МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Инженерно-физический факультет высоких технологий

В. М. Журавлев

Нелинейные интегрируемые модели физических процессов

Метод функциональных подстановок

Ульяновск
2019

УДК 51.7:524.8:532.5
ББК 22.311
Ж91

Печатается по решению Ученого совета
инженерно-физического факультета высоких технологий
Ульяновского государственного университета
(протокол № 12 от 2018 года)

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Учайкин*;
доктор физико-математических наук, профессор *Ю. Г. Игнатьев*

Журавлев В. М.
Ж91 **Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок** : [моногр.] / В. М. Журавлев. – Ульяновск : УлГУ, 2019. – 181 с.

ISBN 978-5-88866-765-1

Монография посвящена проблемам построения и исследования интегрируемых моделей теоретической и математической физики, имеющих приложения в различных разделах физики.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области теоретической и математической физики.

УДК 51.7:524.8:532.5
ББК 22.311

ISBN 978-5-88866-765-1

© Журавлев В. М., 2019
© Ульяновский государственный университет, 2019

Предисловие

Я предпочитаю найти одну истину,
хотя бы и в незначительных вещах,
нежели долго спорить о величайших вопросах,
не достигая никакой истины.

Галилео Галилей

Успешность той или иной теоретической модели, основанной на дифференциальных уравнениях, зависит от того, насколько точным и полным может быть анализ их решений. На современном этапе наиболее полный анализ может быть проведен для моделей, построенных на основе линейных дифференциальных уравнений. Основным свойством, определяющим успешное применение линейных моделей на практике, является принцип линейной суперпозиции, позволяющий собирать сложные решения из простейших. Это напоминает игру в кубики, когда из почти одинаковых по форме элементов собирают очень сложные конструкции. Поскольку методы построения решений, основанные на принципе линейной суперпозиции, очень эффективны при решении множества прикладных задач, то одним из основных направлений построения аналитических решений нелинейных уравнений является приведение их к совокупности линейных. Такой переход может осуществляться различными способами.

Наиболее универсальный метод такого рода - это применение теории возмущений в той или иной форме. Однако использование теории возмущений лишает получаемые решения особых свойств, которые присущи именно решениям нелинейных моделей. Это связано с тем, что решение в теории возмущений имеет вид бесконечных рядов, сходимость которых чаще всего не может быть проверена в полной мере. Это означает, что приближенные решения, построенные на основе первых нескольких порядков, чаще всего не отражают существенных свойств нелинейного процесса. Для выявления специфического поведения сложных систем необходимо иметь в распоряжении методы преобразования нелинейного уравнения в линейное или другое нелинейное уравнение, но допускающее полную интегрируемость. Одним из таких общих методов, позволяющих свести нелинейную задачу к линейной или полностью интегрируемой, является метод функциональных подстановок, развитие которого связано в первую очередь с подстановкой Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса [98, 101, 106].

Настоящая монография посвящена изложению основ метода обобщенных функциональных подстановок для различных задач математической и теоретической физики с приложениями к нелинейным моделям гидродинамики, нелинейной оптики, астрофизики, теории поля и т.д. Основное содержание монографии построено на результатах, полученных в последние несколько лет, в основном в работах автора.

Основное внимание в монографии уделено методам построения точно решаемых моделей нелинейных волн и исследованию свойств их решений. Изложение не претендует на полноту представления всех имеющихся на сегодняшний день результатов в теории интегрируемых моделей нелинейных волн и будет касаться в основном лишь метода функциональных подстановок, далее МФП. Как будет показано, данный метод сам по себе имеет ряд вариантов применения в различных разделах физики. Разнообразие форм применения МФП определяется координатной размерностью задач и числом степеней свободы или компонентов физической системы, для которой применяется развитый вариант МФП. Например, для задач теории нелинейных процессов в размерности 1+1 в системах с небольшим числом компонентов наиболее подходящими вариантами МФП являются либо скалярный вариант, либо матричный, приводящий к уравнениям в частных производных. Эти варианты являются исходными для общего понимания работоспособности МФП и излагаются в первых главах данной монографии.

Метод может применяться и к конечномерным динамическим системам, для чего используются варианты МФП, построенные на базе уравнений с производными на алгебрах, а также сеточных уравнениях. Кроме этого, методу можно придать специфические формы, пригодные для решения задач в некоторых конкретных областях. Примером может служить метод гидродинамических подстановок, общая идеология которого излагается в отдельной главе данной работы. Важный вопрос о связи МФП и метода обратной задачи (МОЗ) в данной работе излагается в отдельной главе.

Во второй главе приводятся общие результаты метода функциональных подстановок типа Коула-Хопфа в применении к скалярным моделям в размерности 1+1. Излагаются некоторые исходные идеи данного метода и примеры его применения к конкретным моделям нелинейных процессов, связанных с уравнениями телеграфного типа, Лиувилля, а также уравнениями, подобными уравнениям Кортевега-де Вриза (КдВ), но не интегрируемыми с помощью МОЗ.

Третья глава содержит обобщение теории функциональных подстановок на матричные задачи. Это обобщение метода функциональных подстановок типа Коула-Хопфа существенно расширяет класс моделей, который может быть построен и исследован в рамках такого подхода. В этом разделе, в частности, приведены примеры анализа задач в нелинейной оптике, близкие к моделям, основанным на нелинейном уравнении Шредингера (НУШ).

Четвертая глава посвящена специальной формулировке метода матричных функциональных подстановок, в котором роль дифференцирования по координате заменена на производную на матричной алгебре. В таком подходе МФП может применяться к конечномерным динамическим системам. В качестве основного примера в этой главе исследована модель однородного магнетика в произвольном магнитном поле, хотя сам подход может применяться к более широкому классу конечномерных динамических систем.

В пятой главе излагается расширение МФП на случай сеточных и других типов уравнений, в записи которых используются специфические типы производных, в частности, производные в форме разностных производных и их различных обобщений. Приведены примеры построения решений соответствующих типов уравнений с разностными и другими типами производных.

В шестой главе скалярный и матричный методы функциональных подстановок применяются к многомерным моделям физических процессов. Среди них рассматриваются модели многомерные гидродинамические, модели, относящиеся к диффузионным процессам и нелинейной оптике, а также модели квантовых дираковских частиц.

Седьмая глава описывает многофункциональное расширение МФП, позволяющее связать этот метод с методом обратной задачи. Приведены конкретные примеры построения таким способом многосолитонных решений уравнений КдВ и НУШ.

В восьмой главе излагаются основные результаты, касающиеся специальной формы подстановок, имеющих непосредственное отношение к гидродинамическим задачам. В этой главе приведен ряд точных результатов, касающихся динамики неоднородной идеальной и вязкой жидкости, теории самогравитирующей пыли и пылевой плазмы.

Часть результатов, нашедших отражение в данной монографии, были получены в рамках работ по проектам РФФИ № 16-42-732119 офим-м.

Автор выражает признательность своим коллегам, участвовавшим в совместных работах, результаты которых отражены в данной монографии.

1 Введение

Современная физика и сопряженные с ней области науки оперируют множеством моделей процессов и явлений различного уровня сложности. Наиболее существенным свойством современных моделей является их нелинейность. Это свойство означает, что изначально изучаемое явление или процесс имеют или наделяются такими свойствами, которые нельзя представить в виде простой совокупности более простых процессов, протекающих независимо друг от друга. В нелинейных моделях все элементы систем взаимодействуют друг с другом так, что их невозможно простым образом разделить на отдельные составляющие. Очень часто именно нелинейность определяет характерные черты реальных явлений или процессов, которые не удается описать с помощью простых линейных моделей. Этот факт был осознан в полной мере лишь во второй половине XX века и стал одним из главных идеологических основ общего подхода к выбору моделей для описания реальных систем и их поведения.

Основной сложностью на пути использования нелинейных моделей для описания реальных явлений и процессов является отсутствие общих математических методов построения точных решений нелинейных уравнений, на которых строится модель. Конечно, в современном арсенале математических методов построения решений большинства уравнений математической и теоретической физики имеется совокупность численных методов. Однако численные решения уравнений по своей идеологии являются приближенными и, что более важно, строятся только для каждого отдельного решения уравнения. Это приводит к целому букету трудностей в интерпретации полученных решений и необходимости дополнительно исследовать аналитическими методами устойчивость исследуемых численными методами решений. Этих трудностей лишены методы анализа динамики нелинейных систем, построенные на точных аналитических решениях. Поэтому одной из важных тенденций в математической и теоретической физике XX века стал пристальный интерес к различным математическим методам, которые позволяли бы строить точные решения определенных типов нелинейных уравнений, а более сложные уравнения упрощать так, чтобы их можно было бы привести к одному из видов интегрируемых нелинейных уравнений.

Методы редукции сложных уравнений к более простым появились с момента создания аппарата дифференциальных уравнений для описания физических явлений. Эти методы опирались на возможность представить решения сложных уравнений с помощью бесконечных рядов функций, которые являлись решениями более простых уравнений. Такой подход в целом называется теорией возмущений. Этот метод предполагает, что в исходном уравнении можно выделить некоторое простое точное решение сложной системы, которое отражает ее главные свойства. Такое решение часто называют “невозмущенным”. При этом предполагается, что оно “не сильно” отличается от нужного решения. Далее с помощью решения совокупности, как правило, однотипных линейных уравнений невозмущенное решение аддитивно дополняется их решениями. Основная проблема такого подхода состоит в том, что множество невозмущенных, простых решений очень ограничено, а несколько дополнительных слагаемых в теории возмущений не отражают сути нелинейного явления в целом. Для этого необходимо получать достаточно полную информацию о всей бесконечной совокупности возмущенных решений всех порядков. Последнее, однако, чаще всего на практике невозможно сделать.

Более развитый метод теории возмущений, часто называемый методом многомасштабных разложений [10, 19], дает возможность построить процедуру вычисления возмущенных решений так, что она может учитывать именно нелинейные свойства процесса. При этом на каждом шаге построения возмущенных решений приходится иметь дело опять с нелинейными уравнениями, но более простого вида. Этот подход и реализует концепцию приведения сложных уравнений к более простым, для которых уже имеются методы построения точных решений. Таким образом, на первый план в развитии методологии исследования нелинейных моделей выдвигаются методы отыскания или перечисления всех возможных интегрируемых нелинейных уравнений, которые могут быть использованы в схемах метода теории возмущений в форме многомасштабных разложений.

Первым полезным для широкого круга задач способом отыскания точно интегрируемых уравнений математической физики стал метод обратной задачи (МОЗ), который первоначально опирался на методологическую базу квантовой теории. Основой МОЗ стала процедура приведения нелинейного уравнения к специальной форме записи, эквивалентной условию коммутативности пары линейных дифференциальных операторов, так называемой пары Лакса [112]. Первым и типичным примером применения МОЗ является уравнение Кортевега-де-Вриза (КдВ):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

которое можно представить в виде условия коммутативности двух операторов:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t), \;\; \hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 6u_x.$$

Действительно:

$$[\hat{L},\hat{A}]\Psi = (u_t + 6uu_x + u_{xxx})\Psi.$$

Поэтому, если функция $u(x,t)$ такова, что коммутатор операторов $\hat{L}$ и $\hat{A}$ равен нулю для любой функции Ψ из подходящего функционального пространства, то эта функция является решением уравнения КдВ (1.1).

Линейные операторы и условия их коммутативности стали играть важную роль в задачах теоретической и математической физики благодаря квантовой теории. Однако те задачи, к которым применим МОЗ, относятся к гораздо более широкому кругу систем и явлений в них, чем квантовые системы, что и сделало МОЗ эффективным средством исследований волновых процессов во многих разделах современной физики - гидродинамике, нелинейной оптике, теории плазмы и т.д. [52, 19, 82]. Тем не менее, к настоящему времени установлено, что круг нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗ, оказался слишком узким и не отвечает требованиям множества постановок реальных физических задач. В первую очередь это относится к задачам, связанным с диссипативными процессами, которые не обладают достаточным числом дифференциальных законов сохранения в стандартной для гамильтоновских систем форме, что составляет одно из основных свойств нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗ.

Другой подход к отысканию интегрируемых уравнений связан с отысканием преобразований неизвестных функций к специальному виду, когда преобразованная функция удовлетворяет другому уравнению, для которого уже легко доказать полную интегрируемость. Такой подход был назван методом функциональных подстановок (МФП), по названию одного из первых примеров его реализации для конкретной физической задачи об одномерном течении вязкой однородной жидкости, которое описывается уравнением Бюргерса [98]

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \tag{1.2}$$

Здесь $u(x,t)$ - скорость течения среды, а ν - коэффициент ее кинематической вязкости. В работах [101, 106] было показано, что это уравнение сводится с помощью подстановки

$$u = \frac{\partial \ln \phi}{\partial x}, \tag{1.3}$$

к линейному уравнению теплопроводности

$$\phi_t - \nu\phi_{xx} = 0,$$

относительно вспомогательной функции $\phi(x,t)$. Подстановка (1.3) называется подстановкой Коула-Хопфа и долгое время оставалась почти единственным примером удачного применения МФП к реальным задачам теоретической физики. Другой более ранний пример подобного рода, связанный с построением точных решений двумерного уравнения Лиувилля

$$\Delta\theta = e^{-2\theta},\ \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

играющий важную роль в теории двумерных поверхностей [11], был найден в работах [114] и [84, 119].

В общей форме записи функция

$$\theta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2}{\Phi^2}\right),$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля при условии, что функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0.$$

Этот результат и некоторые другие результаты [84, 73, 74], относящиеся, например, к уравнению Sin-Gordon

$$u_{xt} = \sin(u),$$

чаще всего определяют как вариант преобразований Бэклунда [97, 111, 96, 73, 74].

Поэтому до недавнего времени подстановки Коула-Хопфа и Лиувилля, сводящие соответствующие уравнения к линейным, не рассматривались как принадлежащие к одному подходу, основанному на МФП [50].

В конце 80-х годов прошлого века в целом ряде работ [86, 87, 123, 125] было установлено определенное подобие между уравнениями, интегрируемыми с помощью МОЗ, и уравнениями, интегрируемыми с помощью МФП. Последние получили название уравнений типа Бюргерса. Более систематический подход к построению уравнений типа Бюргерса, интегрируемых с помощью МФП в различных его формах, был предложен в работах [34, 39] и развит в дальнейшем в цикле работ [35, 36, 38, 41, 47, 50]. В монографии излагаются основные идеи этого подхода, имеющего множество различных вариантов.

