1 Динамические системы

Рассмотренные **кинетические модели** являются исторически первыми моделями, которые используются в настоящее время для описания динамики популяций и процессов в других социальных, биологических, экономических и физических системах. К настоящему времени сложность таких моделей существенно возросла так, что их точный анализ уже невозможен в полном объеме. В этом случае возникает необходимость проведения качественного анализа систем, вроде того, который был проделан в случае **модели Лотки – Вольтерра** (допускается и название модели **Лотки – Вольтерры**). Кроме этого, очень полезно было бы иметь представления о том, к каким состояниям стремится система в зависимости от того, какие условия были поставлены в начальный момент времени. Дальнейшей целью этой лекции будет рассмотрение некоторых основных методов качественного анализа динамических систем и анализ на их основе расширенных моделей биологической и социальной эволюции.

Введем общее определение динамической системы. Под **динамической системой** подразумевают **система с $\boldsymbol{n}$ степенями свободы, динамика которой описывается системой из $\boldsymbol{n}$ обыкновенных дифференциальных уравнений** первого порядка следующего общего вида:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), i = 1,2, \dots, n,$$

где $x_i(t)$ - координаты динамической системы, $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ - некоторый набор функций, зависящих от x_i и от t явно. Число $\boldsymbol{n}$ называется **размерностью динамической системы**. Динамическая система называется **автономной**, если функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ явно от t не зависят.

Далее будут рассматриваться исключительно автономные динамические системы. Именно у таких автономных систем имеется следующее важное свойство. Асимптотически при $t \to \infty$ система, как правило, стремится к особым точкам n -мерного пространства координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ динамической системы, в которых скорость движения равна нулю. Такие точки называются неподвижными (стационарными) или особыми. Совокупность всех таких точек называется **аттрактором** системы (**притягивающим множеством** точек). Точки, к которым система стремится при $t \to -\infty$, являются также особыми или неподвижными, но образуют другую группу, называемую **репеллерами (отталкивающим множеством)**. Все особые точки P_k автономной системы с координатами $X_k = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ можно найти, исходя из решения системы алгебраических уравнений:

$$f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0, i = 1,2, \dots, n.$$

Оказывается, с помощью отыскания всей совокупности особых точек можно, не решая самих уравнений динамической системы, понять на **качественном уровне** все ее асимптотические свойства.

2 Одномерные автономные динамические системы

Простейшим видом динамических систем являются одномерные системы:

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1)$$

Из общего определения следует, что особыми точками данной системы являются точки, в которых функция $f(x)$ обращается в ноль, т.е. координаты этих точек вычисляются как корни x_i уравнения:

$$f(x_i) = 0.$$

Одномерные системы могут быть проинтегрированы полностью, т.е. решение $x(t)$ может быть найдено как решение уравнения:

$$\int_0^t \frac{dx}{f(x)} = t + C,$$

где C - постоянная интегрирования, определяемая начальным условием. Однако явно интеграл в последнем соотношении может не вычисляться в элементарных функциях. Поэтому полезно иметь инструмент, позволяющий анализировать динамику системы, не имея полного решения последнего уравнения.

Таким полезным инструментом является фазовый портрет системы. Это график зависимости скорости $v(t)$ перемещения координаты системы $x(t)$ от значения этой координаты. Поскольку скорость (как и в механике) определяется как первая производная от координаты по времени:

$$v(t) = \frac{dx}{dt},$$

то фазовый портрет системы - это график зависимости $v = f(x)$. В качестве примера на рис. 1 приведен фазовый портрет системы:

$$\frac{dx}{dt} = 10 - 17x + 8x^2 - x^3. \quad (2)$$

Особые точки системы P_1, P_2, P_3, в которых скорость равна нулю, изображены зеленым цветом. Координаты этих точек равны, соответственно, $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5$. Разными цветами выделены области, где скорость перемещения точки направлена противоположно: больше нуля - синие области, и меньше нуля - красные области. Это означает, что точка системы в любой момент времени t находится на кривой $v = f(x)$, но перемещается по ней либо в положительном направлении оси x (синие области), либо в отрицательном - красные области. Глядя на такую диаграмму, можно **качественно** понять, что будет происходить с системой в любой момент времени.

Предположим, что в начальный момент времени точка, изображающая положение системы находится в интервале $(1,2)$. Согласно графику в этой области скорость отрицательна, следовательно, точка при любом начальном положении из этого интервала будет двигаться влево в направлении точки P_1 с координатой $x_1 = 1$. Предположим, что начальное положение точки находится левее точки P_1, т.е. на полуинтервале $[0,1)$. В этой области скорость системы положительна, следовательно, точка движется опять к точке P_1 с координатой $x_1 = 1$. Следовательно, точка P_1 является притягивающей (аттрактором). По аналогии определяем, что точка P_2 является отталкивающей, поскольку при любом отклонении от этой точки и вправо, и влево, система начинает удаляться от нее. И, окончательно, точка P_3 является опять притягивающей.

