Метод максимальной энтропии и модель солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы

Миронов П.П., Журавлев В.М.

Миронов П. П.
аспирант, младший научный сотрудник НИТИ УлГУ, Ульяновск

Журавлев В. М.
д.ф.-м.н., профессор кафедры теоретической физики УлГУ, Ульяновск

Рассматривается математическая модель радиального течения плазмы за счет ее нагрева в окрестности хромосферы и нижней части короны Солнца (солнечный ветер), учитывающая кроме сил Архимеда и тяготения наличие случайных флуктуаций в потоке плазмы. Задача решается в рамках модели, предложенной Паркером. Стоятся решения в случае адиабатичности потока частиц плазмы в состоянии с нулевыми корреляциями.

1. Введение

Описание радиального распределения параметров плазмы солнечного ветра на малых и больших расстояниях от Солнца является одной из важных задач современной физики космоса и астрофизики. Первая модель солнечного ветра была построена Паркером в 50-х годах XX века [1]. Сравнение ее выводов с данными, которые были получены с помощью измерений на различных космических аппаратах, привели к необходимости ее модифицировать. Такие модификации модели в настоящее время включают внесение в модель множества различных факторов, в частности, наличие магнитного поля, нестационарные эффекты и т.д. [2, 3]. Одним из важных факторов, который следует учитывать при анализе течений в различных системах, является наличие турбулентных флуктуаций плазмы, которые порождаются в потоке как внутренними, так и внешними причинами. Однако учет турбулентных флуктуаций связан с выбором математической процедуры вывода усредненных уравнений динамики плазмы (уравнений Рейнольдса), которые содержат различные моменты случайных флуктуаций, и последующей процедурой замыкания уравнений динамики, основываясь на том или ином принципе. Отсутствие достаточно обоснованных и универсальных способов провести такие вычисления приводят к тому, что модели, учитывающие турбулентные флуктуации, используются достаточно редко.

В настоящей работе, опираясь на принципы, изложенные в [4, 5, 6, 7, 8], строится модель солнечного ветра, в которой реализована идея учета гидродинамических флуктуаций. Основная идея его состоит в явном вычислении энтропии нелинейной гидродинамической системы в предположении ее локального равновесия и в последующем отыскании максимума этой найденной энтропии по усредненным параметрам системы. Такой подход можно назвать принципом вторичного максимума энтропии. Возможность повторно вычислять максимум энтропии системы связана с тем, что в случае достижения локального равновесия в системе каждая точка среды приходит к равновесию, вообще говоря, отличающемуся от равновесия соседних точек. В силу непрерывности среды параметры равновесия меняются непрерывно, что и отражается в изменчивости средних полей и моментов флуктуаций. Такое состояние можно назвать слабо неравновесным. Глобальное распределение усредненных полей и моментов при этом и будет определять величину энтропии различных типов локального равновесия. Естественно, что среди таких глобальных распределений должны существовать такие, которые обеспечивают максимум энтропии системы в целом среди всех возможных состояний с локальным равновесием. Основой предлагаемого подхода как раз и является метод отыскания таких состояний со вторичным максимумом энтропии.

Такой подход широко используется в задачах теории передачи информации по линиям связи [9], а так же в задачах обработки данных, в частности, в теории спектрального оценивания временных рядов [10, 11, 12]. Основой применения ММЭ в этих областях как раз и является возможность вычислять максимум энтропии системы по усредненной информации о ее состоянии.

2. Модель солнечного ветра Паркера

Теория Паркера солнечного ветра строится в предположении, что солнечный ветер - это гидродинамический поток плазмы, возникающий в короне Солнца из-за большой ее температуры (термический ветер) и направленный наружу. Скорость его достаточно велика, чтобы преодолеть силу тяготения. Поэтому первым уравнением теории является уравнение Эйлера радиального течения газа в поле тяготения Солнца с учетом случайного шума f с математическим ожиданием равным нулю:

$$u\frac{du}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr} - \frac{GM_{\Theta}}{r^2} + f. \tag{1}$$

Вторым уравнением теории является закон сохранения массы, которое при радиальном течении плазмы будет иметь следующий вид:

$$\rho r^2 u = const. \tag{2}$$

Проинтегрировав уравнение (1) и умножив на плотность, получаем закон сохранения энергии солнечного ветра с учетом некоторого случайного шума ε:

$$\frac{\rho u^2}{2} = -\rho\int\frac{P'(\rho)}{\rho}d\rho + \left(\frac{GM_{\Theta}}{r} + C_1\right)\rho + \varepsilon. \tag{3}$$