2 Метод функциональных подстановок типа Коула-Хопфа

2.1 О пользе дифференцирования

2.1.1 Поле переноса температуры

Долгое время существование подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса связывалось исключительно со специальной структурой самого уравнения. Это не позволяло особенно надеяться на то, что аналогичный подход можно использовать еще где-то. Однако в 2006 году появилась работа [93], в которой связь между уравнением Бюргерса и уравнением теплопроводности получила совершенно новое обоснование.

В работе [93] рассматривалась задача о перемещении в пространстве точек с заданной температурой, если сама температура описывается простым уравнением теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности ν. Скорость перемещения таких точек может быть вычислена, исходя из следующих рассуждений. Предположим, что распределение температуры в пространстве и времени задается с помощью функции $T(x,t)$. Тогда закон движения $x = x(t)$ точки с температурой T_0 можно вычислить с помощью решения алгебраического уравнения

$$T(x(t),t) = T_0. \tag{2.1}$$

Дифференцируя это уравнение по времени, находим:

$$\frac{dT(x(t),t)}{dt} = \left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{T=T_0} + \frac{dx}{dt}\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{T=T_0} = 0.$$

Скорость перемещения точки $V = dx/dt$ образует поле, если значение T_0 пробегает все допустимые значения. Эти допустимые значения функции $T(x,t)$ часто называют **маркерами**, а само уравнение (2.2) называют **уравнением переноса маркеров**. При этом форма уравнения для скорости перемещения остается неизменной. В этом случае поле $V(x,t)$ можно рассчитать, исходя из уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V(x,t)\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{2.2}$$

Следуя работе [93], предположим, что функция $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$T_t - \nu T_{xx} = 0. \tag{2.3}$$

Возникает вопрос - существует ли универсальная форма уравнения для скорости $V(x,t)$, не зависящая от выбора функции $T(x,t)$ как решения уравнения теплопроводности? Решение этой задачи и было найдено в работе [93]. Суть подхода, предложенного Урюковым, состояла в следующем. Рассмотрим вместе с уравнениями (2.3) и (2.2) их дифференциальные следствия. Именно рассмотрим следующую общую систему соотношений:

$$\begin{aligned}
&T_t - \nu T_{xx} = 0,\ T_t + VT_x = 0,\\
&T_{xt} - \nu T_{xxx} = 0,\ T_{tt} - \nu T_{xxt} = 0,\\
&T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} = 0,\ T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} = 0,\\
&T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Эта система соотношений содержит семь линейных уравнений относительно семи производных функции $T(x,t)$. Данная система замкнута относительно производных $T_x, T_t, T_{xx}, T_{xt}, T_{tt}, T_{xxx}, T_{xxt}$ и является однородной. Следовательно, если функция $T(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности, то по построению она является совместной, а ее определитель равен нулю. Вычисляя определитель этой системы, получаем следующее соотношение:

$$V_t + 2VV_x - \nu V_{xx} = 0, \tag{2.5}$$

что в точности совпадает с уравнением Бюргерса (1.2) при условии $u = 2V$.

Этот результат можно было бы получить из более простых соображений, замечая, что уравнение (2.2) преобразуется в подстановку Коула-Хопфа:

$$V = -\frac{T_t}{T_x} = -\frac{\nu T_{xx}}{T_x} = -\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln T_x,$$

если воспользоваться уравнением теплопроводности (2.3). Если же факт наличия подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса выглядит как “случайная” особенность, то способ вывода уравнения Бюргерса, как условия совместности системы дифференциальных соотношений, связанных с уравнением теплопроводности, выглядит как результат более общей идеологии, которую можно распространить и на другие уравнения.

2.1.2 Поле скоростей переноса потенциалов электромагнитного поля в вакууме

Для демонстрации того, что идеология, предложенная в работе [93], может быть распространена на более широкий класс уравнений, рассмотрим вывод общего уравнения для скоростей переноса значений функции, удовлетворяющей уравнению Д’Аламбера. Уравнение Д’Аламбера описывает, например, динамику распространения электромагнитных волн в вакууме [34]. В качестве маркера в этом случае можно выбрать значения потенциала электрического поля или какой-либо компоненты его напряженности. В этом случае задача о поле скорости перемещения точек равной напряженности ставится совершенно аналогично тому, как это было сделано для поля скорости переноса точек равной температуры.

Пусть функция $T(x,t)$ - теперь компонента напряженности электрического поля, которая удовлетворяет уравнению Д'Аламбера:

$$T_{tt} - c^2 T_{xx} = 0, \tag{2.6}$$

где c - скорость распространения волн в среде. Само уравнение переноса значений функции $T(x,t)$ имеет тот же вид, что и уравнение (2.2). Производя формальное дифференцирование уравнений (2.6) и (2.2) по x и t, легко убедиться, что система производных функции T вновь замыкается, но уже для совокупности из девяти производных: $T_x, T_t, T_{xx}, T_{xt}, T_{tt}, T_{xxx}, T_{xxt}, T_{xtt}, T_{ttt}$:

$$\begin{aligned}
&T_{tt} - c^2 T_{xx} = 0,\ T_t + VT_x = 0,\ \ T_{xtt} - c^2 T_{xxx} = 0,\ T_{ttt} - c^2 T_{xxt} = 0,\\
&T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} = 0,\ T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} = 0,\\
&T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} = 0,\ T_{ttt} + V_{tt} T_x + 2V_t T_{xt} + VT_{xtt} = 0,\\
&T_{xtt} + V_{xt} T_x + V_x T_{xt} + V_t T_{xx} + VT_{xxt} = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Если функция $T(x,t)$ удовлетворяет уравнению Д'Аламбера, то последняя однородная система совместна по построению, а определитель ее равен нулю. Это приводит к следующему, на вид достаточно сложному, уравнению для функции $V(x,t)$:

$$(V^2 - c^2)\Big((V_{tt} - c^2 V_{xx})(V^2 - c^2) - 2V[(V_t)^2 - c^2 (V_x)^2]\Big) = 0$$

Из этого уравнения следует, что есть три независимые ветви решений. Два решения $V = \pm c$ соответствуют двум бегущим в одну сторону решениям Д'Аламбера: $T_+(x,t) = g(x - ct)$ и $T_-(x,t) = h(x + ct)$, а третье уравнение

$$(V_{tt} - c^2 V_{xx})(V^2 - c^2) - 2V[(V_t)^2 - c^2 (V_x)^2] = 0, \tag{2.8}$$

соответствует их линейной суперпозиции. Это последнее уравнение можно привести к более компактному виду:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \ln\left|\frac{c - V}{c + V}\right| = 0. \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что функция $F(V) = \ln|c - V| - \ln|c + V|$ удовлетворяет уравнению Д'Аламбера. Уравнение (2.9) представляет собой вновь уравнение Д'Аламбера. Следовательно, локальное преобразование

$$T(x,t) \to T'(x,t) = \ln\left(\frac{c - V(x,t)}{c + V(x,t)}\right) = \ln\left(\frac{cT_x + T_t}{cT_x - T_t}\right). \tag{2.10}$$

превращает любое решение уравнения Д'Аламбера вновь в решение уравнения Д'Аламбера. Смысл этого результата можно понять, если решение для $T(x,t)$ представить в виде

$$T(x,t) = f(x - ct) + h(x + ct), \tag{2.11}$$

где $f(\xi)$ и $h(\eta)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции относительно конусных переменных $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$. Подставляя (2.11) в выражение для функции $T'(x,t)$, находим:

$$T'(x,t) = \ln f'(x-ct) - \ln h'(x+ct).$$

Поскольку в представлении (2.11) функции $f(\xi)$ и $h(\eta)$ произвольны, то из последнего соотношения следует, что отображение (2.10) преобразует $T(x,t)$ к тому же общему представлению (2.11) с заменой функции $f(x-ct)$ на функцию $\ln f'(x-ct)$ и $h(x+ct)$ на функцию $-\ln h'(x+ct)$ того же типа. Сравнивая этот результат с результатом, полученным для уравнения теплопроводности, можно утверждать, что соотношения (2.10) представляют собой подстановку, сводящую нелинейное уравнение (2.8) к линейному уравнению Д'Аламбера. При этом само отображение $T(x,t) \to T'(x,t) = \ln\left(\dfrac{c - V(x,t)}{c + V(x,t)}\right)$ можно рассматривать как преобразование Бэклунда [97, 111, 96].

2.2 Обобщенные подстановки типа Коула-Хопфа

Примеры с уравнениями теплопроводности и Д'Аламбера показывают, что существует некоторая общая схема, которая позволяет строить нелинейные уравнения с заранее известным свойством интегрируемости, причем эта процедура построения интегрируемых уравнений является конструктивной, поскольку сразу предлагает и способ построения решений этих уравнений. Реализация этой общей схемы может иметь несколько вариантов. Часть из этих схем была описана в работах [34, 39, 35, 36]. Все эти схемы опираются на различные совокупности исходных базовых соотношений, из которых с помощью дополнительного интегрируемого уравнения получается новое нелинейное интегрируемое уравнение. Рассмотрим некоторые из этих схем, а затем опишем самую общую схему, из которой можно получить все остальные.

Идея обобщения подстановок типа Коула-Хопфа заключается в следующем. При рассмотрении вопроса о том, как перемещаются в пространстве маркеры, выделенные значением некоторой функции $T(x,t)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности, это уравнение можно обобщить, вводя в него одну произвольную вспомогательную функцию. Рассмотрим вопрос о скорости перемещения маркерп $T(x,t)$, удовлетворяющего уравнению распространения тепла в среде с адвекцией со скоростью $W(x,t)$ [35, 39]:

$$T_t - \nu T_{xx} + W(x,t) T_x = 0. \tag{2.12}$$

Нетрудно понять, что система дифференциальных следствий, которые теперь можно извлечь из уравнения (2.12) и уравнения переноса маркера (2.2), не будет по сути сильно отличаться от системы (2.4). Поскольку дополнительное слагаемое в уравнении (2.12) имеет меньший порядок производной функции T, чем его главная часть, то и число самих уравнений в (2.4) и число производных, относительно которых эта система будет замкнута, останется неизменным. Существенно изменится лишь определитель этой системы, который будет теперь содержать не только производные функции $V(x,t)$, но и функции $W(x,t)$. Действительно, система дифференциальных следствий (2.12) имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
&T_t - \nu T_{xx} + WT_x = 0,\ T_t + VT_x = 0,\\
&T_{xt} - \nu T_{xxx} + W_x T_x + WT_{xx} = 0,\ T_{tt} - \nu T_{xxt} + +W_t T_x + WT_{xt} = 0,\\
&T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} = 0,\ T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} = 0,\\
&T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Вычисляя определитель этой однородной и совместной по построению системы, приходим к следующему уравнению:

$$U_t + UV_x + VU_x - \nu V_{xx} = 0, \tag{2.14}$$

где $U = (V - W)/\nu$. Это уравнение содержит две неизвестные функции $V(x,t)$ и $U(x,t)$. Поэтому данное уравнение, представляющее собой связь между этими функциями в предположении, что эти функции связаны с $T(x,t)$ уравнениями (2.4) и (2.2), которые в дальнейшем будут называться **базовыми**, можно переписать в следующем виде:

$$V = -\frac{T_t}{T_x},\ U = -\frac{T_{xx}}{T_x}. \tag{2.15}$$

Из этих двух соотношений следует, что все производные функции T любого порядка могут быть выражены исключительно через одну из них, например T_x, причем соответствующие коэффициенты пропорциональности будут некоторыми дифференциальными полиномами от V и U. В частности:

$$\begin{aligned}
&T_{xt} = -Q(x,t)T_x,\ Q = V_x - UV,\\
&T_{tt} = -R(x,t)T_x,\ R = V_t - VV_x + V^2 U,\\
&T_{xxx} = -(U_x - U^2)T_x, \dots
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Используя эти обозначения, соотношение (2.14) можно записать более компактно:

$$U_t = Q_x. \tag{2.17}$$

Смысл рассмотрения расширенного варианта уравнения теплопроводности с адвекцией состоит в том, что универсальное соотношение (2.17) связывает две функции U и Q, каждая из которых вычисляется через произвольную функцию $T(x,t)$. Это оказывается возможным, поскольку уравнение (2.12) содержит дополнительный свободный функциональный параметр по сравнению с уравнениями (2.3) и (2.6). Это означает, что, выбирая функцию $T(x,t)$ из множества решений определенного интегрируемого дифференциального уравнения, можно получить при определенных условиях дополнительную связь между функциями U и Q. Эта связь в общем случае будет нелинейной и с учетом соотношения (2.17) будет составлять замкнутую систему уравнений для этих функций. Это и есть общая идеология, лежащая в основе МФП.

2.3 Реализация простейшей схемы МФП

Обратим внимание теперь на то, что наличие двух свободных параметров в системе уравнений (2.2) и (2.12) приводит к возможности использовать вместо них пару уравнений:

$$T_{xx} = UT_x,\ T_{xt} = QT_x.$$

Заменяя в этих соотношениях T_x на T, приходим к самой простой системе исходных уравнений, которую можно записать в таком виде:

$$T_x = A(x,t)T,\ \ T_t = B(x,t)T, \tag{2.18}$$

Эту систему в дальнейшем будем называть основной базовой системой соотношений. Функцию $T(x,t)$ будем называть вспомогательной, а функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$ - базовыми. Поскольку произвол в выборе функции $T(x,t)$ переносится, естественно, и на функцию $T(x,t) = T_x$, то в дальнейшем знак ~ будем опускать.

При любой заданной основной функции $T(x,t)$ функции $A(x,t)$ и $B(x,t)$ вычисляются из базовых соотношений (2.18) в соответствии с формулами:

$$A = T_x / T,\ B = T_t / T. \tag{2.19}$$

При этом эти функции в силу дифференцируемости функции $T_{x,t}$ будут удовлетворять уравнению связи:

$$A_t = B_x. \tag{2.20}$$

Собственно, соотношение (2.17) переходит в (2.20) при замене $T_x(x,t)$ на $T(x,t)$.

