решения, не формулируя результаты в форме утверждений, которые будут приведены в следующем разделе.

Решение следует искать в виде

$$\Phi(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1, z_2, z_3, z_3^*)}{\sqrt{U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)\left|W_{12}(z_3)\right|^2}}\right\}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\Psi(z_1, z_2, z_3, z_3^*) &= A(z_1, z_2)|\psi_1|^2 + B(z_1, z_2)|\psi_2|^2 + \\ &\quad + C(z_1, z_2)\psi_1\psi_2^* + C^*(z_1, z_2)\psi_2\psi_1^* = \\ &= K(z_3, z_3^*)\phi_1\chi_1 + L(z_3, z_3^*)\phi_2\chi_2 - \\ &\quad - M(z_3, z_3^*)\phi_1\chi_2 + N(z_3, z_3^*)\phi_2\chi_1,\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
A(z_1,z_2) &= a_1\phi_1(z_1)\chi_1(z_2)+b_1\phi_2(z_1)\chi_2(z_2)+c_1\phi_1(z_1)\chi_2(z_2)+d_1\phi_2(z_1)\chi_1(z_2),\\
B(z_1,z_2) &= a_2\phi_1(z_1)\chi_1(z_2)+b_2\phi_2(z_1)\chi_2(z_2)+c_2\phi_1(z_1)\chi_2(z_2)+d_2\phi_2(z_1)\chi_1(z_2),\\
C(z_1,z_2) &= a_3\phi_1(z_1)\chi_1(z_2)+b_3\phi_2(z_1)\chi_2(z_2)+c_3\phi_1(z_1)\chi_2(z_2)+d_3\phi_2(z_1)\chi_1(z_2),\\
K(z_3,z_3^*) &= a_1|\psi_1|^2+a_2|\psi_2|^2+a_3\psi_1\psi_2^*+a_3^*\psi_1^*\psi_2,\\
L(z_3,z_3^*) &= b_1|\psi_1|^2+b_2|\psi_2|^2+b_3\psi_1\psi_2^*+b_3^*\psi_1^*\psi_2,\\
M(z_3,z_3^*) &= c_1|\psi_1|^2+c_2|\psi_2|^2+c_3\psi_1\psi_2^*+c_3^*\psi_1^*\psi_2,\\
N(z_3,z_3^*) &= d_1|\psi_1|^2+d_2|\psi_2|^2+d_3\psi_1\psi_2^*+d_3^*\psi_1^*\psi_2.
\end{aligned}$$

Здесь f^* – комплексно-сопряженные величины к f, числа a_i, b_i, c_i, d_i – действительные для $i=1,2$ и комплексные для $i=3$, функции $\psi_1(z_3)$, $\psi_2(z_3)$ – комплексные, а $\phi_1(z_1)$, $\phi_2(z_1)$, $\chi_1(z_2)$, $\chi_2(z_2)$ – действительные. Заметим, что теперь функция Ψ представляет собой форму четвертой степени. Для Φ получаем следующее тождество:

$$\Box\Phi = \frac{Q(z_1,z_2)\big|W_{12}(z_3)\big|^2}{\Psi^2}+\frac{R(z_3,z_3^*)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)}{\Psi^2}, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned}
Q(z_1,z_2) &= \big[A(z_1,z_2)B(z_1,z_2)-\big|C(z_1,z_2)\big|^2\big],\\
R(z_3,z_3^*) &= \big[K(z_3,z_3^*)L(z_3,z_3^*)-M(z_3,z_3^*)N(z_3,z_3^*)\big].
\end{aligned} \tag{34}$$

Для того чтобы правая часть тождества (33) превращалась в уравнение Лиувилля, необходимо потребовать, чтобы функции $Q(z_1,z_2)$ и $R(z_3,z_3^*)$ имели вид

$$\begin{aligned}
Q(z_1,z_2) &= Q_1(z_1)Q_2(z_2), & R(z_3,z_3^*) &= R_1(z_3)R_2(z_3^*),\\
Q_1(z_1) &= (p_1\phi_1^2+q_1\phi_2^2+r_1\phi_1\phi_2), & Q_2(z_2) &= (p_2\chi_1^2+q_2\chi_2^2+r_2\chi_1\chi_2),\\
R_1(z_3) &= (\alpha\psi_1^2+\beta\psi_2^2+\gamma\psi_1\psi_2), & R_2(z_3^*) &= (\alpha^*\psi_1^{*2}+\beta\psi_2^{*2}+\gamma\psi_1^*\psi_2^*).
\end{aligned}$$