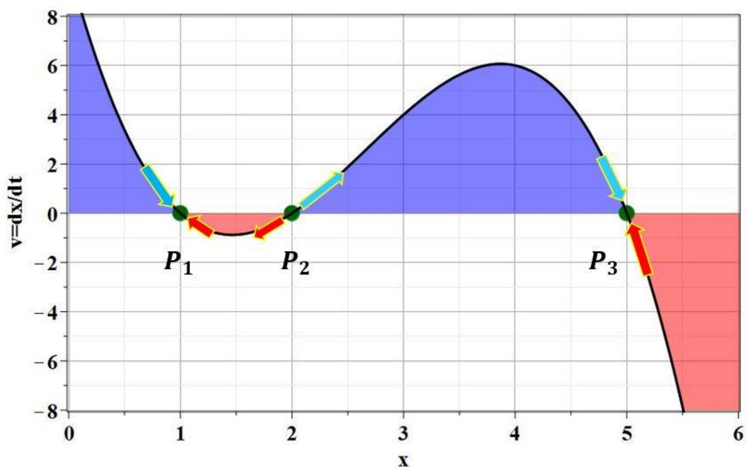


Рис. 1: Фазовая кривая одномерной динамической системы (2)

3 Модели Мальтуса и Ферхюльста

Пользуясь рассмотренным инструментом, можно проанализировать **модели Мальтуса** и **Ферхюльста**. Соответствующие им фазовые кривые изображены на рис. 2 и 3. Для модели Мальтуса:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

фазовая кривая представляет собой прямую, проходящую через начало координат плоскости (x, v), с тангенсом угла наклона, равным $\alpha > 0$. Точка пересечения этой прямой с осью абсцисс является единственной особой точкой системы P_1. Цвета областей и стрелок указывают общее направление перемещения точки динамической системы. Глядя на график, можем сразу сказать, что при $\alpha > 0$ эта особая точка является отталкивающей, любое отклонение от нее в начальном положении влечет удаление системы от нее со временем.

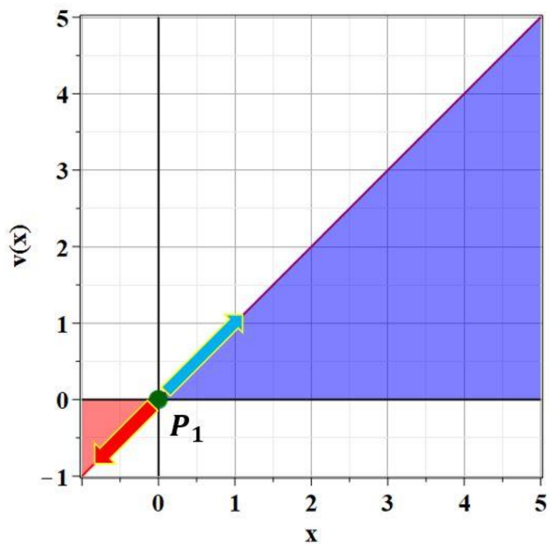


Рис. 2: Фазовая кривая **модели Мальтуса**

Фазовая кривая модели Ферхюльста:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta x^2$$

представляет собой параболу, которая изображена на рис. 3.

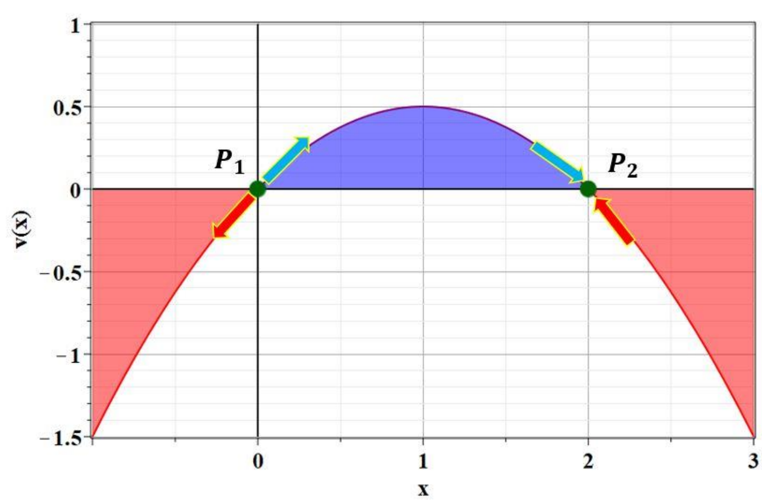


Рис. 3: Фазовая кривая **модели Ферхюльста**

Фазовая кривая пересекает ось абсцисс в двух точках P_1 и P_2. Соответственно в этих точках скорость равна нулю, т.е. эти точки являются особыми. Стрелки на графиках, как и цвета областей указывают направление перемещения точек в каждой из них. Из графика сразу видно, что **точка $\boldsymbol{P_1}$ - отталкивающая** (неустойчивая), а **точка $\boldsymbol{P_2}$ - притягивающая** (устойчивая). Координаты этих точек вычисляются из уравнения:

$$\alpha x - \beta x^2 = 0,$$

корни которого равны:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{3}$$

Сравнивая полученный результат на прошлой лекции в отношении точного решения модели Ферхюльста, видим, что предельная притягивающая точка P_2 с координатой $x_2 = \alpha/\beta$ в точности равна пределу, к которому сремится точное решение при $t \to \infty$.