Последнее уравнение теории Паркера представляет уравнение состояния газа, которое можно записать в разных вариантах. В простейшем случае можно предположить, что газ, вытекая из короны Солнца, не изменяет температуры: $T=const$ [2]. В этом случае имеем следующее уравнение состояния:

$$P = 2\frac{\rho}{m_p}kT, \tag{4}$$

где m_p - масса протонов. Другое предположение состоит в адиабатичности потока [3], которое можно записать в следующем виде:

$$P = k_0\rho^{\gamma}, \tag{5}$$

где γ - показатель адиабаты плазмы, k_0 - некая константа. В предлагаемой работе построены и проанализированы решения для плотности солнечного ветра, а также ее дисперсии в случае (5).

3. Усредненные уравнения модели Паркера

Метод Рейнольдса основывается на представлении переменных модели в виде их разложения на среднее значение $< u >= \overline{u(r)}$, $< \rho >= \overline{\rho(r)}$ и флуктуации u' и ρ', среднее значение которых равно нулю. Усреднение "$< >$" переменных понимается везде как усреднение по ансамблю. Применяя такое усреднение к случайно-возмущенным уравнениям (2,3) в случае адиабатичности потока частиц солнечной плазмы, получаем следующую усредненную систему уравнений:

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{u}^2}{2} + \frac{< u'^2 >}{2}\right) + \overline{u} < u'\rho' > + \frac{k_0\gamma}{\gamma - 1}\overline{\rho}^{\gamma} f(\overline{\rho}, < \rho'^2 >) = \left(\frac{GM_{\Theta}}{r} + C_1\right)\overline{\rho},$$

$$\overline{u}\,\overline{\rho} r^2 + < u'\rho' > r^2 = C_2. \tag{6}$$

Здесь

$$f(z,\gamma) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma(\gamma-1)...(\gamma-2n)}{(2n)!}\lambda_n z^n,$$

$$z = < \rho'^2 > / \overline{\rho}^2.$$

Значения λ_n будут зависеть от параметров распределения. В случае гауссового распределения

$$\lambda_n = \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

C_1 и C_2- константы интегрирования.

Как правило, после процедуры усреднения по методу Рейнольдса в уравнениях появляются дополнительные моменты. В уравнения (6) входят дисперсии флуктуаций плотности и скорости, а также ковариация. Для них необходимо дополнительно указать уравнения эволюции, которые не следуют из исходных уравнений. В этом и состоит проблема замыкания систем уравнений, усредненных по методу Рейнольдса.

4. Замкнутая система уравнений и метод максимальной энтропии

Для их замыкания будем пользоваться методом максимальной энтропии, развитым в работах [4, 5, 6, 7, 8]. Принцип максимума энтропии основывается на свойстве энтропии стохастических систем достигать своего максимума на множестве макросостояний, которые реализуются максимальным числом микросостояний [10]. Для его формулировки в случае непрерывных случайных процессов, необходимо воспользоваться шенноновским определением энтропии в форме континуального интеграла по пространству случайных величин $\rho[r_0,r_1]$, $u[r_0,r_1]$, которое можно представить в виде прямого произведения всех двумерных пространств $R^2(t)$ вещественных чисел, соответствующих всевозможным значениям переменных $\rho(r)$, $u(r)$, параметрически зависящих от $r\in[r_0,r_1]$. Энтропия в этом случае может быть записана в виде следующего континуального интеграла:

$$H_0 = -\int\rho^*(\{\rho,u\}[r_0,r_1])\ln\rho^*(\{\rho,u\}[r_0,r_1])DX[r_0,r_1]. \tag{7}$$

Здесь $\rho^*(\{\rho,u\}[r_0,r_1])$ - плотность вероятности распределения случайных величин на интервале пространства $[r_0,r_1]$. В данной работе будет рассмотрен случай нормального (гауссова) распределения вероятностей. Из самого метода максимума энтропии следует, что данное распределение соответствует условию независимости флуктуаций в различных точках пространства (см. [5]). В результате исследуемый функционал энтропии нормально распределенной случайной величины будет равен ([9]):

$$H_{max} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_1}\ln\det C dr + C_0. \tag{8}$$

Здесь $\det C = < u'^2 >< \rho'^2 > - (< u'\rho' >)^2$ - определитель матрицы ковариаций флуктуаций, C_0 - несущественная числовая постоянная. Максимизация функционала

(8) производится при условии, что матожидания $\rho(r)$, $u(r)$ и остальные моменты флуктуаций связаны уравнениями Рейнольдса.