Последние условия эквивалентны системе алгебраических уравнений, связывающих постоянные a_i, b_i, c_i, d_i, p_μ, q_μ, r_μ, α, β, γ. Эти алгебраические уравнения выписываются без труда, но представляют собой несколько громоздкую систему, поэтому здесь ее приводить не будем. Достаточными условиями превращения (33) в уравнение Лиувилля являются условия типа (13):

$$\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)}=\lambda_1=\mathrm{const},\qquad \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)}=\lambda_2=\mathrm{const}, \tag{35}$$

$$\frac{R_1(z_3)}{W_{12}(z_3)}=\lambda_3=\mathrm{const},\qquad \frac{R_2(z_3^*)}{W_{12}^*(z_3^*)}=\lambda_3^*=\mathrm{const}\,. \tag{36}$$

При этом $\Omega_0=\lambda_1\lambda_2+|\lambda_3|^2$. Вновь следует ввести функции $u(z_1)=\phi_2(z_1)/\phi_1(z_1)$, $v(z_1)=\chi_2(z_1)/\chi_1(z_1)$, $w(z_3)=\psi_2(z_1)/\psi_1(z_1)$. Эти функции удовлетворяют тем же уравнениям (15), решениями которых являются функции (16), (17).

По аналогии с (19) и (20) для четырехмерного пространства-времени может быть получено специальное представление для решений уравнения Даламбера (18) в виде

$$\Phi = \sum_{\lambda_1\lambda_2+|\lambda_3|^2=0} \ln\left\{\frac{\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\bar{\lambda}_3,z_1,z_2,z_3,z_3^*)}{\sqrt{U_{12}(\lambda_1,z_1)V_{12}(\lambda_2,z_2)\big|W_{12}(\lambda_3,z_3)\big|^2}}\right\} \tag{37}$$

или

$$\Phi = \sum_{\lambda_1\lambda_2+|\lambda_3|^2=0} \ln\big\{\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\bar{\lambda}_3,z_1,z_2,z_3,z_3^*)\big\},$$

где функция $\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\bar{\lambda}_3,z_1,z_2,z_3,z_3^*)$ имеет вид (32).

Аналогичным образом могут быть получены обобщенные решения типа (21) и (25), (26). Первое из них обобщается следующим образом:

$$\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1,z_2,z_3,z_3^*)}{\sqrt{P_1(z_1)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)\big|W_{12}(z_3)\big|^2}}\right\}, \tag{38}$$

где

$$P_1(z_1) = \frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)}\lambda_2 + |\lambda_3|^2\right),$$

а все остальные функции от z_2, z_3 описываются соотношениями (32). В силу требования действительности решений соотношение (38) может быть получено только при снятии ограничений для (35), но не для (36). Здесь вновь произвольны либо функции $\phi_1(z_1)$, $\phi_2(z_1)$ и, следовательно, функция $u(z_1)$, либо функции $\chi_1(z_2)$, $\chi_2(z_2)$ и, следовательно, функция $v(z_2)$.

Решения (25), (26) обобщаются по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} &= ae^{\lambda_1 z_1}, \qquad \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = be^{\lambda_2 z_2}, \\ \frac{R_1(z_3)}{W_{12}(z_3)} &= ce^{\lambda_3 z_3}, \qquad R_2(z_3^*) = R_1^*(z_3). \end{aligned} \tag{39}$$

Причем постоянные λ_1, λ_2, λ_3 должны удовлетворять соотношению

$$\lambda_1\lambda_2 + |\lambda_3|^2 = 0. \tag{40}$$

В этом случае функция Φ записывается в виде

$$\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1,z_2,z_3,z_3^*)}{\sqrt{\Theta_4(z_1,z_2,z_3,z_3^*)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)\big|W_{12}(z_3)\big|^2}}\right\}, \tag{41}$$