Наглядность графического изображения динамики системы с помощью фазовых кривых очень полезна, однако возникает вопрос о возможности дать строгое обоснование того, что данная особая точка является отталкивающей или притягивающей, не прибегая к построению точного решения. Это особенно будет важно, когда построить фазовые кривые динамической системы будет сложно, особенно в случае, если ее размерность $n > 2$.

4 Теория возмущений вблизи особых точек

Идея получить строгий ответ на поставленный вопрос состоит в том, чтобы рассмотреть движение системы приближенно в малой окрестности особой точки. Пусть динамическая система (1) имеет особую точку x_0, в которой $f(x_0) = 0$. Представим решение системы вблизи точки x_0 в таком виде:

$$x(t) = x_0 + \xi(t),$$

где $\xi(t)$ будем считать величиной первого порядка малости, так что в этом первом порядке можно пренебречь величинами порядка ξ^2, xi^2 и т.д. Тогда подставляя последнее соотношение в уравнение динамической системы и пользуясь разложением $f(x)$ в ряд Тейлора в точке x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

находим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \simeq f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}(x - x_0) = \gamma\xi,$$

где использовано то, что $f(x_0) = 0$ и введено обозначение:

$$\gamma = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

В результате вблизи особой точки уравнение выглядит всегда одинаково и максимально просто:

$$\frac{d\xi}{dt} = \gamma\xi. \tag{4}$$

Решением этого уравнения является функция

$$\xi = Ce^{\gamma t}.$$

Анализ того, является ли точка x_0 - отталкивающей или притягивающей, сводится теперь к определению знака числа γ. **Если $\gamma > 0$, то точка x_0 - является отталкивающей, а в случае $\gamma < 0$ - притягивающей**. Действительно, в случае $\gamma > 0$ экспонента в решении неограниченно растет, т.е. $x(t)$ удаляется от x_0, и, наоборот, при $\gamma < 0$ экспонента стремится к нулю, т.е. $x(t)$ стремится к x_0, каким бы не было значение постоянной C, которое определяет начальное отклонение $x(t)$ от x_0. В этом случае говорят, что **в случае $\gamma > 0$ точка x_0 является неустойчивым состоянием системы, а в случае $\gamma < 0$ - устойчивым**.

Проведем анализ на **устойчивость моделей Мальтуса и Ферхюльста**. Модель Мальтуса линейна, поэтому для нее $\gamma = \alpha > 0$. Отсюда сразу следует, что единственная особая точка этой модели $x_0 = 0$ является отталкивающей или неустойчивым состоянием.

В случае модели Ферхюльста имеются две особые точки $x_1 = 0$ и $x_2 = \alpha/]gb$. В первой точке имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha\xi - \beta\xi^2 \simeq \alpha\xi,$$

и поскольку $\gamma = \alpha > 0$, то эта точка является отталкивающей или неустойчивой. В точке $x_2 = \alpha/\beta$ имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha(\alpha/\beta + \xi) - \beta(\alpha/\beta + \xi)^2 = \alpha\xi + \alpha^2/\beta - \beta\alpha^2/\beta^2 - 2\alpha\xi + \beta\xi^2 \simeq -\alpha\xi.$$

Отсюда $\gamma = -\alpha < 0$ (поскольку $\alpha > 0$) и устанавливаем, что точка $x_2 = \alpha/\beta$ является притягивающей или устойчивым состоянием системы. При малых отклонениях от положения этой точки она возвращается в исходное состояние.

5 Качественный анализ двумерных динамических систем

Рассмотрим двумерные автономные динамические системы, имеющие такой вид:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y). \tag{5}$$

Качественный анализ двумерных моделей проводится по аналогичной схеме. Однако в этом случае есть определенные отличия.

Во-первых, поскольку система двумерна, то фазовые кривые системы (5) :

$$u = f(x,y), \quad v = g(x,y)$$

уже размещаются в четырехмерном пространстве, что отобразить на графиках сложно. Можно отобразить лишь проекции этой кривой на некоторые плоскости, если удается из уравнений исключить одну или две переменные из этих уравнений.

Во-вторых, особые точки также размещаются в четырехмерном пространстве, хотя их проекции на плоскость x, y вычисляются независимо от остальных координат в виде решения пары уравнений:

$$f(x_i, y_i) = 0, g(x_i, y_i)0, i = 1, \dots, N,$$

где N - общее число вещественных решений этой системы уравнений. Поэтому графический анализ такой системы возможен, если удается получить сведения о проекции фазовых кривых на плоскость x, y. Это бывает возможно, если удается проинтегрировать уравнение, полученное почленным делением одного уравнения на другое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \qquad (6)$$

В остальных случаях приходится прибегать к численному решению последнего уравнения.

Примером того, когда удается получить точное решение является модель Лотки-Вольтерра, которая рассматривалась в предыдущей лекции. Для этой модели

$$f(x, y) = (\alpha - \beta y)x, g(x, y) = (-\mu + \nu x)y.$$

Как было показано в предыдущей лекции, уравнение фазовых траекторий на плоскости x, y (6) :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-\mu+\nu x)y}{(\alpha-\beta y)x}$$

допускает разделение переменных и, следовательно, интегрируется, что дает первый интеграл системы:

$$\beta y + nux - \alpha ln|y| - \mu ln|x| = C.$$

Соответствующие траектории для различных значений C представлены на рис. 4.