Предполагая гладкость высокого порядка или даже аналитичность функции T, используя (2.18), можно получить линейную связь всех производных функции $T(x,t)$ с самой этой функцией. Доказательство этого факта строится по индукции. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^{k+m}T(x,t)}{\partial x^k \partial t^m} \equiv T^{[k,m]}(x,t). \qquad (2.21)$$

Предположим, что для смешанных производных порядка k по x и m по t связь найдена:

$$\frac{\partial^{k+m}T}{\partial x^k \partial t^m} = T^{[k,m]} = A^{(k,m)}(A,B)T.$$

Здесь $A^{(k,m)}(A,B)$ - некоторый дифференциальный полином от A и B. Тогда, дифференцируя это соотношение по отдельности по x и t, находим:

$$T^{[k+1,m]} = \frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)}T + A^{(k,m)}T_x = \left(\frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}A\right)T,$$

$$T^{[k,m+1]} = \frac{\partial}{\partial t}A^{(k,m)}T + A^{(k,m)}T_t = \left(\frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}B\right)T.$$

Отсюда следует, что если $A^{(k,m)}(A,B)$ - дифференциальный полином от A и B, то и $A^{(k+1,m)}(A,B)$, и $A^{(k,m+1)}(A,B)$ также будут дифференциальными полиномами от A и B. В результате получаем рекуррентные соотношения для вычисления функций $A^{(k,m)}(A,B)$:

$$A^{(k+1,m)} = \frac{\partial}{\partial x}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}A, \ k,m = 1,\ldots \qquad (2.22)$$

$$A^{(k,m+1)} = \frac{\partial}{\partial t}A^{(k,m)} + A^{(k,m)}B, \ k,m = 1,\ldots$$

$$A^{[1,0]} = A, \ A^{[0,1]} = B.$$

В частности:

$$A^{[1,1]} = A_t + AB = B_x + BA, \quad A^{[2,0]} = A_x + A^2, \ A^{[0,2]} = B_t + B^2,$$

$$A^{[3,0]} = A_{xx} + 3AA_x + A^3, \ A^{[2,1]} = A_{xt} + 2AA_t + BA_x + A^2B,\ldots$$

Как уже отмечалось, соотношения (2.18) и (2.20) имеют место для любой дифференцируемой вспомогательной функции $T(x,t)$. Поэтому между функциями $A(x,t)$ и $B(x,t)$ возникает дополнительная связь, если функции $T(x,t)$ выбирать из некоторого множества решений определенного вида дифференциальных уравнений. Предположим, что функция $T(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению составного порядка (N,M):

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{m=0}^{M} C_{(k,m)}(x,t)T^{[k,m]} = 0. \qquad (2.23)$$

Тогда функции A и B связаны дополнительным нелинейным соотношением

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} C_{(k,m)}(x,t)A^{(k,m)}(A,B) + C_{(10)}(x,t)A + C_{(01)}(x,t)B + C_{00}(x,t) = 0. \qquad (2.24)$$

Это соотношение совместно с условием (2.20) можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно пары функций A и B. В результате пара нелинейных уравнений (2.24) и (2.20) относительно функций $A(x,t)$ и $B(x,t)$ имеет в качестве решения функции, вычисляющиеся из любого решения уравнения (2.23) с помощью подстановок (2.19). Содержательность такого подхода МФП состоит в том, что с его помощью удается получить решения целого ряда важных прикладных задач, что будет продемонстрировано далее. Кроме этого, следует подчеркнуть, что сама процедура построения решений системы нелинейных уравнений (2.24) и (2.20) максимально упрощена по сравнению с МОЗ и универсальна по отношению к форме и порядку исходных уравнений типа (2.23).

Еще одним важным свойством МФП в форме базовых соотношений (2.18) является то, что эта схема может применяться не обязательно к линейным уравнениям общего вида (2.23). Очевидно, что в таком виде ее можно применять и к нелинейным вспомогательным уравнениям. Критерием применимости является только одно условие, состоящее в том, что в результате подстановок рекуррентных соотношений (2.22) из результирующего уравнения можно было бы исключить основную функцию $T(x,t)$. В противном случае коэффициенты результирующего уравнения относительно A и B будут зависеть от конкретного вида функции T, что приведет к исчезновению универсальности решений. Очевидно, это возможно, если все слагаемые вспомогательного уравнения для $T(x,t)$ являлись мономами одинаковой степени по T и ее производным. Примером могут служить уравнения:

$$T_{xx}T_{tt} = (T_{xt})^2,\ T_tT_x = T_{xx}T,\ (T_x)^2T_t = T_{xx}T_{xt}T, \ldots.$$

Один из таких примеров был приведен в работе [39] и будет рассмотрен далее.

Сравнивая первоначальный подход, основанный на дифференциальных следствиях из уравнения переноса маркера (2.2) и уравнении либо теплопроводности, либо Д’Аламбера, со схемой, основанной на (2.18), можно заключить, что в последней воспроизводятся все элементы первоначального подхода. Действительно, вспомогательное уравнение, из которого возникает дополнительная связь между A и B, фактически является обобщением уравнений теплопроводности и Д’Аламбера, но без необходимости проверки замыкания системы производных основной функции T.

Уравнение же переноса маркера, т.е. фиксированных значений $T_0 = T(x(t),t)$, воспроизводится из базовых соотношений (2.18) с помощью исключения из этой пары уравнений самой функции $T(x,t)$. В результате такой процедуры находим:

$$T_t - \frac{B}{A}T_x = 0,$$

откуда получаем явный вид скорости $V(x,t)$ переноса маркера:

$$V(x,t) = -\frac{B(x,t)}{A(x,t)}. \qquad (2.25)$$

Таким образом, базовая схема, основанная на (2.18), позволяет решать и задачу переноса маркеров исследуемого процесса. Этот факт оказывается полезным для анализа ряда прикладных задач.

2.4 Примеры нелинейных интегрируемых моделей

2.4.1 Нелинейное телеграфное уравнение

В качестве первого примера полезности развитой схемы рассмотрим общую модель, связанную с линейным телеграфным уравнением следующего вида:

$$T_{xt} + \gamma T_{xx} + aT_x + bT_t + cT = 0. \qquad (2.26)$$

Здесь предполагается, что $a = a(x,t), b = b(x,t)$ и $c = c(x,t)$ - некоторые заданные функции, а γ - вещественная постоянная. Очевидно, что максимальную пользу можно извлечь для тех случаев, когда уравнение (2.26) интегрируется в элементарных функциях. Это ограничивает выбор a,b,c, но вначале построим модель для общего случая выбора этих функций.

Процедура вывода нелинейного уравнения, связанного с (2.26), состоит в замене производных функции T в этом уравнении на соответствующие функции $A^{(k,m)}$ из совокупности рекуррентных соотношений (2.22). Объединяя, полученное таким образом уравнение для A и B с (2.20), приходим к следующей системе уравнений для базовых функций:

$$A_t + AB + \gamma A_x + \gamma A^2 + aA + bB + c = 0, \; A_t = B_x. \qquad (2.27)$$

Исключая из этой системы функцию B, получаем одно нелинейное уравнение для A:

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A_t + \gamma A_x + \gamma A^2 + aA + c}{A + b}\right) \qquad (2.28)$$

Сделаем замену переменных, полагая $u = A(x,t) + b(x,t)$. В этом случае уравнение (2.28) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \ln u}{\partial x \partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \ln u}{\partial x^2} + u_t + \gamma u_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{u}\right) + F = 0, \qquad (2.29)$$

где $H = c + \gamma b^2 - b_t - ab - \gamma b_x$, $F = a_x - 2\gamma b_x - b_t$.

В такой записи данное уравнение представляет собой нелинейное телеграфное уравнение и может служить полностью интегрируемой моделью в теории автоволновых процессов в нелинейных средах с “гиперболической” диффузией.

Другая запись данного уравнения получается после формальной замены $u = e^{\phi}$. В результате для ϕ уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t} + \gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma\frac{\partial}{\partial x}\right)e^{\phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(He^{-\phi}\right) + F = 0.$$

Уравнение этого типа встречается в теории струн [109, 110].

В случае $a = const, b = const, c = const$ уравнение (2.26) интегрируется в виде рядов и интегралов Фурье-Лапласа:

$$T = \int_C g(k)e^{ikx+\omega(k)t}dk,\ \omega(k) = \frac{\gamma k^2 - c - ika}{b + ik}, \tag{2.30}$$

где $g(k)$ - произвольная комплексная функция параметра k, допускающая существование интеграла в правой части для заданного контура C на комплексной плоскости. Соответственно, при этих же условиях уравнение (2.29) имеет решение:

$$u = b + \frac{T_x}{T} = b + \frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\int_C g(k)e^{ikx+\omega(k)t}dk\right),$$

которое можно рассматривать как подстановку типа Коула-Хопфа для уравнения (2.26).

Заметим также, что для уравнений (2.26) теперь можно указать формулу для поля скорости $V(x,t)$ переноса маркеров в форме значений функции $T(x,t)$. В соответствии с общей формулой (2.25) имеем:

$$V(x,t) = -\frac{B}{A} = \frac{A_t + \gamma A_x + \gamma A^2 + aA + c}{A(A+b)}.$$

2.4.2 Уравнение Лиувилля

Особый пример работоспособности общей схемы представляет известное из геометрии поверхностей, гидродинамики и некоторых других разделов математической физики уравнение Лиувилля:

$$\Delta\Theta = e^{2\theta},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.31}$$

Данный подход дает полный набор решений этого уравнения. Общий класс решений этого уравнения был построен еще Лиувиллем [114]. Решение в виде квадратичных форм было построено в [25, 29]. Поэтому строящиеся далее решения этого уравнения не обладают достаточной новизной, но дают новое полезное представление о возможных нестандартных вариантах использования самого метода функциональных подстановок в некоторых ситуациях.

Рассмотрим в качестве вспомогательного интегрируемого уравнения уравнение Лапласа:

$$\Delta T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) T = 0. \qquad (2.32)$$

Заменяя производные функции T на функции A и B из системы дифференциальных соотношений:

$$T_x = AT,\ T_y = BT,$$

приходим к следующей системе связей функций A и B:

$$A_x + A^2 + B_y + B^2 = 0,\ A_y = B_x. \qquad (2.33)$$

Чтобы получить из этой системы полезные следствия, произведем формальную замену функций A и B по следующему правилу:

$$A(x,y) = R(x,y)\cos\Phi(x,y),\ B = R(x,t)\sin\Phi(x,t).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (2.33), после несложных преобразований система для R и Φ преобразуется к такому виду:

$$(R_x + R\Phi_y)\cos\Phi + (R_y - R\Phi_x)\sin\Phi + R^2 = 0, \quad (R_x - R\Phi_y)\sin\Phi - (R_y - R\Phi_x)\cos\Phi = 0.$$

Эта система уравнений эквивалентна другой системе уравнений:

$$R_x + R\Phi_y = -R^2\cos\Phi,\ \ R_y - R\Phi_x = -R^2\sin\Phi.$$

или

$$R^{-1}R_x + \Phi_y = -A,\ \ R^{-1}R_y - \Phi_x = -B. \qquad (2.34)$$

Дифференцируя первое уравнение по x, а второе по y, и затем складывая результат, приходим к уравнению Лиувилля:

$$\Delta \ln R = R^2. \qquad (2.35)$$

которое эквивалентно (2.31) и переходит в него при замене переменных $R = e^{\Theta}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (2.34) по y, а второе - по x, и вычитая результаты, приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0. \qquad (2.36)$$

В результате находим, что решение уравнения Лиувилля для R можно записать так:

$$R = \sqrt{\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2}, \qquad (2.37)$$

где $T(x,y)$ - любое решение уравнения Лапласа (2.32). Решение уравнения (2.31) будет иметь вид:

$$\Theta = \ln R = \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2\right).$$

Аналогично, новым решением уравнения Лапласа (2.36) являются функции:

$$\Phi = \arctan\left(\frac{T_y}{T_x}\right). \tag{2.38}$$

Таким образом, последнее соотношение является отображением пространства решений уравнения Лапласа в себя, это отображение представляет собой аналог отображения (2.10).

Еще одним полезным соотношением, которое можно извлечь из предыдущих выкладок по построению решения уравнения Лиувилля, является свойство вспомогательной функции Ψ:

$$\Psi = \Theta + \ln T = \frac{1}{2}\ln\left((T_x)^2 + (T_y)^2\right). \tag{2.39}$$

Используя тождество

$$\Delta \ln T = \frac{\Delta T}{T} - \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 - \left(\frac{T_y}{T}\right)^2 = -e^{2\Theta},$$

находим:

$$\Delta\Theta - e^{2\Theta} = \Delta\Psi - \Delta\ln T - e^{2\theta} = \Delta\Psi + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y}\right)^2 - e^{2\Theta} = \Delta\Psi = 0.$$

Свойство функции Ψ состоит в том, что эта функция также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Psi = 0. \tag{2.40}$$

Интересным свойством построенных решений является возможность организации цепочек отображений, дающих новые решения уравнения Лиувилля (2.35), исходя только из одной начальной функции $T(x,y)$, удовлетворяющей уравнению (2.32). Поскольку функция (2.38) является решением исходного уравнения (2.32), то ее можно использовать в качестве решения для функции $T(x,t)$. Точно так же в качестве новой функции T можно использовать и функцию Ψ (2.39). В результате при заданной функции T решением уравнения (2.35) и уравнения Лапласа будут функции

$$R^{(n)} = \sqrt{\left(\frac{\Phi_x^{(n-1)}}{\Phi^{(n-1)}}\right)^2 + \left(\frac{\Phi_y^{(n-1)}}{\Phi^{(n-1)}}\right)^2},\ \Theta^{(n)} = \ln R^{(n)},$$

$$\Phi^{(n)} = \arctan\left(\frac{\Phi_y^{(n-1)}}{\Phi_x^{(n-1)}}\right), \Psi^{(n)} = \frac{1}{2}\ln\left((\Phi_x^{(n-1)})^2 + (\Phi_y^{(n-1)})^2\right),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.41}$$

$$\Phi^{(0)} = T(x,t),$$

или функции

$$R^{(n)} = \sqrt{\left(\frac{\Psi_x^{(n-1)}}{\Psi^{(n-1)}}\right)^2 + \left(\frac{\Psi_y^{(n-1)}}{\Psi^{(n-1)}}\right)^2},\ \Theta^{(n)} = \ln R^{(n)},$$

$$\Phi^{(n)} = \arctan\left(\frac{\Psi_y^{(n-1)}}{\Psi_x^{(n-1)}}\right), \Psi^{(n)} = \frac{1}{2}\ln\left((\Psi_x^{(n-1)})^2 + (\Psi_y^{(n-1)})^2\right), \; n = 1, 2, \ldots \qquad (2.42)$$

$$\Psi^{(0)} = T(x,t).$$

Такие цепочки решения пока не представляют особой практической пользы, но интересны с точки зрения общих свойств уравнения Лапласа и Лиувилля.