где

$$\Theta_4(z_1,z_2,z_3,z_3^*) = abe^{\lambda_1 z_1+\lambda_2 z_2} + |c|^2 e^{\lambda_3 z_3+\lambda_3^* z_3^*}.$$

Последняя формула основана на легко проверяемом тождестве

$$\Box \ln \Theta_4(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = -\frac{ab|c|^2 e^{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_3^* z_3^*}}{\Theta_4^2(z_1, z_2, z_3, z_3^*)} \big(\lambda_1 \lambda_2 + |\lambda_3|^2\big), \tag{42}$$

выражение в правой части которого обращается тождественно в нуль при условии (40). В этом случае функции $u(z_1)$, $v(z_2)$, $w(z_3)$ описываются соотношениями (29).

Как и в размерности $d = 3$, тождество (42) приводит к ЦТ

$$\Box \Phi_a = e^{-2\Phi_a + \Phi_{a+1}}, \qquad a = 1, 2, \dots .$$

Параметризация решений в случае $d = 4$ выглядит следующим образом. Последовательность функций

$$\Theta_a(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = f_1^{(a)}(z_1) f_2^{(a)}(z_2) + f_3^{(a)}(z_3) f_3^{(a)*}(z_3^*), \qquad a = 1, 2, \dots ,$$

в силу тождества (42) удовлетворяет соотношениям

$$\Box \ln \Theta_a = -\frac{f_1^{(a)} f_2^{(a)} f_3^{(a)} f_3^{(a)*}}{\Theta_a^2(z_1, z_2, z_3, z_3^*)} \left(\frac{f_1^{(a)\prime}}{f_1^{(a)}} \frac{f_2^{(a)\prime}}{f_2^{(a)}} + \frac{f_3^{(a)\prime}}{f_3^{(a)}} \frac{f_3^{(a)*\prime}}{f_3^{(a)*}} \right), \qquad a = 1, 2, \dots .$$

Отсюда следует, что последовательность функций

$$\Phi_a(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = \ln \left[\frac{\Theta_a(z_1, z_2, z_3, z_3^*)}{h_1^{(a)} h_2^{(a)} h_3^{(a)} h_3^{(a)*}} \right]$$

удовлетворяет уравнениям ЦТ (30) в пространстве размерности $d = 4$, если функции $f_k^{(a)}(z_k)$ и $h_k^{(a)}(z_k)$ удовлетворяют рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{d}{dz_k} \ln f_k^{(a)}(z_k), \qquad h_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{\big[h_k^{(a)}(z_k)\big]^2}{f_k^{(a)}(z_k)},$$
$$k = 1, 2, 3, 4, \qquad a = 1, 2, \dots .$$

6. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДАЛАМБЕРА И ЛИУВИЛЛЯ В РАЗМЕРНОСТИ $d > 4$

Предложенный метод естественным образом обобщается на случай пространства-времени $n > 4$. Если оператор в размерности n имеет внедиагональное представление (2), то решения соответствующего уравнения Лиувилля (4) следует искать в виде

$$\Phi = \ln\left\{\Psi(z_1, \dots, z_n)\left[\prod_{i=1}^{n} U_{12}^{(i)}(z_i)\right]^{-1/2}\right\}, \tag{43}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(z_1, \dots, z_n) &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n = 1,2} h_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \psi_{\alpha_1}^{(1)}(z_1) \cdots \psi_{\alpha_n}^{(n)}(z_n), \\ U_{12}^{(i)}(z_i) &= \psi_1^{(i)}(z_i) \frac{d}{dz_i} \psi_2^{(i)}(z_i) - \psi_2^{(i)}(z_i) \frac{d}{dz_i} \psi_1^{(i)}(z_i), \end{aligned} \tag{44}$$

а коэффициенты $h_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ – постоянные. Таким образом, Ψ – форма степени n, которую для каждого значения индексов i, j можно представить в виде

$$\Psi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\alpha_i, \alpha_j = 1,2} R_{i,j,\alpha_i,\alpha_j} \psi_{\alpha_i}^{(i)}(z_i) \psi_{\alpha_j}^{(j)}(z_j),$$