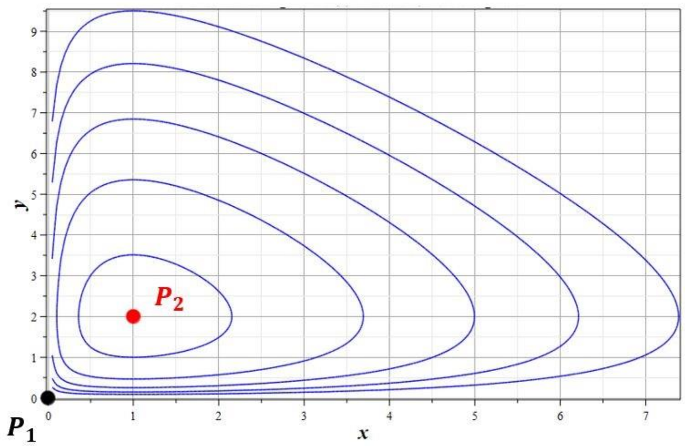


Рис. 4: Фазовые траектории модели Лотки-Вольтерра

Вычисляем особые точки этой системы, решая систему уравнений:

$$(-\mu + \nu x)y = 0, (\alpha - \beta y)x = 0.$$

Отсюда следует, что система Лотки-Вольтерра имеет две особые точки:

$$P_1: x_1 = 0, y_1 = 0; \;\; P_2: x_2 = \frac{\mu}{\nu}, y_2 = \frac{\alpha}{\beta}. \qquad (7)$$

На рис. 4 первая точка изображена черной, а вторая - красным. Визуальный анализ особых точек в двумерном случае оказывается более сложным, чем в одномерном случае. Кроме этого, характер траекторий вблизи этих точек оказывается более разнообразным. Поэтому для выяснения типа особых точек в двумерном случае требуется прибегать к теории возмущений, не полагаясь только на визуальный анализ кривых.

Для примера приведем хорошо известный случай из механики, соответствующий математическому маятнику. Уравнение Ньютона для математического маятника можно записать в такой форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin(x).$$

Это двумерное уравнение превращается в двумерную динамическую систему с помощью введения дополнительной переменной

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

В результате это уравнение принимает такой вид:

$$\frac{dx}{dt} = v, \frac{dv}{dt} = -\omega^2 \sin(x).$$

Для этой системы $f(x,v) = v$, $g(x,v) = -\omega^2 \sin(x)$. Уравнение фазовых траекторий (6):

$$\frac{dv}{dx} = -\omega^2 \frac{\sin(x)}{v}.$$

Это уравнение допускает разделение переменных:

$$vdv = -\omega^2 \sin(x) dx,$$

что приводит к известному закону сохранения энергии:

$$\frac{v^2}{2} + \omega^2(1 - \cos^2(x)) = E.$$

Фазовые траектории этой системы приведены на рис. 5.

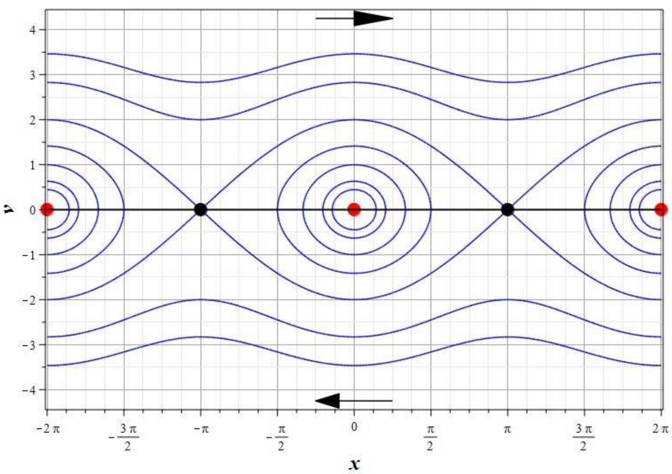


Рис. 5: Фазовые траектории модели математического маятника

Особые точки этой системы находятся из решения уравнений:

$$v = 0, \sin(x) = 0.$$

Эта система имеет бесконечное число особых точек:

$$P_n: v_n = 0, \;\; x_n = \pi n, \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

В лаборатороной работе предлагается иследовать фазовые траектории более общей системы, допускающей интегрирование уравнения фазовых траекторий системы. К таким системам относятся системы с функциями:

$$f(x,y) = F(x)H(y), \;\; g(x,y) = P(x)Q(y).$$

Можно видеть, что уравнение фазовых траекторий в этом случае будет иметь такой вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)Q(y)}{F(x)H(y)}.$$

Это уравнение допускает разделение переменных:

$$\frac{H(y)}{Q(y)}dy = \frac{P(x)}{F(x)}dx,$$

что дает интеграл движения следующего вида:

$$\int \frac{H(y)}{Q(y)}dy - \int \frac{P(x)}{F(x)}dx = C,$$

где C - постоянная интегрирования. Фазовые траектории - это изолинии функции:

$$J(x,y) = \int \frac{H(y)}{Q(y)}dy - \int \frac{P(x)}{F(x)}dx.$$

В лабораторной работе изолинии строятся с помощью процедуры

contourplot(J(x,y),x=a..b,y=c..d,opt).