2.4.3 Уравнения, подобные уравнению КдВ

Рассмотрим уравнения, подобные уравнению КдВ (1.1). Как отмечалось во введении, это уравнение интегрируется с помощью МОЗ. Покажем, что среди интегрируемых уравнений типа Бюргерса есть уравнения, подобные этому. Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение для функции $T(x,t)$ следующего вида

$$T_t + T_{xxx} + a(x,t)T_{xx} + b(x,t)T_x + c(x,t)T = 0. \qquad (2.43)$$

Заменяя в этом уравнении производные функции $T(x,t)$ на дифференциальные полиномы от $A(x,t)$ и $B(x,t)$, приходим к соотношению:

$$B = -A_{xx} - 3AA_x + A^3 - a(A_x + A^2) - bA - c. \qquad (2.44)$$

Подставляя его в уравнение связи A и B, окончательно получаем уравнение относительно A:

$$A_t + A_{xxx} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(aA_x + A^3 + aA^2 + bA\right) + c_x = 0. \qquad (2.45)$$

По типу дисперсии старшей линейной части уравнения и степени нелинейности это уравнение подобно модифицированному уравнению КдВ (мКдВ), но в отличие от него содержит слагаемое со второй производной от A^2 и имеет внешний источник c_x. Следует однако отметить, что ни при каком допустимом выборе параметров этого уравнения оно не переходит в само уравнение КдВ или мКдВ. Чтобы с помощью МФП получить решения КдВ, необходимо модифицировать развитую схему МФП. Такие обобщения МФП будут рассмотрены далее. Тем не менее уравнение (2.45) полностью интегрируется с помощью обобщенной подстановки типа Коула-Хопфа (2.19):

$$A = T_x / T.$$

Этот пример легко обобщить на эволюционные уравнения вида

$$T_t = \sum_{k=0}^{N} C_k(x,t)T^{[k,0]}. \qquad (2.46)$$

Соответствующие им уравнения получаются заменой производных функции T на дифференциальные полиномы от A и B и после использования уравнения связи этих функций приводятся к виду

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=0}^{N} C_k(x,t)A^{[k,0]}(A)\right). \qquad (2.47)$$

В этой записи справа содержатся только дифференциальные полиномы $A^{(k,0)}$ от $A(x,t)$, вычисляемые с помощью рекуррентных соотношений (2.22).

Примерами уравнений типа Бюргерса, подобных уравнений типа КдВ более высокого порядка, являются уравнения, соответствующие следующим вспомогательным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &T_t = \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + C_0 T, \\ &T_t = \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + C_0 T, \\ &\ldots \end{aligned} \qquad (2.48)$$

Эти уравнения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} &A_t = \left(\frac{\partial}{\partial x} + A\right)(A_{xx} + 3AA_x + A^3), \\ &A_t = \left(\frac{\partial}{\partial x} + A\right)(A_{xxx} + 4A_{xx}A + 3(A_x)^2 + 6A^2A_x + A^4), \\ &\ldots \end{aligned} \qquad (2.49)$$

2.4.4 Стационарное течение однородной жидкости на плоскости

Простейшим примером использования подстановок для построения интегрируемых моделей в гидродинамике является хорошо известный пример стационарного потенциального течения вязкой жидкости на плоскости. Такая модель связана с уравнением Лапласа (2.32) или в более расширенном варианте с уравнением Шредингера:

$$T_{xx} + T_{yy} = -\frac{1}{2\nu^2}\, p(x,y)T, \qquad (2.50)$$

где $p(x,y)$ - дополнительная функция, играющая в дальнейшем роль давления жидкости, а ν - произвольное положительное число, играющее роль кинематической вязкости.

В результате использования системы базовых соотношений (2.18) и (2.22) получаем систему уравнений для функций $A(x,y)$ и $B(x,y)$:

$$A_x + A^2 + B_y + B^2 = -\frac{1}{2\nu^2}\, p(x,y),\ A_y = B_x. \qquad (2.51)$$

Продифференцировав последнее уравнение по x и по y и сделав формальную замену переменных:

$$u = -2\nu A = -2\nu\frac{T_x}{T},\ \ v = -2\nu B = -2\nu\frac{T_y}{T}, \qquad (2.52)$$

получаем систему уравнений:

$$uu_x + vu_y = \nu\Delta u - p_x, \quad uv_x + vv_y = \nu\Delta v - p_y. \tag{2.53}$$

Здесь использовалось свойство непрерывности функции $T(x, y)$, из которого следует тождество

$$v_x = u_y. \tag{2.54}$$

Это и есть стационарные уравнения Навье-Стокса для однородной жидкости на плоскости при заданном давлении p. К этой системе необходимо добавить уравнение неразрывности, имеющее для однородной жидкости вид

$$u_x + v_y = 0, \tag{2.55}$$

что в нашем случае эквивалентно уравнениям

$$A_x + B_y = 0, \quad \Delta \ln T = 0. \tag{2.56}$$

С учетом (2.50) это соотношение эквивалентно такому дополнительному уравнению для T:

$$p(x,t) = \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2. \tag{2.57}$$

Кроме этого, в данном случае имеем:

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

и уравнения Навье-Стокса (2.53) превращаются в стационарные уравнения Эйлера:

$$uu_x + vu_y = p_x, \quad uv_x + vv_y = p_y, \; u_x + v_y = 0. \tag{2.58}$$

Решения этого уравнения строятся на основе решений уравнения Лапласа (2.56) для логарифма функции $T(x,t)$ с помощью подстановок (2.52) и (2.57).

2.4.5 Стационарное течение вязкой неоднородной жидкости на плоскости

Еще один вариант рассмотренного подхода строится на основе вспомогательного уравнения Лапласа (2.32). Используя соотношения (2.52) и проводя с ними ту же процедуру, что и в предыдущем случае, получаем уравнения:

$$uu_x + vu_y = \nu\Delta u, \quad uv_x + vv_y = \nu\Delta v. \tag{2.59}$$

В терминах скоростей u и v уравнение (2.32) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}(Tu) + \frac{\partial}{\partial y}(Tv) = 0, \tag{2.60}$$

что можно рассматривать как уравнение неразрывности сжимаемого газа с плотностью $T(x,t)$. Заметим, что выполняются следующие соотношения:

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial x}(Tu_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Tu_y)\right)=u_{xx}+u_{yy}+\frac{T_x}{T}u_x+\frac{T_y}{T}u_y=u_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{\nu}p_x,$$
$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial x}(Tv_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Tv_y)\right)=v_{xx}+v_{yy}+\frac{T_x}{T}v_x+\frac{T_y}{T}v_y=u_{xx}+u_{yy}+\frac{1}{\nu}p_y,$$

где

$$p=-\frac{1}{4}(u^2+v^2). \tag{2.61}$$

Используя эти соотношения, получаем для u и v систему уравнений Навье-Стокса стационарного течения неоднородной вязкой жидкости на плоскости:

$$uu_x+vu_y=\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x)+\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y)-p_x,$$
$$uv_x+vv_y=\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)-p_y,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0.$$

Решением этой системы являются функции u,v,p, которые вычисляются с помощью соотношений (2.52), (2.61) по заданной функции $T(x,t)$, которая сама по себе определяет плотность среды: $\rho=T(x,t)$. Поскольку плотность массы ρ должна принимать только неотрицательные значения, то правильный отбор решений уравнения Лапласа (2.32) для таких моделей оказывается важной задачей. Для решения этой задачи можно воспользоваться формулами для вычисления рекуррентных цепочек решений уравнения Лапласа (2.41) или (2.42).

2.4.6 Одномерное течение идеального сжимаемого газа

Примеры использования МФП типа Коула-Хопфа не ограничиваются линейными вспомогательными уравнениями для функции $T(x,t)$. В качестве примера рассмотрим уравнение следующего вида

$$T_{xx}T_{tt}-T_{xt}T_{xt}=0. \tag{2.62}$$

Это уравнение является частным случаем однородного уравнения Монжа-Ампера [120, 68] и имеет интеграл, который можно записать в виде

$$T_t=H(T_x), \tag{2.63}$$

где $H(\theta)$ - произвольная дифференцируемая функция своего аргумента $\theta=T_x$. Можно видеть, что это уравнение эквивалентно уравнению Хопфа. Именно, дифференцируя последнее уравнение по x и делая замену переменных $\theta=T_x$, получаем для функции $\theta(x,t)$ уравнение:

$$\theta_t=H'(\theta)\theta_x. \tag{2.64}$$

Это уравнение имеет в свою очередь следующий интеграл:

$$\theta = F(x + H'(\theta)t). \tag{2.65}$$

Здесь $F(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция одного своего аргумента. Этот интеграл является алгебраическим уравнением, из которого при заданной функции $H(\theta)$ вычисляется решение для функции $\theta(x,t)$ и, как следствие, функции $T(x,t)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, к какому уравнению преобразуется (2.62) в результате подстановки типа (2.15) [35, 36, 39]. Подставляя в (2.62) соотношения из (2.16), приходим к следующему уравнению:

$$U(V_t - VV_x + V^2U) - (V_x - UV)^2 = 0. \tag{2.66}$$

Раскрывая скобки и включая в систему уравнение связи (2.17), получаем систему:

$$U(V_t + VV_x) = (V_x)^2, \tag{2.67}$$

$$U_t + \frac{\partial}{\partial x}(UV) - V_{xx} = 0. \tag{2.68}$$

Сделаем формальную замену переменных, вводя функции:

$$\rho(x,t) = U(x,t),\ u(x,t) = V - V_x / U = -Q / U. \tag{2.69}$$

В результате такой замены эта система уравнений принимает узнаваемый вид уравнения Эйлера одномерного инерциального течения идеального сжимаемого газа с плотностью $\rho(x,t)$ и скоростью потока $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0. \tag{2.70}$$

Сами значения скорости и плотности инерциального течения вычисляются из базовых соотношений (2.15) и (2.16):

$$\rho = -\frac{T_{xx}}{T_x},\ u = -\frac{T_{xt}}{T_{xx}} \tag{2.71}$$

Учитывая, что решение (2.65) исходного уравнения (2.62) записывается для функции $\theta = T_x$, то удобно и решения для ρ и u записать через θ. В результате получаем:

$$\rho = -\frac{\theta_x}{\theta},\ u = -\frac{\theta_t}{\theta_x}. \tag{2.72}$$

Последнее соотношение можно записать в виде

$$\theta_t + u\theta_x = 0. \tag{2.73}$$

Последнее уравнение есть не что иное, как уравнение переноса гидродинамического маркера θ в среде со скоростью $u(x,t)$. Поскольку решение (2.65) содержит две произвольные функции, то оно позволяет построить общее решение задачи об инерциальном течении с заданными начальными распределениями и массы, и скорости. Начальное распределение маркеров определяется функцией $F(\xi)$:

$$\theta_0(x,0) = F(x),$$

Поэтому начальное распределение плотности задается формулой

$$\rho(x,0) = -\frac{F'(x)}{F(x)},$$

или

$$F(x) = \exp(-\rho(x,0)).$$

Начальное распределение скорости задается функцией $H(\theta)$:

$$u_0(x) = u(x,0) = -H'(F(x)).$$

Рассматривая этот вариант применения схемы подстановок, можно прийти к некоторому более приемлемому для гидродинамики способу построения моделей. Можно заметить, что исходный элемент данной схемы - уравнение переноса маркеров, которое является естественным для гидродинамики. В рассмотренной схеме уравнение переноса маркеров дополняется еще одним уравнением, которое и определяет тип моделей. Это наблюдение можно превратить в более общую схему построения гидродинамических моделей. Такой подход будет рассмотрен далее в отдельной главе.