где

$$\begin{aligned} R_{\alpha_i,\alpha_j,i,j} = &\sum_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}/\{\alpha_i \alpha_j\}=1,2} h_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{j-1} \alpha_j \alpha_{j+1} \dots \alpha_n} \times \\ &\times \prod_{\substack{k=1,\dots,n, \\ k \neq i,j}} \psi_{\alpha_k}^{(k)}(z_k). \end{aligned}$$

Здесь запись $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}/\{\alpha_i \alpha_j\}$ подразумевает, что из общего списка индексов, по которым проводится суммирование, исключены индексы α_i и α_j. Тождество (33) в общем виде выглядит следующим образом:

$$\Box \Phi = \frac{1}{\Psi^2}\left\{\sum_{i<j=1}^{n} Q_{ij} U_{12}^{(i)} U_{12}^{(j)}\right\}, \tag{45}$$

где

$$Q_{ij} = R_{1,1,i,j} R_{2,2,i,j} - R_{1,2,i,j} R_{2,1,i,j}. \tag{46}$$

Заметим, что Q_{ij} как функции координат зависят от всех координатных переменных, кроме z_i и z_j, и представляют собой по отношению к функциям $\psi_1^{(k)}(z_k)$ форму степени $n-2$. Доказательство этого факта получается применением тождества (1) к каждому элементу внедиагонального представления оператора Даламбера в форме второй смешанной производной от пары несовпадающих координат.

Основной класс решений определяется требованиями

$$Q_{ij} = \prod_{\substack{k=1,\ldots,n,\\ k\neq i,j}} P_k(z_k), \tag{47}$$

сводящимися к системе алгебраических уравнений на коэффициенты n-формы (44) и параметры p_k, q_k, r_k функций $P_k(z_k)$, имеющих по определению вид

$$P_k(z_k) = p_k\big(\psi_1^{(k)}(z_k)\big)^2 + q_k\big(\psi_2^{(k)}(z_k)\big)^2 + r_k\psi_1^{(k)}(z_k)\psi_2^{(k)}(z_k).$$

При этом функции $\psi_1^{(k)}(z_k)$ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\lambda_k U_{12}^k = P_k(z_k), \qquad k = 1,\ldots,n. \tag{48}$$

Совокупность соотношений (46) и (47) эквивалентна системе уравнений на функции $\psi_\alpha^{(k)}(z_k)$ и системе алгебраических уравнений, связывающих значения постоянных p_k, q_k, r_k со значениями коэффициентов n-формы (44) по аналогии с тем, как это имело место для размерности $d = 3, 4$.

Утверждение 6. *Уравнение Лиувилля* (4) *в произвольной конечной размерности $d = n$ с оператором Даламбера* (5) *имеет класс точных решений в форме* (43), *для которой коэффициенты кубической формы* (44) *удовлетворяют соотношениям* (47), *а функции $\psi_\alpha^{(k)}(z_k)$ – уравнениям* (48) *при условии, что постоянные λ_k, $k = 1,\ldots,n$, связаны одним соотношением*

$$\Omega_0 = \Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \mathrm{const}, \tag{49}$$

где функция $\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ определяется соотношением

$$\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_{j<k=1}^{n}\bigg(\prod_{i=1,i\neq j,k}^{n}\lambda_i\bigg). \tag{50}$$

Все остальные обобщенные классы решений для уравнений Даламбера и Лиувилля в размерности $n > 4$ существуют и в общем случае и строятся аналогичным образом. Соответствующие результаты сформулируем в виде утверждений без доказательства.

Утверждение 7. *Уравнение Даламбера*

$$\Box\Phi = 0$$

в n-мерном координатном пространстве имеет классы решений, представимых в виде

$$\Phi = \sum_{\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=0} \ln\big\{\Psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,z_1,\ldots,z_3)\big\},$$

где каждому набору комплексных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, удовлетворяющих условию

$$\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = 0,$$

в котором Ω определяется соотношением (50), *соответствует функция $\Psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,z_1,\ldots,z_n)$, имеющая вид n-формы* (44) *относительно функций $\psi_\alpha^{(k)}(z_k)$, удовлетворяющих условиям* (47).