Согласно методу множителей Лагранжа, мы должны решить задачу об абсолютном максимуме функционала энтропии следующего вида:

$$S=\frac{1}{2}\int_{r_0}^{r_1}\ln\det C dr+\int_{r_0}^{r_1}W_2\left(\overline{u\rho}r^2+<u'\rho'>r^2-C_2\right)dr+$$
$$+\int_{r_0}^{r_1}W_1\left(\bar{\rho}\left(\frac{\bar{u}^2}{2}+\frac{<u'^2>}{2}\right)+\bar{u}<u'\rho'>+\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}\bar{\rho}^{\gamma}f(z,\gamma)-\left(\frac{GM_\Theta}{r}+C_1\right)\bar{\rho}\right)dr. \quad (9)$$

Здесь $W_1(r)$, $W_2(r)$ - множители Лагранжа в задаче об условном экстремуме H_{max}. В предлагаемых задачах варьируются основные переменные (скорость и плотность потока частиц солнечного ветра) и моменты, содержащиеся в матрице ковариаций флуктуаций. Функционал (9) фактически аналогичен функционалам принципа наименьшего действия в механике.

Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала (9) имеют следующий вид:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\bar{u}^2}{2}+\frac{<u'^2>}{2}\right)+\bar{u}<u'\rho'>+\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}\bar{\rho}^{\gamma}f(z,\gamma)=\left(\frac{GM_\Theta}{r}+C_1\right)\bar{\rho},$$

$$\overline{u\rho}r^2+<u'\rho'>r^2=C_2,$$

$$\left(\frac{\bar{u}^2}{2}+\frac{<u'^2>}{2}+\frac{k_0\gamma^2}{\gamma-1}\bar{\rho}^{\gamma-1}f(z,\gamma)+\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}\frac{\partial f(z,\gamma)}{\partial\bar{\rho}}\bar{\rho}^{\gamma}-\frac{GM_\Theta}{r}-C_1\right)W_1+r^2\bar{u}W_2=0,$$

$$(\overline{u\rho}+<u'\rho'>)W_1+\bar{\rho}r^2W_2=0,\quad \bar{\rho}W_1+\frac{<\rho'^2>}{detC}=0, \quad (10)$$

$$\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}\frac{\partial f(z,\gamma)}{\partial<\rho'^2>}\bar{\rho}^{\gamma}W_1+\frac{1}{2}\frac{<u'^2>}{detC}=0,\quad W_1\bar{u}+W_2r^2-\frac{<u'\rho'>}{detC}=0.$$

Система (10) является замкнутой, т.к. содержит 7 уравнений с 7 неизвестными

($\bar{u},\ \bar{\rho},\ <u'^2>,\ <\rho'^2>,\ <u'\rho'>,\ W_1,\ W_2$).

5. Решение задачи о солнечном ветре

Из уравнений системы (10) следует, что

$$<u'\rho'>\left(\frac{<\rho'^2>}{\bar{\rho}^2}-1\right)=0$$

Отсюда получаем два независимых решения:

$$I)\ \frac{<\rho'^2>}{\bar{\rho}^2}=1 \quad (11)$$

$$II)\ <u'\rho'>=0, \quad (12)$$

При условии (11) из (10) получаем следующее выражение для дисперсий скорости и плотности:

$$\frac{<u'^2>}{<\rho'^2>}=\frac{2k_0\gamma}{\gamma-1}\chi^*(\gamma)\bar{\rho}^{\gamma-3}. \quad (13)$$

Здесь

$$\chi^*(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\gamma(\gamma-1)...(\gamma-2n)}{(2n)!}\lambda_n.$$

Для значений показателя адиабаты в диапазоне $1\le\gamma<2$ параметр $\chi^*(\gamma)$ обращается в бесконечность. При этом отношение дисперсий (13) принимает отрицательное значение. Данный результат не имеет физического смысла и, значит, решение (11) можно не рассматривать.