Пример. Рассмотрим процедуру построения фазового портрета динамической системы:

$$\frac{dx}{dt} = a(x)(B2 + A2y + y^2) = a(x)(y - Y1)(y - Y2),$$
$$\frac{dy}{dt} = b(y)(B1 + A1x + x^2) = b(y)(x - X1)(x - X2).$$

Это вариант задания в лабораторной работе 3:

15.A1:=-5;B1:=3;Y1:=-2;Y2:=4;a(x)=x^2+1;b(y)=y^2+1:

Представим здесь вариант написания программы.

Задаем начальные значения переменных и функции модели:

```
>A2:=-2;B2:=-4; # Находятся с помощью вычисления
коэффициентов полиномов
>U:=(y)->B2+A2*y+y^2; >V:=(x)->B1+A1*x+x^2; >a:=(x)-
>x^2+1; >b:=(y)->y^2+1;
```

Находим численно координаты особых точек:

```
>sols1:=evalf(solve(U(y),y));
    3.236067977, -1.236067977
>sols2:=evalf(solve(V(x),x));
    5.541381265, -0.541381265
```

Поскольку функции $a(x)$ и $b(y)$ не имеют вещественных корней, то найденные корни функций $U(y)$ и $V(x)$ определяют существование четырех особых точек:

$$P1: x_1 = 5.541381265, \quad y_1 = 3.236067977;$$
$$P2: x_2 = -0.541381265, \ y_2 = -1.236067977;$$
$$P3: x_1 = 5.541381265, \quad y_2 = -1.236067977;$$
$$P4: x_3 = -0.541381265, \ y_3 = 3.236067977.$$

Вычисляем слагаемые интеграла движения с помощью Maple:

```
>F:=(x)->int(V(z)/a(z),z=0..x);
>H:=(y)->int(U(z)/b(z),z=1..y);
```

Общий вид интеграла движения такой:

```
>J:=(x,y)->F(x)-H(y);
```

Вычисляем значения интеграла движения в особых точках для задания диапазона контуров на фазовой плоскости и значений интеграла на особых изолиниях.

```
>J1:=J(sols2[1],sols1[1]);
>J2:=J(sols2[2],sols1[2]);
>J3:=J(sols2[1],sols1[2]);
>J4:=J(sols2[2],sols1[1]);
```

Строим изолинии функции $J(x,y)$:

```
>picFZ:=contourplot(J(x,y),x=-4..10,y=-4..10,
contours=20,grid=[100,100],
labels=["X","Y"],GFORM,size=[600,500]);
```

Строим отдельно особые изолинии, проходящие через особые точки. Забегая вперед укажем, что если особая точка - центр, то ее изолиния состоит только из самой особой точки. Если особая точка седловая, то проходящая через нее особая изолиния представляет некоторую кривую, которая называется **сепаратриса**.

```
>C11:=contourplot(J(x,y),x=-4..10,y=-4..10,
contours=[J1,J2],
grid=[100,100],labels=["X","Y"],GFORM,size=[600,500],co
lor=magenta,thickness=2):
>C12:=contourplot(J(x,y),x=-4..10,y=-4..10,
contours=[J3+0.01,J4-0.02],
grid=[100,100],labels=["X","Y"],GFORM,size=[600,500],co
lor=red,thickness=2):
```

Для наглядности строим особые точки и подписи к ним:

```
>Pt1:=point([sols2[1],sols1[1]],color=blue,FORMSYM);
>Pt2:=point([sols2[2],sols1[2]],color=blue,FORMSYM);
>Pt3:=point([sols2[1],sols1[2]],color=red,FORMSYM);
>Pt4:=point([sols2[2],sols1[1]],color=red,FORMSYM);
>TXTP:=textplot([[sols2[1],sols1[1]+1,"P1"],
[sols2[2],sols1[2]+1,"P2"],[sols2[1]+1,sols1[2],"P3"],
[sols2[2],sols1[1]+1,"P4"]],font=[TIMES,BOLD,20]);
```

Вывод изолиний и точек на экран:

```
>\display(picFZ,C11,C12,Pt1,Pt2,Pt3,Pt4);
```