Утверждение 8. *Уравнение Лиувилля*

$$\Box\Phi = \Omega_0 e^{2\Phi}$$

в n-мерном координатном пространстве имеет классы решений, представимых в форме (43), (44), *в которых одна из функций $U_{12}^{(i)}(z_i)$ в записи* (43) *заменена функцией*

$$Q(z_i) = \frac{1}{\Omega_0}\Omega\big(\lambda_1, \ldots, \lambda_i(z_i), \ldots, \lambda_n\big),$$

в которой, в свою очередь, постоянная величина заменена функцией

$$\lambda_i(z_i) = \frac{P_i(z_i),}{U_{12}^{(i)}(z_i)}.$$

Отметим, что обобщенное решение, аналогичное описанному в утверждении 4, в случае произвольной конечной размерности d оператора Даламбера не параметризуется в столь простом виде, как в случае размерности $d = 3, 4$, поэтому здесь не будем касаться этой проблемы.

7. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАПЛАСА

Особо рассмотрим построение действительных решений уравнений Лиувилля с оператором Лапласа, поскольку в разделе 1 было показано, что внедиагональное представление оператора Лапласа обязательно содержит комплексные координатные переменные. В этом случае все основные соотношения, полученные в предыдущих разделах, касающиеся действительных решений уравнений Лиувилля с оператором Даламбера, переносятся без особых модификаций на рассматриваемый случай с оператором Лапласа, но только для комплексных решений. Условие действительности оказывается существенным и требует пересмотра концепции выбора вида решения и даже вида внедиагонального представления. Для обеспечения действительности решений уравнений Лиувилля представим соответствующий оператор Лапласа в евклидовом пространстве размерности $d = N$ в виде

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j<i}^{N} \gamma_{ij}\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{i,j<i}^{N} \gamma_{ij}^* \frac{\partial^2}{\partial z_i^* \partial z_j^*}\right), \qquad (51)$$

где z_i^* – комплексно-сопряженные координаты к координатам z_i исходного внедиагонального представления (2). Вид соотношения (51) позволяет воспользоваться теми же построениями, что и в предыдущем разделе. Для построения действительных решений уравнения Лиувилля с оператором, имеющим представление (51), теперь необходимо потребовать, чтобы функции $\{\psi_\alpha^{(i)}(z_i)\}_{i=1}^N$ и $\{\psi_\alpha^{(i+N)}(z_i^*)\}_{i=1}^N$, отвечающие комплексно-сопряженным координатам, так же были бы комплексно-сопряжены:

$$\psi_\alpha^{(i+n)}(z_i^*) = \left[\psi_\alpha^{(i)}(z_i)\right]^*,$$

и наложить соответствующие требования эрмитовости на коэффициенты n-формы (44) по каждой паре индексов, т.е.

$$h_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_i\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{i+n-1}\alpha_{i+n}\alpha_{i+n+1}\ldots\alpha_n} = h^*_{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{n+i}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_{i+n-1}\alpha_i\alpha_{i+n+1}\ldots\alpha_n}.$$

Дальнейшие построения полностью аналогичны рассмотренному выше общему случаю.

В качестве примера приведем уравнение Лиувилля в размерности пространства $d = 3$. Введем новые комплексные координаты

$$z_1 = x+iy, \quad z_2 = y+iz, \quad z_3 = z+ix, \quad z_1^* = x-iy, \quad z_2^* = y-iz, \quad z_3^* = z-ix.$$

В этих координатах оператор Лапласа будет иметь внедиагональный вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1^*} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_2^*} + \frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_3^*}\right).$$

Построение описанных выше решений для уравнения Лиувилля $\Delta\Phi = \Omega e^{-2\Phi}$ проводится без особого труда, но содержит достаточно громоздкую систему алгебраических уравнений на коэффициенты формы (44) (степени 6 в данном случае).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 98-02-18040) и НУЦ "Космион" в рамках Государственной научно-технической программы "Астрономия. Фундаментальные исследования космоса" по разделу "Космомикрофизика".

Список литературы

[1] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
[2] Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983.
[3] *Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
[4] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
[5] *В. М. Журавлев.* ЖЭТФ. 1996. Т. 110. № 6. С. 2243.
[6] *В. М. Журавлев.* Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. № 3. С. 285.
[7] *В. М. Журавлев.* ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 5. С. 1897.
[8] *В. М. Журавлев.* ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 61.

Поступила в редакцию 26.XI.1998 г.