Решая систему уравнений (10) при условии (12), получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными ($\bar{\rho}$ и $<\rho'^2>$):

$$\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}((\gamma-1)f(z,\gamma)-2\chi(z,\gamma))\bar{\rho}^{\gamma+1}=\frac{C_2^2}{r^4}, \quad (14)$$

$$\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}f(z,\gamma)(1+\gamma)\bar{\rho}^{\gamma-1}=2\left(\frac{GM_\Theta}{r}+C_1\right).$$

Здесь

$$\chi(z,\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\gamma(\gamma-1)...(\gamma-2n)}{(2n)!}\lambda_n z^n.$$

Из системы (14) получаем следующее уравнение:

$$C_2^2\left(\frac{k_0\gamma}{2(\gamma-1)}f(z,\gamma)(1+\gamma)\bar{\rho}^{\gamma-1}-C_1\right)^4-$$
$$-\left(\frac{k_0\gamma}{\gamma-1}((\gamma-1)f(z,\gamma)-2\chi(z,\gamma))\bar{\rho}^{\gamma+1}\right)G^4M_\Theta^4=0. \quad (15)$$

Решения уравнений (14) и (15) соответствуют графикам на Рис.1-3. При построении графиков принимались следующие значения для параметров модели:

$\gamma=5/3$, $k_0=0.82\cdot10^{30}$ Па $\cdot$ м^5/кг$^{5/3}$,

$C_1=0.9257118054\cdot10^{17}$ м^2/с^2,

$C_2=0.1871721524\cdot10^{12}$ кг/с:

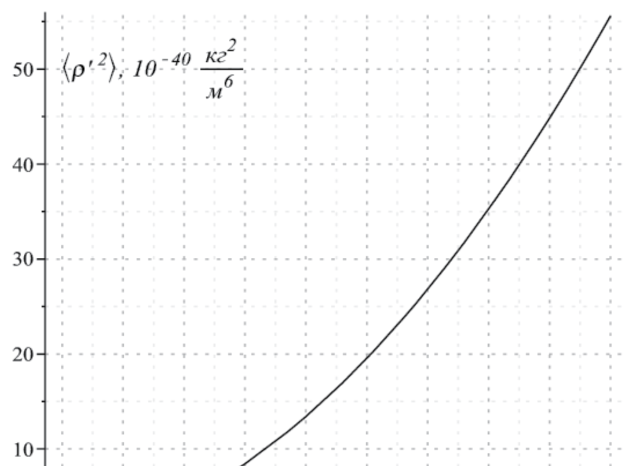

Рисунок 1. Зависимость дисперсии плотности частиц солнечного ветра от плотности частиц солнечного ветра.

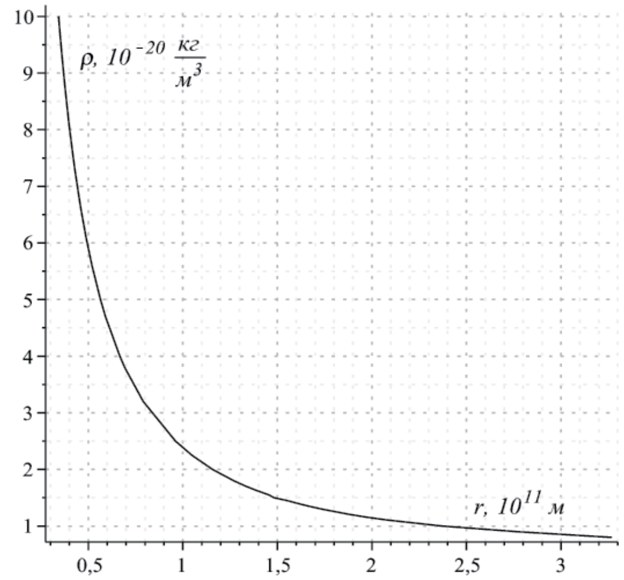

Рисунок 2. Зависимость плотности частиц солнечного ветра от расстояния до Солнца.