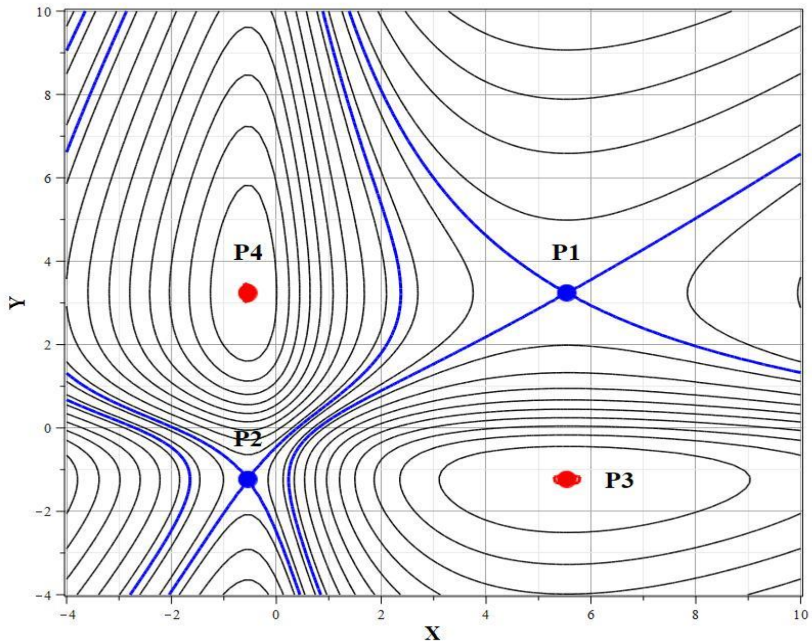


Рис. 6: Фазовые траектории модели, исследуемой в лабораторной работе 3

6 Анализ особых точек

Анализ особых точек двумерных автономных динамических систем проводится с помощью теории возмущений вблизи этих точек, как и в одномерном случае (см. [3, 5]).

Пусть x_0 и y_0 - координаты особой точки динамической системы, т.е.:

$$f(x_0, y_0) = 0, g(x_0, y_0) = 0.$$

Рассмотрим решение динамической системы вблизи особой точки в следующем виде:

$$x(t) = x_0 + \xi(t), \;\; y(t) = y_0 + \eta(t), \tag{8}$$

где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ - функции первого порядка малости. Это означает, что слагаемыми вида $\xi^p(t)\eta^q(t)$ при $p > 1$ или $q > 1$ можно пренебречь при анализе динамики вблизи особой точки. Разложим функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ в окрестности особой точки в ряд Тейлора. В результате находим:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x_0,y=y_0}(y-y_0) + \cdots,$$

$$g(x,y) = g(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right|_{x=x_0,y=y_0}(y-y_0) + \cdots.$$

Обозначим:

$$M_{11} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=x_0, y=y_0}, \; M_{12} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{x=x_0, y=y_0},$$
$$M_{21} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\Big|_{x=x_0, y=y_0}, \; M_{22} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\Big|_{x=x_0, y=y_0}.$$

Тогда, отбрасывая слагаемые второго порядка малости и выше, приближенно можем систему в окрестности особой точки записать так:

$$\frac{d\xi}{dt} = M_{11}\xi + M_{12}\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = M_{21}\xi + M_{22}\eta.$$

Решения этой системы можно искать в следующем виде:

$$\xi(t) = Ae^{\lambda t}, \;\; \eta(t) = Be^{\lambda t}. \qquad (9)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения модели, приходим к системе характеристических уравнений:

$$\lambda A = M_{11}A + M_{12}B, \;\; \lambda B = M_{21}A + M_{22}B.$$

Эта система представляет собой уравнения на собственные значения λ и собственные вектора матрицы M с элементами $M_{ij}, i, j = 1,2$:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Условием совместности этой системы является уравнение для собственных чисел:

$$\det\begin{pmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

которое имеет такой вид:

$$(M_{11} - \lambda)(M_{22} - \lambda) - M_{12}M_{21} = 0$$

Окончательно:

$$\lambda^2 - (M_{11} + M_{22})\lambda + M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 0.$$

Корни этого уравнения :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) + \frac{1}{2}\sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}},$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(M_{11} + M_{22}) - \frac{1}{2}\sqrt{(M_{11} - M_{22})^2 + 4M_{12}M_{21}}. \qquad (10)$$

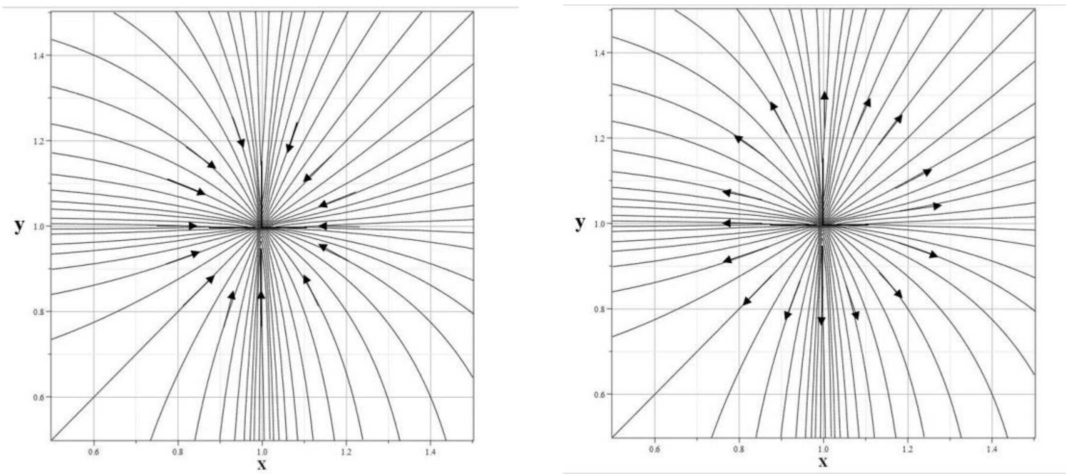
Существует четыре основных варианта комбинации свойств собственных чисел матрицы M, которые определяют свойства решений вблизи особых точек.