2.5 Дополнительные соотношения

2.5.1 Уравнения типа Бюргерса, подобные КдВ

Еще одним важным аспектом применения МФП является возможность использовать его для построения отдельных частных решений неинтегрируемых полностью уравнений, дополняя базовую схему не одним вспомогательным или замыкающим уравнением для T, а совместной системой уравнений для функции T. Для примера рассмотрим схему (2.18) совместно с двумя вспомогательными уравнениями:

$$T_t + T_{xxx} + a(x,t)T_{xx} + b(x,t)T_x + c(x,t)T,\ T_{xx} + kT_x + u(x,t)T = 0, \qquad (2.74)$$

первое из которых совпадает с (2.43). Эти два уравнения для $T(x,t)$ совместны, в частности, если коэффициенты этого уравнения имеют вид:

$$k = const, \quad a = const, \quad b = \frac{3}{2}u, \quad c = \frac{3}{4}u_x + \left(a - \frac{3}{4}k\right)u,$$

а функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдВ, записанному в таком виде:

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + \mu u_x = 0, \qquad (2.75)$$

где $\mu = -k(a - \frac{3}{4}k)$. Наиболее простым вариантом решения последнего уравнения является всюду постоянная функция: $u = u_0 = const$. Для этого случая совместные решения системы (2.74) имеют такой вид:

$$T = Ae^{\lambda_+ x + \mu_+ t} + Be^{\lambda_- x + \mu_- t}, \qquad (2.76)$$

где A и B - произвольные постоянные и введены обозначения:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}(-k \pm \sqrt{k^2 - 4u_0}),\ \mu_\pm = -\lambda_\pm^3 - a\lambda_\pm^2 - 3u_0\lambda_\pm / 2 - (a - 3k/2)u_0.$$

Используя теперь подстановки (2.18), находим, что функция $A(x,t)$ будет одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$A_t + A_{xxx} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(aA_x + A^3 + aA^2 + bA\right) + c_x = 0, \qquad (2.77)$$

$$A_x + A^2 + kA + u = 0, \qquad (2.78)$$

Первое из этих уравнений совпадает с (2.45). Таким образом, каждому частному решению $T(x,t)$ системы (2.74) будет соответствовать решение каждого из уравнений системы (2.77). Отсюда следует, что соответствующие частные решения

$$A = T_x / T = \frac{A\lambda_+ e^{\lambda_+ x + \mu_+ t} + B\lambda_- e^{\lambda_- x + \mu_- t}}{Ae^{\lambda_+ x + \mu_+ t} + Be^{\lambda_- x + \mu_- t}} \qquad (2.79)$$

будут также решением множества нелинейных уравнений, которые могут быть получены из первого уравнения системы (2.77), его редукцией с помощью второго уравнения системы. В частности, при $u = u_0 = const$ среди уравнений, имеющих решения (2.79), есть и модифицированное уравнение КдВ, и само уравнение КдВ. Действительно, используя второе уравнение (2.77), первое уравнение приводится к следующему виду:

$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x - \gamma AA_x - \delta A_x = 0, \qquad (2.80)$$

где

$$\beta = 6(\alpha + 1),\ \gamma = 6k\alpha,\ \delta = (2u_0 + k^2)(\alpha - 1) + ka + \frac{3}{2}u_0.$$

Уравнение (2.80) представляет собой модифицированное уравнение КдВ (мКдВ), которое переходит в обычное уравнение КдВ в случае $\beta = 0$, что соответствует выбору $\alpha = -1$. Однако, используя второе соотношение (2.77), можно получить множество других типов уравнений, для которых решениями будут те же функции $A = T_x / T$. Примером могут служить следующие уравнения:

$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x - \gamma AA_x + \delta A^2 + k\delta A + \delta u_0 = 0,$$

$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x + \gamma A^3 + (\delta + \gamma k)A^2 + (k\delta + \gamma u_0)A + \delta u_0 = 0,$$

$$A_t + \alpha A_{xxx} + \beta A^4 + (\gamma + k\beta)A^3 + (\delta + \gamma k + \beta u_0)A^2 + (k\delta + \gamma u_0)A + \delta u_0 = 0.$$

Среди всей совокупности таких уравнений есть уравнения второго, первого порядков по x и нулевого. Очевидно, что решения $A = T_x / T$ всей совокупности этих уравнений являются лишь некоторыми частными решениями. Важным в этом подходе является то, что таким образом можно строить серии частных решений многих типов уравнений одновременно, для которых другим способом найти точные решения может оказаться затруднительным. Множество таких решений определяется множеством совместных решений совокупности вспомогательных уравнений для T.

2.5.2 Уравнение быстрой диффузии

Приведем еще один пример применения нелинейного вспомогательного уравнения вместе с дополнительным соотношением. Рассмотрим вспомогательное уравнение следующего вида:

$$T_t T_x = T_{xx} T. \tag{2.81}$$

Используя базовые соотношения (2.18) и следствия из них, последнее уравнение можно преобразовать к следующей связи между A и B:

$$BA = A_x + A^2.$$

Вычисляя из этого соотношения B и подставляя его в уравнение (2.20), приходим к уравнению быстрой диффузии [80, 46]:

$$A_t = \frac{\partial^2 \ln A}{\partial x^2} + A_x. \tag{2.82}$$

Таким образом, все решения уравнения (2.81) одновременно являются и решениями уравнения быстрой диффузии (2.82) и наоборот. Полезность такой взаимосвязи состоит в том, что для (2.81) можно найти целый ряд частных решений, которые дают соответствующие решения уравнения (2.82).

Простейшим вариантом построения решений (2.81) является представление этого уравнения в виде пары линейных. Такое разделение можно рассматривать как вариант МФП с дополнительными соотношениями. Действительно, можно проверить, что это уравнение эквивалентно следующей системе:

$$T_{xx} = u(x,t) T_x, \; T_t = u(x,t) T, \tag{2.83}$$

где $u(x,t)$ - вспомогательная неизвестная функция. Это означает, что частные решения (2.81) можно отыскивать как решения системы (2.83) для различных допустимых функций $u(x,t)$. Например, при $u = u_0 = const$ система (2.83) имеет решение:

$$T = e^{u_0 t} \left(c_1 e^{u_0 x} + c_0 \right),$$

где c_0, c_1 - произвольные постоянные. Соответствующее решение (2.82) имеет такой вид:

$$A = \frac{\partial}{\partial x}\ln T = \frac{u_0 c_1 e^{u_0 x}}{c_1 e^{u_0 x} + c_0}.$$

Это решение является статическим решением типа кинка.

Еще один пример точного решения можно получить в предположении $u = u(\xi)$, где $\xi = x + vt$ и $v = const$. Полагая $T = T(\xi, t)$, преобразуем систему (2.83) к следующему виду:

$$T_{\xi\xi} = u(\xi)T_{\xi},\ vT_{\xi} + T_t = u(\xi)T. \qquad (2.84)$$

Отыскивая решение в виде $T = \Phi(\xi)e^{pt}$, где $p = const$, находим, что функция $u(\xi)$ должна удовлетворять уравнению

$$u' = (u + \frac{p}{v-1})^2 - q,\ q = \frac{v^2 + v - 1}{(v-1)^2}p^2.$$

Отсюда находим:

$$u = -\frac{p}{v-1} + q\frac{1 + C_0 e^{\gamma\xi}}{1 - C_0 e^{\gamma\xi}},$$

где C_0 - постоянная интегрирования и

$$\gamma = \frac{2vq}{v-1}.$$

Решение уравнения быстрой диффузии (2.82) теперь можно привести к такому виду:

$$A = \frac{u-p}{v} = -\frac{(2v-1)p}{v(v-1)} + \frac{q}{v}\frac{1 + C_0 e^{\gamma\xi}}{1 - C_0 e^{\gamma\xi}}.$$

Это решение представляет собой бегущую волну типа кинка со скоростью v.

2.5.3 Другие примеры построения решения с дополнительными соотношениями

Рассмотрим в качестве дополнительного примера пару вспомогательных уравнений следующего вида:

$$T_t = kT_{xx},\ mT_x = T_{tt}. \qquad (2.85)$$

Используя схему (2.18), преобразуем эту пару уравнений в уравнения для A и B:

$$B = k(A_x + A^2),\ mA = B_t + B^2,\ A_t = B_x. \qquad (2.86)$$

Исключая из этой системы уравнений B, можно построить следующие типы уравнений:

$$A_t = kA_{xx} + 2kAA_x,$$

$$A_{xt} + 2kAA_{xx} + 4kA^2A_x + k^2(A_x + A^2)^2 - \frac{m}{k}A = 0.$$

Общее решение системы (2.85) имеет такой вид:

$$T = \sum_{j=1}^{3} a_j e^{\lambda_j x + \nu_j t} + a_0, \tag{2.87}$$

где $a_j,\ j = 0,1,2,3$ - произвольные постоянные, $\lambda_j,\ j = 1,2,3$ - не совпадающие решения алгебраического уравнения

$$m = k^2 \lambda^3 \tag{2.88}$$

а ν_j вычисляются по формулам

$$\nu_j = k\lambda_j^2,\ \ j = 1,2,3.$$

Решение для A выглядит следующим образом:

$$A = \frac{\sum_{j=1}^{3} \lambda_j a_j e^{\lambda_j x + \nu_j t}}{\sum_{j=1}^{3} a_j e^{\lambda_j x + \nu_j t} + a_0}.$$

Заметим, что более эффективно такой подход работает в случае матричных подстановок, а также многомерных уравнений, о чем речь пойдет в следующих главах. Далее будет описан специальный метод многофункциональных подстановок, который позволяет строить решения нелинейных уравнений с большим числом независимых функций.

3 Матричные подстановки

3.1 Общая формулировка матричной версии МФП

Дальнейшее развитие метода функциональных подстановок опирается на возможность перенести основные идеи на случай матричных дифференциальных соотношений и даже на более общие типы дифференцирования, о которых речь пойдет в последующих главах. Матричное расширение метода строится на основе матричных базовых соотношений вида

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T},\ \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \tag{3.1}$$

где $\hat{T}, \hat{A}$ и $\hat{B}$ - квадратные матрицы размера $N \times N$, например:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11}(x,t) & T_{12}(x,t) & \cdots & T_{1N}(x,t) \\ T_{21}(x,t) & T_{22}(x,t) & \cdots & T_{2N}(x,t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{N1}(x,t) & T_{N2}(x,t) & \cdots & T_{NN}(x,t) \end{pmatrix}.$$

В силу предполагаемой непрерывности элементов матрицы $\hat{T}(x,t)$ от x и t, матрицы $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ связаны дифференциальным соотношением

$$\hat{A}_t - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0. \tag{3.2}$$

Здесь и далее $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ - коммутатор матриц $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$. Как и в скалярном случае, для старших производных матрицы $\hat{T}(x,t)$ выполняются соотношения

$$\hat{T}^{[k,m]} = \hat{A}^{(k,m)}\hat{T},\ k,m = 1,2,\ldots,$$

где матрицы $\hat{A}^{(k,m)}$ являются дифференциальными полиномами от матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Как и в одномерном случае, для их вычисления можно использовать рекуррентные соотношения

$$\hat{A}^{(k+1,m)} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{A}^{(k,m)} + \hat{A}^{(k,m)}\hat{A},\ \hat{A}^{(k,m+1)} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}^{(k,m)} + \hat{A}^{(k,m)}\hat{B}, k,m = 0,2,\ldots, \tag{3.3}$$

с начальными условиями

$$\hat{A}^{(1,0)} = \hat{A},\ \hat{A}^{(0,1)} = \hat{B},\ \hat{A}^{(0,0)} = \hat{1}.$$

Именно наличие в уравнении связи (3.2) коммутатора, что отличает его от аналогичного соотношения (2.20) в скалярном случае, приводит к существенному расширению типов уравнений, которые интегрируются с помощью матричного МФП. Сама идеология МФП в матричном случае по сути не отличается от скалярного и состоит в рассмотрении дифференциальных следствий из базовых соотношений и из дополнительного уравнения для матричной функции $\hat{T}$, которая ограничивает ее функциональный вид. Это приводит к дополнительной связи между матрицами $\hat{A}$ и $\hat{B}$. В частности, если уравнение для $\hat{T}$ является интегрируемым, например, линейным с коэффициентами $C_{km}(x,t)$:

$$\sum_{k=0}^{P}\sum_{m=0}^{Q}C_{km}(x,t)T^{[km]}=0, \tag{3.4}$$

то соответствующее дополнительное уравнение для матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{P}\sum_{m=0}^{Q}C_{km}(x,t)A^{(km)}=0. \tag{3.5}$$

Решение совместной системы (3.5) и (3.2) теперь может быть найдено из базовых соотношений (3.1), в которых используются все возможные решения уравнения (3.4). Полезность такого подхода определяется наличием примеров его применения в прикладных задачах.

3.2 Формализм с матрицами размерности 2×2

Для анализа моделей, связанных с трехмерными векторами, полезно рассмотреть общие соотношения с матрицами размерности 2×2 . Введем следующие обозначения для матриц Паули $\hat{\sigma}_\alpha$ и единичной матрицы:

$$\hat{\sigma}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Матрицы $\hat{\sigma}_i, i=0,1,2,3$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{gathered}\hat{\sigma}_0\hat{\sigma}_i=\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_0=\hat{\sigma}_i,\ [\hat{\sigma}_0,\hat{\sigma}_i]=0,\ i=0,1,2,3;\\ \hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta=-\hat{\sigma}_\beta\hat{\sigma}_\alpha=i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma;\\ [\hat{\sigma}_\alpha,\hat{\sigma}_\beta]=2i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma=1,2,3,\end{gathered} \tag{3.7}$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - полностью антисимметричный символ Леви-Чевита: $\varepsilon_{123}=1, \varepsilon_{\beta\alpha\gamma}=-\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=-\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$.

Таким образом, любая матричная функция $\hat{T}(x,t)$, заданная на линейной алгебре матриц 2×2 GL_2 , имеет следующий общий вид:

$$\hat{T}=\sum_{i=0}^{3}\tau_i(x,t)\sigma_i, \tag{3.8}$$

где $\tau_i(x,t)$ - вспомогательные функции, связанные с компонентами матрицы

$\hat{T}$ соотношениями

$$T_{11} = \tau_0 + \tau_3,\ T_{11} = \tau_0 - \tau_3,\ T_{12} = \tau_1 - i\tau_2,\ T_{21} = \tau_1 + i\tau_2.$$

Для удобства интерпретации полезно ввести трехмерный вектор матриц Паули:

$$\mathbf{s} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3) \qquad (3.9)$$

и трехмерный вектор $\mathbf{t} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Тогда любая матрица 2×2 может быть записана в виде

$$\hat{T} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) + \hat{\sigma}_0 \tau_0 \qquad (3.10)$$

где

$$(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) = \hat{\sigma}_1\tau_1 + \hat{\sigma}_2\tau_2 + \hat{\sigma}_3\tau_3\ (s,t) = \tau_1\hat{\sigma}_1 + \tau_2\hat{\sigma}_2 + \tau_3\hat{\sigma}_3$$

- евклидово скалярное произведение векторов. Обратные формулы для вычисления коэффициентов τ_i матриц $\hat{T}$ размерности 2×2 имеют следующий общий вид:

$$\tau_i = \mathrm{S}p(\hat{\sigma}_i\hat{T})/2,\ i = 0,1,2,3, \qquad (3.11)$$

где $\mathrm{S}p$ - операция вычисления следа матрицы.