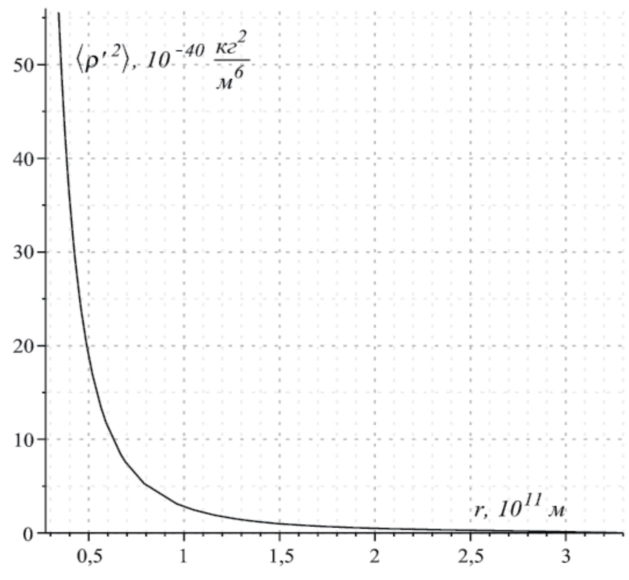

Рисунок 3. Зависимость дисперсии плотности частиц солнечного ветра от расстояния до Солнца.

Из полученного численного решения системы (10) можно сделать вывод, что при уменьшении плотности потока частиц солнечного ветра уменьшается и дисперсия плотстности, причем, как в абсолютном, так и в относительном значении. При удалении от поверхности Солнца плотность и дисперсия плотности асимптотически стремятся к своим фиксированным значениям, что говорит об устойчивости предложенной усредненной модели Паркера.

6. Заключение

Из проведенного анализа случайно-возмущенной модели Паркера солнечного ветра следует, что в случае адиабатичности потока частиц плазмы для состояния с нулевыми корреляциями плотность солнечного ветра в предположении гауссового распределения достаточно быстро убывает, и на дальних расстояниях от поверхности Солнца величины плотности и ее дисперсии стремятся к некоторым устойчивым значениям. При этом большую роль при численном решении уравнений (14) и (15) может играть выбор показателя адиабаты γ, который в данной работе выбирался равным 5/3 (к примеру, в случае изотермичности потока частиц солнечной плазмы $\gamma = 1$). Сам показатель адиабаты может быть оценен по уравнению (15) и по экспериментальным данным.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, 11-01-00747-а, 12-01-33074-мол а вед, а так же при частичной поддержке гранта для аспирантов Ульяновского государственного университета.

1. Паркер Ю., Космические магнитные поля, М.: Мир, Т. 1,2, (1982).
2. С.-И. Акасофу, С. Чепмен, Солнечно-земная физика, М.: Мир, Т. 2, 512 с., (1975).
3. И.С. Веселовский, Солнечный ветер и гелиосферное магнитное поле, В Сб. Модель космоса. Т.1. Под ред. Ю.И. Логачева. Изд. М.: КДУ, (2007).
4. Журавлев В.М., Шляпин В.А., Принцип вторичного максимума энтропии и уравнения Рейнольдса в стохастической динамике одномерных нелинейных систем, Нелинейный мир, Т.6, № 7, с. 352-363, (2008).
5. Журавлев В.М., Турбулентность течений несжимаемой жидкости вблизи локального равновесия и принцип вторичного максимума энтропии, ЖТФ, № 1, с. 16-27, (2009).
6. Журавлев В.М., Шляпин В.А., Метод сопряженных функций в стохастической динамике одномерных нелинейных систем и принцип вторичного максимума энтропии, В сб. Прикладная математика и механика, УлГТУ, Ульяновск, с. 72-88, (2009).
7. В.М. Журавлев, П.П. Миронов, Динамика случайно-возмущенной системы Вольтерра-Лотки и метод максимальной энтропии. Нелинейный мир, - Т.9, N 4, С. 201-212, (2011).
8. В.М. Журавлев, П.П. Миронов, Случайно-возмущенные динамические модели и метод максимальной энтропии, Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки", №1(30), С. 352-360, (2013).
9. Р.Л.Стратанович, Теория информации, М.: Со. радио 424 с., (1975).
10. Б.Р.Фриден, Оценки, энтропия, правдоподобие, ТИИЭР, 73, N 12, 78, (1985).
11. Burg J.P., Maximum entropy spectral analysis, In proc/ 37-th Meet. Society of Exploration Geophysisists. Oklahoma city, Oct. 31, (1967).
12. Дворянинов Г.С., Журавлев В.М., Прусов А.В., Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе, Преп. МГИ АН УССР, Ч. 1,2, (1986).