I. Узел. Мнимая часть обоих собственных чисел равна нулю: $\mathrm{Im}\{\lambda_1\} = \mathrm{Im}\{\lambda_2\} = 0$.

I.a. Притягивающий (устойчивый узел) (рис. 7a)- оба корня λ_1 и λ_2 имеют отрицательные вещественные части: $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} < 0, \mathrm{Re}\{\lambda_2\} = 0$.

I.b. Отталкивающий (неустойчивый узел) (рис. 7b) оба корня λ_1 и λ_2

имеют положительные вещественные части: $\mathrm{R}e\{\lambda_1\} < 0, \mathrm{R}e\{\lambda_2\} = 0$.



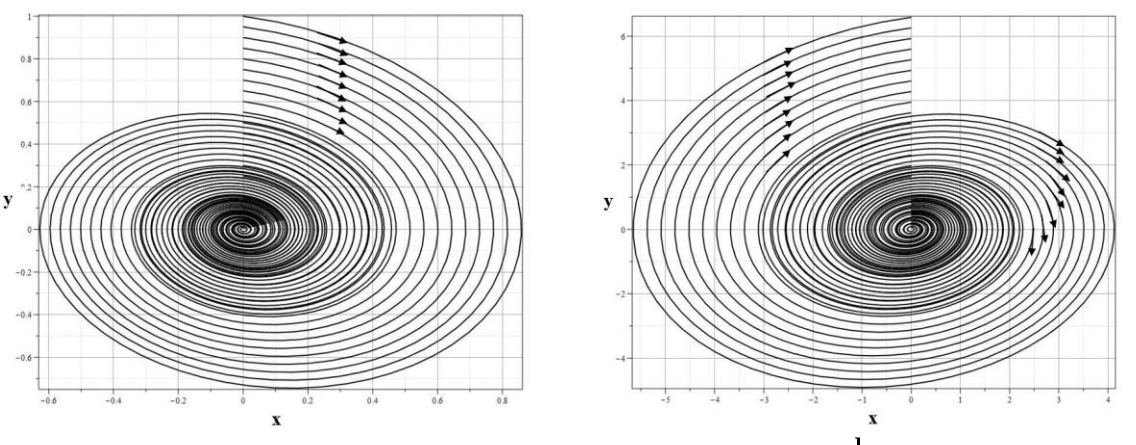
a b

Рис. 7: Фазовые траектории вблизи узлов: a) устойчивый, b) неустойчивый

<u>II. Фокус.</u> Мнимая часть обоих собственных чисел не равна нулю: $\mathrm{I}m\{\lambda_1\} \neq 0, \mathrm{I}m\{\lambda_2\} \neq 0$.

I.a. Притягивающий (устойчивый фокус) (рис. 8a) - оба корня λ_1 и λ_2 имеют отрицательные вещественные части: $\mathrm{R}e\{\lambda_1\} < 0, \mathrm{R}e\{\lambda_2\} = 0$.

I.b. Отталкивающий (неустойчивый фокус) (рис. 8b) - оба корня λ_1 и λ_2 имеют положительные вещественные части: $\mathrm{R}e\{\lambda_1\} < 0, \mathrm{R}e\{\lambda_2\} < 0$.



a b

Рис. 8: Фазовые траектории вблизи фокусов:
a) устойчивый фокус, b) неустойчивый фокус

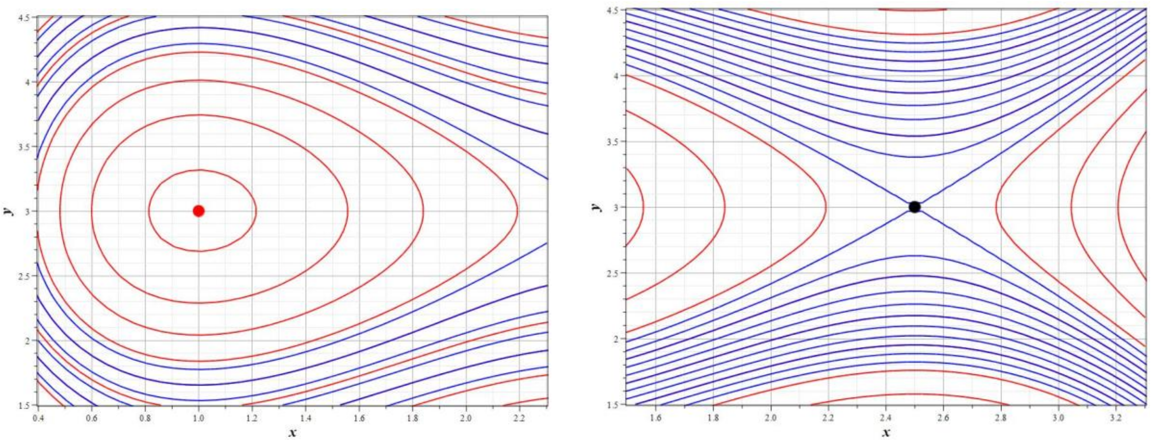
<u>III. Центр.</u> (рис. 9a) Мнимая часть обоих собственных чисел не равна нулю:

$\mathrm{I}m\{\lambda_1\} \neq 0, \mathrm{I}m\{\lambda_2\} \neq 0$. Вещественные части обоих собственных чисел равны нулю: $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} = 0, \mathrm{Re}\{\lambda_2\} = 0$.