Пусть теперь имеются две матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$, которые могут быть представлены в виде

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{3} a_i(x,t)\hat{\sigma}_i,\ \hat{B} = \sum_{i=0}^{3} b_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \qquad (3.12)$$

Вводя вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, эти матрицы можно записать так:

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{a}) + a_0\hat{\sigma}_0, \quad \hat{B} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b}) + b_0\hat{\sigma}_0$$

Исходя из свойств матриц Паули (3.6), имеем теперь следующие общие соотношения:

$$\hat{A}\hat{B} = i([\mathbf{a}\times\mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}) + a_0(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b}) + b_0(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\hat{\sigma}_0$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 2i([\mathbf{a}\times\mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}) \qquad (3.13)$$

Здесь $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$ - векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

3.3 Вспомогательные уравнения первого порядка

Рассмотрим вспомогательное уравнение для $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{H}(x,t)\hat{T}_x + \hat{Q}(x,t)\hat{T}, \qquad (3.14)$$

где $\hat{H}(x,t)$ и $\hat{Q}(x,t)$ - некоторые заданные матрицы координат и времени. Используя базовые соотношения (3.1), получаем из этого уравнения следствие в виде уравнения связи:

$$\hat{B} = \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}. \qquad (3.15)$$

Подставляя это соотношение в уравнение связи (3.2), находим:

$$A_t - \frac{\partial}{\partial x}(\hat{H}\hat{A} + \hat{Q}) + [\hat{A}, \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}] = 0. \qquad (3.16)$$

Это уравнение полезно преобразовать к следующему виду:

$$A_t - \hat{H}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} + [\hat{A}, \hat{Q}] - \hat{H}_x\hat{A} - \hat{Q}_x = 0.$$

Данное уравнение является нелинейным уравнением первого порядка относительно матрицы $\hat{A}$ с квадратичной нелинейностью и произвольными матрицами $\hat{H}$ и $\hat{Q}$ как функциями x и t. В частном случае

$$\hat{H} = \hat{H}(t)$$

уравнение (3.16) упрощается и принимает такой вид:

$$A_t - \hat{H}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} + [\hat{A}, \hat{Q}] - \hat{Q}_x = 0. \qquad (3.17)$$

Такое уравнение имеет квадратичную нелинейность и может иметь несколько интерпретаций в зависимости от выбора его коэффициентов $\hat{H}$ и $\hat{Q}$, а также матричной размерности.

3.4 Уравнение типа уравнения Ландау-Лифшица

В качестве первого примера рассмотрим уравнение (3.17) в матричной размерности 2×2 для выбора его матричных коэффициентов в следующем виде:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^{3} H_\alpha(t)\hat{\sigma}_\alpha = (\mathbf{H}, \mathbf{s}), \quad \hat{Q} = \sum_{\alpha=1}^{3} Q_\alpha(t)\hat{\sigma}_\alpha = (\mathbf{Q}, \mathbf{s}). \qquad (3.18)$$

Здесь введены трехмерные векторы:

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

Используя соотношения (3.7), можно записать:

$$\begin{aligned}
&\hat{H}\hat{A}_x = \hat{\sigma}_0(\mathbf{H}, \mathbf{a}_x) + i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x]) + a_{0,x}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \quad [\hat{H}, \hat{A}] = 2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H}\times\mathbf{a}]),\\
&[\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} = -2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H}\times\mathbf{a}])a_0 + 2(\hat{\mathbf{s}}, [[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{a}]),\\
&[\hat{A}, \hat{Q}] = 2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{a}\times\mathbf{Q}]).
\end{aligned} \qquad (3.19)$$

В результате (3.17) приводим к следующей системе уравнений для компонент матрицы $\hat{A}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}a_0 - \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}, \mathbf{a}) = 0,\\
&\mathbf{a}_t - i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x] + 2[[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{a}] - 2i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]a_0 - \mathbf{H}a_{0,x} - 2i[\mathbf{a}\times\mathbf{Q}] - \mathbf{Q}_x = 0.
\end{aligned}$$

Эту систему уравнений можно преобразовать, вводя функцию ϕ:

$$a_0 = c\frac{\partial}{\partial x}\phi.$$

В результате находим:

$$c\phi_t = (\mathbf{H},\mathbf{a}), \tag{3.20}$$
$$\mathbf{a}_t - i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x] + 2[[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\times\mathbf{a}] - 2i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\phi_x - \mathbf{H}\phi_{xx} - 2i[\mathbf{a}\times\mathbf{Q}] - \mathbf{Q}_x = 0.$$

Эта система уравнений представляет собой уравнение типа Ландау-Лифшица для неоднородного магнетика, находящегося в однородном переменном магнитном поле с напряженностью $\mathbf{H}$ и с некоторыми дополнительными полями Q и ϕ. Хотя это уравнение и отличается от уравнения Ландау-Лифшица для нелинейного магнетика Гейзенберга, тем не менее оно может быть использовано для анализа других типов магнетиков.

3.5 Волны в среде с квадратичной нелинейностью и неоднородное уравнение Лиувилля

При дополнительных условиях система уравнений (3.20) может иметь и другую интерпретацию. Рассмотрим частный случай, соответствующий выбору:

$$\mathbf{H} = (0,0,c), \quad \mathbf{Q} = c(q_1,q_2,q_3), \tag{3.21}$$

где c,q_1,q_2,q_3 - вещественные постоянные. Тогда в покомпонентной форме система уравнений (3.20) примет такой вид:

$$\begin{aligned}
&a_3 = \phi_t,\\
&a_{3,t} - c^2\phi_{xx} - 2c(a_1^2 + a_2^2) - 2ic(q_1a_2 - q_2a_1) = 0,\\
&a_{1,t} + ica_{2,x} + 2\phi_t a_1 + 2ic^2\phi_x a_2 - 2ic(q_2a_3 - q_3a_2) = 0,\\
&a_{2,t} - ica_{1,x} - 2c\phi_t a_2 - 2ic^2\phi_x a_1 - 2ic(q_3a_1 - q_1a_3) = 0,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Исключая a_3 с помощью первого уравнения и вводя комплексную функцию $A = a_1 + ia_2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} - 2c|A|^2 - c(r^*A - rA^*) = 0,\\
&A_t + cA_x + 2cA(\phi_t + c\phi_x) - 2Ri\phi_t + 2q_3cA = 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Здесь введено дополнительно обозначение $R = q_1 + iq_2$. Эта система уравнений может рассматриваться в качестве модели, описывающей волны в среде со сложной квадратичной градиентной нелинейностью, включающей и квадратичную зависимость от первой производной по времени.

В частном случае $R = 0$ эта система упрощается. Из этой системы можно исключить функцию A. При такой редукции второе уравнение системы имеет явное общее решение следующего вида:

$$\ln A + 2\phi = \psi(x-ct) - h(x,t),\ h(x,t) = \int_C q_3(x,t)ds = \int_0^t q_3(x-ct+ct',t')dt'.$$

где $\psi(x-ct)$ - некоторая комплекснозначная функция одного вещественного аргумента и интеграл от $q_3(x,t)$ берется вдоль характеристик второго уравнения . В результате первое уравнение системы (3.23) примет такой вид:

$$\phi_{tt} - c^2\phi_{xx} = c^2 e^{-2\mathrm{Re}\{\phi\}} e^{2\mathrm{Re}\{\psi(x-ct)\}-h(x,t)} - q_{3,x}. \tag{3.24}$$

Это уравнение в случае вещественных решений ϕ подобно неавтономному неоднородному уравнению Лиувилля [79, 47].

3.6 Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка

Решения системы (3.20), также как и системы (3.23), строятся на основе решений уравнения (3.14). Для простоты рассмотрим случай, соответствующий только редукции $q_3 = r = 0$ и выбору $H = (0,0,c)$. В этом случае система уравнений для компонентов функции $\hat{T}$ примет такой вид:

$$\tau_{0,t} = c\tau_{3,x},\ \tau_{3,t} = c\tau_{0,x},$$
$$\tau_{1,t} = ic\tau_{2,x},\ \tau_{2,t} = -ic\tau_{1,x}.$$

Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\chi_{tt} = c^2\chi_{xx},\ \tau_3 = \chi_t,\ \tau_0 = c\chi_x,$$
$$\eta_t - c\eta_x = 0,\ \eta = \tau_1 + i\tau_2.$$

Из (3.1) и (3.11) находим выражение для $a_i, i = 0,1,2,3$. Имеем:

$$a_i = \mathrm{S}p(\hat{\sigma}_i \hat{T}_x \hat{T}^{-1}). \tag{3.25}$$

Матрицу $\hat{T}^{-1}$ можно представить таким образом:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{\tau_0^2 - t^2}(\tau_0\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_\alpha\hat{\sigma}_\alpha). \tag{3.26}$$

Соответственно:

$$\hat{T}_x\hat{T}^{-1} = \frac{1}{D}(\tau_{0,x}\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_{\alpha,x}\hat{\sigma}_\alpha)(\tau_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\beta=1}^{3}\tau_\beta\hat{\sigma}_\beta) = \frac{1}{2D}(D_x\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}R_\alpha\hat{\sigma}_\alpha)$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \tau_0^2 - t^2,\ R_\alpha = \tau_{0,x}\tau_\alpha - \tau_{\alpha,x}\tau_0,\ \alpha = 1,2,3.$$

Отсюда окончательно находим решение для ϕ и $a_{1,2}$:

$$\phi = \frac{1}{2c}\ln D = \frac{1}{2c}\ln|\tau_0^2 - t^2|,\ A = \frac{1}{D}(\tau_{0,x}\eta - \eta_{,x}\tau_0). \tag{3.27}$$

3.7 Уравнения второго порядка по координате

В качестве следующего примера рассмотрим построение интегрируемых уравнений для вспомогательных уравнений второго порядка по координате. В качестве такого вспомогательного уравнения для матричной функци $\hat{T}$ рассмотрим матричное уравнение типа уравнения теплопроводности

$$\hat{T}_t = \hat{J}(x,t)\hat{T}_{xx} + \hat{V}(x,t)\hat{T}_x + \hat{Q}(x,t)\hat{T}, \tag{3.28}$$

где $\hat{D},\hat{V}$ и $\hat{Q}$ - заданные некоторым образом матричные функции x и t. Используя рекуррентные соотношения (3.3), приводим это уравнение к уравнению связи $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{B} = \hat{J}(\hat{A}_x + \hat{A}^2) + \hat{V}\hat{A} + \hat{Q}.$$

Подставляя это соотношение в уравнение связи (3.2), приходим к следующему матричному уравнению только для $\hat{A}$:

$$\hat{A}_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{J}(\hat{A}_x + \hat{A}^2) + \hat{V}\hat{A} + \hat{Q}\right) + [\hat{A}, \hat{J}(\hat{A}_x + \hat{A}^2) + \hat{V}\hat{A} + \hat{Q}] = 0. \tag{3.29}$$

Это уравнение содержит в себе много типов уравнений для компонентов матрицы $\hat{A}$, поэтому полезно рассмотреть только некоторые возможные варианты, которые полезны для различных прикладных задач.

3.8 Уравнения типа Ландау-Лифшица для вспомогательных уравнений второго порядка

В качестве примера, имеющего прикладное значение, рассмотрим вспомогательные уравнения, в которых полагается для простоты $\hat{V} = 0$ и матрицы $\hat{J} = \hat{J}(t)$ и $\hat{Q} = \hat{Q}(t)$ являются функциями только t. В этом случае уравнение (3.28) будет иметь такой вид:

$$\hat{T}_t = \hat{J}\hat{T}_{xx} + \hat{Q}(t)\hat{T}. \tag{3.30}$$

В соответствии с общим изложением МОП приводим данное уравнение к уравнению для матричных коэффициентов базовых соотношений. Имеем:

$$\hat{B} = \hat{J}(\hat{A}_x + \hat{A}^2) + \hat{Q}.$$

Подставляя это соотношение в (3.2), приходим к уравнению

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + 2\hat{J}\hat{A}_x\hat{A} - [\hat{A},\hat{J}]\hat{A}_x - [\hat{A},\hat{J}]\hat{A}^2 - [\hat{A},\hat{Q}] - \hat{Q}_x. \tag{3.31}$$

Это уравнение с кубической нелинейностью, вообще говоря с комплексными коэффициентами, имеет линейную часть, аналогичную НУШ.

Используя формализм с матрицами 2×2, представим (3.31) в форме, подобной уравнению типа Ландау-Лифшица (3.20). По аналогии с (3.18) будем полагать:

$$\hat{J} = (\mathbf{H},\hat{\mathbf{s}}), \quad \hat{Q} = (\mathbf{Q},\hat{\mathbf{s}}), \quad \hat{A} = (\mathbf{a},\hat{\mathbf{s}}) + a_0\hat{\sigma}_0.$$

Дополним теперь соотношения (3.19) следующими формулами:

$$\hat{J}\hat{A}_x\hat{A} = \left(p_x(\mathbf{H},\mathbf{a}) + p(\mathbf{H},\mathbf{a}_x) + i(\mathbf{H},[\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}]\right)\hat{\sigma}_0 + \left(pp_x + (\mathbf{a}_x,\mathbf{a})\right)(\mathbf{H},\hat{\mathbf{s}}) +$$
$$+\left(ip_x[\mathbf{H}\times\mathbf{a}] + ip[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_x] - [\mathbf{H}\times[\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}]]\right),\hat{\mathbf{s}}),$$

$$[\hat{A},\hat{J}]\hat{A}^2 = 2i\left(p^2+\mathbf{a}^2\right)([\mathbf{a}\times\mathbf{H}],\hat{\mathbf{s}}) + 4p([\mathbf{a}\times[\mathbf{a}\times\mathbf{H}]],\hat{\mathbf{s}}).$$

Используя эти соотношения, приходим к следующей системе уравнений:

$$p_t - \frac{\partial}{\partial x}\left[(\mathbf{H},\mathbf{a}_x) + 2p(\mathbf{H},\mathbf{a})\right] = 0,$$

$$\mathbf{a}_t - i[\mathbf{H}\times\mathbf{a}_{xx}] - [\mathbf{H}\times\mathbf{a}]\left(4p_x - 2i(p^2+\mathbf{a}^2)\right) + 4[\mathbf{H}\times[\mathbf{a}_x\times\mathbf{a}]] -$$
$$-\mathbf{H}\left(p_{xx} + 2pp_x - (\mathbf{a},\mathbf{a}_x)\right) + 2\mathbf{a}(\mathbf{H},\mathbf{a}_x) - 2i[\mathbf{Q}\times\mathbf{a}] - \mathbf{Q}_x = 0.$$

Эти уравнения, как и уравнение (3.20), подобны уравнению Ландау-Лифшица для магнетика с вектором намагниченности a в магнитном поле H. Функция $p(x,t)$ описывает взаимодействие магнетика с некоторыми другими характеристиками среды.

Как и в случае со вспомогательным уравнением первого порядка, рассмотрим редукцию этих уравнений, полагая $\mathbf{H}=(0,0,c)$, $\mathbf{Q}=0$. Введем обозначения:

$$a_3 = q,\ A = a_1 + ia_2,\ \overline{A} = a_1 - ia_2,\ |A|^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Тогда система уравнений для этих функций примет следующий вид:

$$p_t - cq_{xx} - 2c\frac{\partial}{\partial x}(pq) = 0,$$

$$q_t - cp_{xx} - c\frac{\partial}{\partial x}(p^2 + q^2 + 2|A|^2) - 4c|A|^2\ p = 0, \qquad (3.32)$$

$$A_t + cA_{xx} + 2c(p+q)A_x + 2c((p+q)^2 + |A|^2 + 2p_x)A = 0,$$
$$\overline{A}_t - c\overline{A}_{xx} - 2c(p-q)\overline{A}_x + 2c(-(p-q)^2 - |A|^2 - 2p_x)\overline{A} = 0, \qquad (3.33)$$

Последнее уравнение этой системы представляет собой уравнение, подобное НУШ, которое в классическом виде имеет такой вид:

$$u_t - iDu_{xx} + k|u|^2\ u = 0,\ |u|^2 = uu^*. \qquad (3.34)$$

Классическое НУШ используется в качестве модели множества нелинейных явлений, наиболее известными из которых являются модели распространения оптического излучения в однородной среде с керровской нелинейностью. Полученная система уравнений, во-первых, содержит слагаемые, связанные с функциями p и q, которые отсутствуют в классическом НУШ. Во-вторых, функцию $\overline{A}$ можно рассматривать в качестве комплексно-сопряженной амплитуды к A, если функции a_1, a_2, q - вещественные, а $p = ir$ - чисто мнимая. Последнее может быть достигнуто с помощью специального отбора решений вспомогательного уравнения (3.30) при сделанных ранее упрощениях. В этом случае система оказывается близкой к модели взаимодействующих оптических волн. Для того чтобы установить, в каких случаях данная система переходит в чисто НУШ, необходимо в МФП включать более сложные дополнительные условия.

3.9 Дополнительные интегрируемые соотношения

Для анализа условий того, когда уравнения (3.33) переходят в классическое НУШ или, возможно, в уравнения типа Гинзбурга-Ландау, рассмотрим несколько иное представление уравнений (3.31). Кроме этого, для того чтобы привести уравнение (3.31) к виду, аналогичному (3.34), необходимы дополнительные условия. Эти условия можно сформулировать в том же виде, как и в случае с уравнением КдВ, т.е. в форме дополнительного уравнения для основной функции $\hat{T}(x,t)$. В работе [50] было показано, что уравнение типа (3.31) можно превратить в уравнение типа НУШ, если к вспомогательному уравнению (3.30) добавить еще одно линейное матричное соотношение на функцию $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_x = \hat{G}\hat{T}\hat{L}, \tag{3.35}$$

где $\hat{G}(t)$ - некоторая матрица, зависящая от t, а $\hat{L}$ - невырожденная постоянная матрица. Для тех матричных функций, которые удовлетворяют одновременно и (3.30), и (3.35), выполняются следующие дополнительные уравнения для $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{A}_x + \hat{A}^2 = \hat{G}\hat{A}\hat{G}^{-1}\hat{A}, \quad \hat{B}_x + \hat{B}\hat{A} = \hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{A}. \tag{3.36}$$

Первое из этих соотношений преобразуем к более удобной форме:

$$\hat{A}_x = [\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}. \tag{3.37}$$

Тогда, используя это соотношение, преобразуем уравнение (3.31) к виду, который аналогичен уравнению НУШ:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + (2\hat{J}[\hat{A},\hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J},\hat{A}][\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J},\hat{A}]\hat{A}^2) - [\hat{A},\hat{Q}] + \hat{Q}_x. \tag{3.38}$$

Нелинейное слагаемое в этом уравнении может быть представлено в более общей форме. Именно слагаемое со второй производной $\hat{A}_{xx}$ можно дополнительно разделить на две части, одну из которых с помощью соотношения (3.37) можно превратить также в нелинейное слагаемое. Следуя такому алгоритму, уравнение (3.38) можно представить в следующем виде:

$$\hat{A}_t = \hat{J}(\hat{1}-\hat{D})\hat{A}_{xx} + \hat{N} - [\hat{A},\hat{Q}] + \hat{Q}_x, \tag{3.39}$$

где

$$\hat{N} = \hat{J}\hat{D}([\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} + [\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}) +$$
$$+2\hat{J}[\hat{A},\hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J},\hat{A}][\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J},\hat{A}]\hat{A}^2$$

Здесь матрица $\hat{D}$ может быть любой, зависящей только от t, матрицей. При этом уравнение (3.39) имеет кубическую нелинейность, как и уравнение НУШ. Покажем далее, что, подбирая определенным образом вид матриц $\hat{J},\hat{G}$ и $\hat{D}$, это уравнение действительно можно привести в точности к уравнению НУШ (3.34).

Очевидно, что, в отличие от классического НУШ, это уравнение в покомпонентной записи относительно элементов матрицы $\hat{A}$ будет иметь различный вид в зависимости от алгебраической структуры матриц $\hat{J}, \hat{A}$ и $\hat{G}$. Имеется в виду то, что если матрицы $\hat{T}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{J}, \hat{D}, \hat{Q}$ и $\hat{G}$ определены на некоторой подалгебре линейной матричной алгебры GL_n матриц размерности $n \times n$, то структура уравнений будет целиком определяться этой подалгеброй и конкретным выбором элементов матриц $\hat{J}, \hat{D}, \hat{Q}$ и $\hat{G}$. Поскольку классическое НУШ (3.34) содержит только одну комплексную функцию $u(x,t)$, то имеет смысл вначале рассматривать уравнения (3.39) в матричной размерности 2×2, т.е. на алгебре GL_2.

Прежде чем анализировать (3.39) в алгебре GL_2, заметим, что матрица Λ играет роль, аналогичную роли спектрального параметра в МОЗ. Уравнения (3.30) и (3.35) можно рассматривать как уравнения для вспомогательной функции $\hat{T}$ метода МОЗ, которая удовлетворяет в этом методе паре уравнений для "не одетых" операторов представления Лакса-Захарова-Шабата (ЛЗШ). Для большего сходства уравнение (3.30), используя (3.35), можно привести к форме матричного уравнения первого порядка по t:

$$\hat{T}_t = \hat{J}\hat{G}^2\hat{T}\hat{L}^2 + \hat{Q}\hat{T}. \qquad (3.40)$$

Это уравнение имеет вид уравнения первого порядка по t, что аналогично представлению ЛЗШ для уравнения НУШ. Для того чтобы существовало общее решение уравнения (3.35) и уравнения (3.40), достаточно, чтобы матричные операторы в правой части этих уравнений коммутировали между собой. Это условие эквивалентно требованию

$$\hat{J}\hat{G}^3\hat{T}\hat{L}^3 + \hat{Q}\hat{G}\hat{T}\hat{L} = \hat{G}\hat{J}\hat{G}^2\hat{T}\hat{L}^3 + \hat{G}\hat{Q}\hat{T}\hat{L} + \hat{Q}_x\hat{T}$$

Это условие обращается в тождество, если выполнены следующие два условия:

$$[\hat{J}, \hat{G}] = 0, \ [\hat{Q}, \hat{G}] = 0, \ \hat{Q}_x = 0.$$

При такой интерпретации операторы $\hat{L}_A$ и $\hat{L}_B$ вида

$$\hat{L}_A = \frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}, \ \hat{L}_B = \frac{\partial}{\partial t} - \hat{B},$$

можно рассматривать как одевающие операторы в схеме МОЗ.

3.10 Уравнения для матриц размерности $n = 2$

Матричные функции $\hat{T}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{G}$ в алгебре GL_2 можно представить в виде линейных комбинаций матриц Паули (3.6), для которых выполняются соотношения (3.7). Матричную функцию $\hat{T}(t)$ представим в таком виде:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^{3} \psi_i(x,t)\sigma_i, \quad (3.41)$$

где $\psi_i(x,t)$ - вспомогательные функции. Соответственно:

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{3} a_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \; \hat{B} = \sum_{i=0}^{3} b_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \quad (3.42)$$

Выберем матрицу $\hat{J}$ в такой форме

$$\hat{J} = iK(t)\hat{\sigma}_3, \quad (3.43)$$

где $K = K(t)$ - некоторая комплексная функция переменной t. Подставляя матрицы в уравнение (3.31) после простых, но несколько громоздких вычислений, приходим к следующей системе уравнений относительно функций $a_i(x,t), i = 0,1,2,3$:

$$\begin{aligned}
&a_{0,t} - iK(t)a_{3,xx} - 2iK(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_3) = 0,\\
&a_{3,t} - iKa_{0,xx} - iK\frac{\partial}{\partial x}(R^2 + a_1^2 + a_2^2) - 4iK(a_1^2 + a_2^2)a_0 = 0,\\
&a_{1,t} - Ka_{2,xx} - 2K(a_{2,x}a_0 + 2a_{0,x}a_2) - 2KR^2 a_2 + 4iKa_0 a_3 a_1 = 0,\\
&a_{2,t} + Ka_{1,xx} + 2K(a_{1,x}a_0 + 2a_{0,x}a_1) + 2KR^2 a_1 + 4iKa_0 a_3 a_2 = 0.
\end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь $R^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_0^2 + a_3^2$. Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0$ и $w = -ia_3$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&u_t + iKu_{xx} + 4iKv_x u + 2iKvu_x + 2Ki(|u|^2 + v^2 - w^2)u + 4Kwvu = 0,\\
&v_t + Kw_{xx} + 2K\frac{\partial}{\partial x}(vw) = 0,\\
&w_t - Kv_{xx} - K\frac{\partial}{\partial x}(2|u|^2 + v^2 - w^2) - 4K|u|^2 v = 0.
\end{aligned} \quad (3.45)$$

Функции v, w вещественные. Уравнение для комплексной функции u является уравнением, подобным НУШ по форме старшей его части, но не совпадает с ним и содержит больше неизвестных функций и параметров. Тем не менее система (3.45) является полностью интегрируемой и представляет собой уравнение типа Бюргерса.

3.11 Приведение к форме НУШ

Рассмотрим теперь уравнения, соответствующие редукции, связанной с дополнительным уравнением (3.35). Выберем матрицу $\hat{G}$ в следующей форме:

$$\hat{G} = \beta\hat{\sigma}_3,$$

где β - некоторая вещественная постоянная. При этом выбор матриц $\hat{J}, \hat{D}$ оставим прежним (3.43) .

Соотношения (3.37), которые редуцируют уравнения (3.44) к уравнениям типа НУШ, в покомпонентной записи имеют такой вид:

$$a_{0,x}+2(a_1^2+a_2^2)=0,\quad a_{3,x}=0,$$
$$a_{1,x}+2a_0a_1+2ia_3a_2=0,\quad a_{2,x}+2a_0a_2-2ia_3a_1=0. \qquad (3.46)$$

Отсюда, в частности, следует, что функция a_3 не зависит от x: $a_3=c_3(t)$, а функцию a_0 можно представить в виде

$$a_0=-\int(a_1^2+a_2^2)dx+c_0(t),$$

где функции $c_0(t)$ и $c_3(t)$ будут определяться формой решений для элементов матрицы $\hat{T}$.

Вводя переменные $u=a_1+ia_2$, $\bar{u}=a_1-ia_2$, $v=a_0+a_3$ и $\bar{v}=a_0-a_3$, уравнения (3.39) можно привести к паре комплексных уравнений:

$$u_t+iK(1-\beta)u_{xx}+2i(3-2\beta)Ku^2\bar{u}+2iK(1-2\beta)v^2u+2(q_3u-qa_3)=0, \qquad (3.47)$$
$$\bar{u}_t-iK(1-\beta)\bar{u}_{xx}-2i(3-2\beta)Ku\bar{u}^2-2iK(1-2\beta)\bar{v}^2u+2(q_3\bar{u}-\bar{q}_3a_3)=0.$$

Здесь $q=q_1+iq_2, \bar{q}=q_1-iq_2$. В случае, если $a_i, i=0,\ldots,2$ - вещественные функции, а $a_3=ia$ - чисто мнимая, то уравнения (3.47) комплексно сопряжены друг другу и являются некоторым аналогом НУШ. Используя (3.46), получаем следующее соотношение:

$$v=a_0+a_3=\int|u|^2\,dx+c_0+c_3,$$

которое позволяет уравнение (3.47) записать в следующем виде:

$$u_t+iK(1-\beta)u_{xx}+2i(3-2\beta)K|u|^2u+2i(1-2\beta)K\left(\int|u|^2\,dx+c_0+c_3\right)^2u+2q_3u=0. \qquad (3.48)$$

При этом функция v удовлетворяет уравнению

$$v_t-iK(1-\beta)v_{xx}-2iK(3-2\beta)|u|^2v-2iK(1-2\beta)|u|^2\bar{v}=0. \qquad (3.49)$$

Заметим, что параметр β произволен, но сами решения для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ от него не зависят. Это означает, что предлагаемый способ получения нелинейных уравнений и их решений на самом деле позволяет строить пучки уравнений с инвариантным классом решений, который определяется функциональными подстановками, определенными выше. В частности, полагая $\beta=1/2$, преобразуем уравнение (3.48) к классическому НУШ с линейным коэффициентом преломления среды $\gamma(t)=-2iq_3(t)$, который задается произвольной функцией $q_3(t)$. Функции u и v при таком выборе β являются решениями уравнений

$$u_t+\frac{i}{2}Ku_{xx}+4iK|u|^2u+2q_3u=0,\; v_t-\frac{i}{2}Kv_{xx}-4iK|u|^2v=0. \qquad (3.50)$$

Первое уравнение не зависит от функции v и является классическим НУШ, а второе уравнение описывает распространение возмущений в среде с показателем преломления $4K|u|^2$.

В случае $\beta = 3/2$ уравнения (3.48) и (3.49) принимают такой вид:

$$u_t - i\frac{K}{2}u_{xx} - i(Kv^2 + 2iq_3)u = 0, \qquad v_t + i\frac{K}{2}v_{xx} + 4iK|u|^2\bar{v} = 0,$$

а в случае $\beta = 1$ уравнения (3.48) и (3.49) переходят в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u и v:

$$u_t + 2iK|u|^2 u - i2Kv^2u + 2q_3u = 0, \quad v_t - 2iK|u|^2(v - \bar{v}) = 0,$$

в которых зависимость функций от x является параметрической.