Центр - всегда притягивающая (устойчивая) особая точка.

<u>IV. Седло. </u>(рис. 9b) Мнимая часть обоих собственных чисел произвольна. Вещественные части собственных чисел не равны нулю и имеют противоположные знаки: $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} < 0, \mathrm{Re}\{\lambda_2\} > 0$ или $\mathrm{Re}\{\lambda_1\} > 0, \mathrm{Re}\{\lambda_2\} < 0$.

Седло - всегда отталкивающая (неустойчивая) особая точка.



a b

Рис. 9: Фазовые траектории вблизи центра (a) и седла (b)

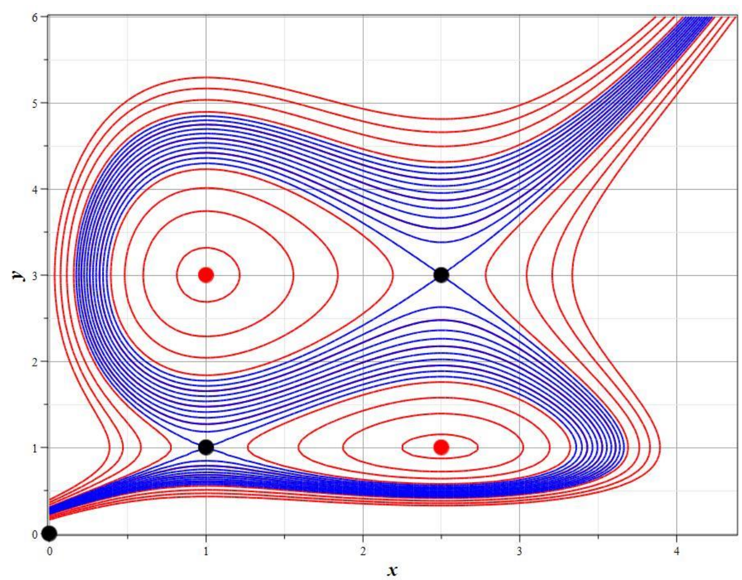


Рис. 10: Фазовые траектории динамической системы с двумя центрами и двумя седлами

Рассмотрим применение данного метода к рассмотренным ранее задачам.

Пример 1. Модель Лотки-Вольтерра. Особые точки модели Лотки-Вольтерра были найдены ранее:

$$P_1: x_1 = 0, y_1 = 0, P_2: x_2 = \frac{\mu}{\nu}, y_2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ищем решение вблизи каждой точки в форме (8) . В окрестности точки P_1 имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha(x_1 + \xi) - \beta(x_1 + \xi)(y_1 + \eta) \simeq \alpha\xi,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\mu(y_1 + \eta) + \nu(x_1 + \xi)(y_1 + \eta) \simeq -\mu\eta.$$

Собственные числа модели имеют вид: $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\mu$. Поскольку предполагается, что α и μ - вещественные и $\alpha > 0, \mu > 0$, то точка P_1 оказывается **седлом**.

В окрестности точки P_2 имеем:

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha(x_2 + \xi) - \beta(x_2 + \xi)(y_2 + \eta) \simeq (\alpha - \beta y_2)\xi - \beta x_2\eta = -\beta\frac{\mu}{\nu}\eta,$$
$$\frac{d\eta}{dt} = -\mu(y_2 + \eta) + \nu(x_2 + \xi)(y_2 + \eta) \simeq -(\mu - \nu x_2)\eta + \nu y_2\xi = \nu\frac{\alpha}{\beta}\xi.$$

Ищем решение последней системы в форме (9) . В результате приходим к следующей алгебраической системе:

$$\lambda A = -\frac{\beta\mu}{\nu}B, \ \lambda B = \frac{\alpha\nu}{\beta}A.$$

Отсюда находим собственные числа:

$$\lambda^2 = -\mu\alpha$$

или

$$\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\mu}, \lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\mu}.$$

Оба собственных числа являются чисто мнимыми. Следовательно точка P_2 является **центром**.

Пример 2. Модель Ланкастера.

Модель Ланкастера из предыдущей лекции имеет такой вид:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta x \tag{11}$$

Эта система имеет одну особую точку с координатами: $x_0 = 0, y_0 = 0$. Эта система линейна, поэтому анализ ее устойчивости прост и может быть проведен без теории возмущений. Общее решение этой системы имеет вид:

$$x = Ae^{\mu t} + Be^{-\mu t}, \ \ y(t) = -\frac{\mu}{\alpha}(Ae^{\mu t} - Be^{-\mu t}),$$

где A и B - постоянные интегрирования, а $\mu = \sqrt{\alpha\beta} > 0$. Оба собственных числа системы вещественны и одно из них - положительно. Следовательно, особая точка неустойчива и представляет собой седло.

Литература

[1] Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[2] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

[3] Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций // Проблемы кибернетики, вып. 25. - М.: Наука, 1972, с. 101 - 106.

[4] Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.:Мир,1983.

[5] Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем наплоскости. Серия “Справочная математическая библиотека”. Вып. 11. М.: Наука, 1989. 489 с

[6] В.М. Журавлев, В.В. Самойлов, А.Л. Семенов. Моделирование гуманитарных процессов. УлГУ, 2012