3.12 Обобщенные уравнения типа НУШ

Выберем в качестве матриц $\hat{J}$ и $\hat{G}$ матрицы следующего вида:

$$\hat{J} = iK_1\hat{\sigma}_3 + K_2\hat{\sigma}_0, \quad \hat{G} = \beta\hat{\sigma}_0 + i\alpha\hat{\sigma}_3.$$

Вводя, как и раньше, переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0 + a_3 = a_0 + ia$, $\bar{v} = a_0 - a_3 = a_0 - ia$ и полагая $q_1 = q_2 = 0$, уравнения преобразуем к следующей форме:

$$u_t - i\gamma_0 u_{xx} - i\gamma_1 v^2 u - 2i\gamma_2 u^2\bar{u} + 2iq_3 u = 0, \tag{3.51}$$
$$\bar{u}_t + i\bar{\gamma}_0\bar{u}_{xx} + i\bar{\gamma}_1\bar{v}^2\bar{u} + 2i\bar{\gamma}_2 u\bar{u}^2 - 2iq_3\bar{u} = 0.$$

Здесь также введены следующие обозначения:

$$\gamma_0 = (K_1 + iK_2)(\beta - 1 - i\alpha),$$
$$\gamma_1 = K_1(2\beta - 1 - 2i\alpha) + 2iK_2(\beta - 1 - i\alpha),$$
$$\gamma_2 = K_1(2\beta - 3 - 2i\alpha) + 2iK_2(\beta - 1 - i\alpha) = \gamma_1 - 2K_1.$$

Уравнения для v и $\bar{v}$ будут в этом случае такими:

$$v_t + i\bar{\gamma}_0 v_{xx} + 2i|u|^2(\bar{\gamma}_1(v + \bar{v}) - K_1(v - \bar{v})) - p_x = 0, \tag{3.52}$$
$$\bar{v}_t - i\gamma_0\bar{v}_{xx} - 2i|u|^2(\gamma_1(v + \bar{v}) + K_1(v - \bar{v})) - \bar{p}_x = 0$$

Для того чтобы уравнения (3.51) были комплексно сопряжены друг другу (это касается и (3.52)), достаточно потребовать, чтобы функции $a_i, i = 0,1,2$ и $a = -ia_3$ были вещественными, так же как и коэффициенты K_1, K_2, α, β. При этом коэффициенты K_1, K_2, α, β могут быть произвольными вещественными функциями времени.

Особый интерес представляет случай, когда (3.51) имеет вид уравнения типа НУШ, но с комплексными коэффициентами. Такое уравнение носит название уравнения Гинзбурга-Ландау (УГЛ). Для того чтобы привести уравнение (3.51) к подходящему виду, необходимо потребовать, чтобы коэффициент γ_1 обращался в ноль. Как видно, в этом случае в уравнении будет отсутствовать слагаемое с v^2, как и в случае классического НУШ. В данном случае условие обращения γ_1 в ноль эквивалентно двум алгебраическим уравнениям:

$$K_1(2\beta-1)+2\alpha K_2=0,\quad -2\alpha K_1+2(\beta-1)K_2=0. \tag{3.53}$$

Это уравнение будет иметь нетривиальные решения относительно K_1 и K_2 в случае выполнения условия

$$2(2\beta-1)(\beta-1)+4\alpha^2=0. \tag{3.54}$$

Относительно β это уравнение имеет следующие два корня:

$$\beta=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{1-16\alpha^2}. \tag{3.55}$$

Поскольку для сопряженности уравнений необходимы вещественные решения β и α, то из (3.55) следует, что это возможно лишь при условии $|\alpha|<1/4$. При выполнении этих условий коэффициенты K_1 и K_2 связаны одним соотношением:

$$K_2=-\frac{2\beta-1}{2\alpha}K_1.$$

Уравнение (3.51) при таком выборе переменных будет иметь вид:

$$u_t-i\gamma_0u_{xx}-2i\gamma_2u^2\bar{u}+2iq_3u=0,$$

где коэффициенты γ_0 и γ_2 будут иметь такой вид:

$$\gamma_0=K_1\frac{(\beta-1)^2+\alpha^2}{\beta-1},\ \gamma_2=-2K_1.$$

Здесь было учтено, что условие (3.54) эквивалентно условию

$$\frac{2\beta-1}{2\alpha}=-\frac{\alpha}{\beta-1}.$$

Можно видеть, что в этом случае уравнение превращается в классическое НУШ с вещественными коэффициентами.

Но все же среди уравнений (3.51) имеются уравнения, форма которых соответствует уравнению УГЛ. Обратим еше раз внимание на то, что от параметров α и β зависит только форма уравнений, но не зависят сами их решения, полученные с помощью подстановок. Выберем два произвольных набора параметров α_1,β_1 и α_2,β_2, не требуя выполнения условий (3.53). Соответствующие два уравнения (3.51) перепишем в следующей форме:

$$\frac{1}{\gamma_1^{(1)}}u_t-i\frac{\gamma_0^{(1)}}{\gamma_1^{(1)}}u_{xx}-iv^2u-2i\left(1-\frac{2K_1}{\gamma_1^{(1)}}\right)u^2\bar{u}+2i\frac{q_3}{\gamma_1^{(1)}}u=0,$$

$$\frac{1}{\gamma_1^{(2)}}u_t-i\frac{\gamma_0^{(2)}}{\gamma_1^{(2)}}u_{xx}-iv^2u-2i\left(1-\frac{2K_1}{\gamma_1^{(2)}}\right)u^2\bar{u}+2i\frac{q_3}{\gamma_1^{(2)}}u=0.$$

Вычитая первое уравнение из второго и умножая результат на величину

$$m=\frac{1}{\gamma_1^{(2)}}-\frac{1}{\gamma_1^{(1)}},$$

приходим к уравнению УГЛ следующего вида:

$$u_t - iDu_{xx} - 4iK_1 u^2 \bar{u} + 2iq_3 u = 0, \qquad (3.56)$$

где

$$D = \frac{\gamma_0^{(2)}\gamma_1^{(1)} - \gamma_0^{(1)}\gamma_1^{(2)}}{\gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}}.$$

Аналогичные вычисления следует применить ко второму уравнению системы (3.51) . В результате получим:

$$u_t + i\bar{D}u_{xx} - 4iK_1 u^2 \bar{u} + 2iq_3 u = 0,$$

Величина D является в общем случае комплексной. Следовательно, уравнение (3.56) является подходящим по форме уравнением Гинзбурга-Ландау с комплексной дисперсией.

3.13 Вычисление решений основного уравнения

Вычисление решений строится на основе решения матричного уравнения (3.30) в покомпонентной форме. Используя обозначения (3.41) , перепишем систему для $\hat{T}$ в виде следующей системы уравнений для ψ_i:

$$\psi_{0,t} - K_2\psi_{0,xx} - iK_1\psi_{3,xx} = 0, \;\; \psi_{3,t} - K_2\psi_{3,xx} + iK_1\psi_{0,xx} = 0, \qquad (3.57)$$

$$\psi_{1,t} - K_2\psi_{1,xx} - K_1\psi_{2,xx} = 0, \;\; \psi_{2,t} - K_2\psi_{2,xx} + K_1\psi_{1,xx} = 0. \qquad (3.58)$$

Отыскивая решение этих уравнений в виде

$$\psi_k = A_k e^{kx+\omega t}, \qquad (3.59)$$

находим дисперсионное соотношение:

$$(\omega - k^2 K_2)^2 + k^4 K_1^2 = 0. \qquad (3.60)$$

Для ω имеем два решения:

$$\omega_+(k) = k^2(K_2 + iK_1), \;\; \omega_-(k) = k^2(K_2 - iK_1). \qquad (3.61)$$

Обозначим через $A_k^{(\pm)}$ решения для амплитуд, соответствующие $\omega_\pm(k)$. Подставляя (3.59) для $\omega_\pm(k)$, находим, что амплитуды должны быть связаны соотношениями:

$$A_3^{(+)} = A_0^{(+)}, \;\; A_3^{(-)} = -A_0^{(-)}, \;\; A_2^{(+)} = iA_1^{(+)}, \;\; A_2^{(-)} = -iA_1^{(-)}. \qquad (3.62)$$

Если не требовать выполнения дополнительного соотношения (3.35) или (3.37) , то решения для функций ψ_k будут иметь следующий общий вид:

$$\psi_0 = h_0(x,t) + g_0(x,t), \;\; \psi_3 = h_0(x,t) - g_0(x,t),$$
$$\psi_1 = h_1(x,t) + g_1(x,t), \;\; \psi_2 = ih_1(x,t) - ig_1(x,t), \qquad (3.63)$$

где

$$h_0(x,t) = \int A_0^{(+)}(k) e^{kx+\omega_+(k)t} dk, \;\; g_0(x,t) = \int A_0^{(-)}(k) e^{kx+\omega_-(k)t} dk,$$
$$h_1(x,t) = \int A_1^{(+)}(k) e^{kx+\omega_+(k)t} dk, \;\; g_1(x,t) = \int A_1^{(-)}(k) e^{kx+\omega_-(k)t} dk.$$

Эти соотношения позволяют отыскать решения системы уравнений (3.45) типа Бюргерса, для которой следует положить $K_2 = 0$.

Из базового соотношения (3.1) имеем:

$$\hat{A} = \hat{T}_x \hat{T}^{-1}.$$

Используя (3.41), находим:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{Z}(\psi_0 \hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3} \psi_\alpha \hat{\sigma}_\alpha).$$

где

$$Z = \det(\hat{T}) = \psi_0^2 - \psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2.$$

Отсюда находим:

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln Z, \qquad a_3 = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\psi_3 \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_3}{\psi_0} + i\psi_1\psi_2 \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_2}{\psi_1}\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\psi_1 \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_1}{\psi_0} + i\psi_3\psi_2 \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_3}{\psi_2}\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\psi_2 \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_2}{\psi_0} + i\psi_1\psi_3 \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_1}{\psi_3}\right).$$

Подставляя в эти соотношения функции ψ_k из (3.63), можно получить решения уравнений (3.45) в явном виде.

3.14 Решение уравнений с ограничениями

В случае использования дополнительного замыкающего соотношения (3.35) компоненты матрицы $\hat{T}$ должны дополнительно являться решениями системы линейных уравнений по x первого порядка. Рассмотрим в качестве матрицы $\hat{L}$ матрицу следующего вида:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Теперь решение для ψ_k можно искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\Psi_0(x,t,k_1,k_2) &= A_0^{(+)} e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} + A_0^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t}, \\
\Psi_3(x,t,k_1,k_2) &= A_0^{(+)} e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} - A_0^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t}, \\
\Psi_1(x,t,k_1,k_2) &= A_1^{(+)} e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} + A_1^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t}, \\
\Psi_2(x,t,k_1,k_2) &= iA_1^{(+)}(k_1) e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} - iA_1^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

В этом случае условием выполнения соотношения (3.35) являются следующие ограничения на выбор параметров этих решений:

$$A_1^{(+)} = -\frac{\lambda_2 + k_2}{\mu_1} A_0^{(+)},\ A_1^{(-)} = -\frac{\lambda_1 - k_1}{\mu_2} A_0^{(-)}. \tag{3.65}$$

и

$$(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2) = \mu_1 \mu_2,\ \ (k_2 + \lambda_1)(k_2 + \lambda_2) = \mu_1 \mu_2.$$

Отсюда следует, что для k_1 и k_2 имеются следующие допустимые решения:

$$k_1^{\pm} = ((\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{Q_0})/2,\ \ k_2^{\pm} = (-(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{Q_0})/2,$$

где $Q_0 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\mu_1\mu_2$. Таким образом, в силу линейности соотношения (3.35) общее решение можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \Psi_0(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_0(x,t,k_1^-,k_2^-),\\
\psi_3 &= \Psi_3(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_3(x,t,k_1^-,k_2^-),\\
\psi_1 &= \Psi_1(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_1(x,t,k_1^-,k_2^-),\\
\psi_2 &= \Psi_2(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_2(x,t,k_1^-,k_2^-).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Решение для функций $a_1(x,t)$, $a_2(x,t)$ и $u(x,t) = a_1 + ia_2$ теперь имеет такой вид:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2Q_0}{P(x,t)}\left(u_1u_2\mu_1 e^{2Q_1(iK_1-K_2)t+(\lambda_1+\lambda_2)x} - v_1v_2\mu_2 e^{-2Q_1(iK_1-K_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)x}\right),\\
a_2 &= i\frac{2Q_0}{P(x,t)}\left(u_1u_2\mu_1 e^{2Q_1(iK_1-K_2)t+(\lambda_1+\lambda_2)x} + v_1v_2\mu_2 e^{-2Q_1(iK_1-K_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)x}\right),\\
u(x,t) &= a_1 + ia_2 = -\frac{4Q_1v_1v_2\mu_2\mu}{P(x,t)} e^{-2Q_1(iK_1-K_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)x},
\end{aligned} \tag{3.67}$$

где $Q_1 = \mu_1\mu_2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)/2$, $\Omega = (\lambda_1 + \lambda_2)K_1$ и

$$P(x,t) = e^{2K_2Q_1t}F(x,t),\ F(x,t) = R_1 e^{-(i\Omega t + x)\sqrt{Q_0}} + R_2 e^{(i\Omega t + x)\sqrt{Q_0}},$$

$$R_1 = u_2v_2(Q_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{Q_0}),\ R_2 = u_1v_1(Q_0 - (\lambda_1 - \lambda_2)\sqrt{Q_0}).$$

При этом $a_3 = \lambda_1 + \lambda_2$, а решение для a_0 имеет вид:

$$a_0 = -\frac{4Q_0\mu H(x,t)}{P(x,t)} e^{2K_2Q_1t},$$

где

$$H(x,t) = S_1 e^{(-i\Omega t - x)\sqrt{Q_0}} + S_2 e^{(i\Omega t + x)\sqrt{Q_0}},$$

$$S_1 = u_2v_2(\lambda_1 - \lambda_2 + \sqrt{Q_0}),\ S_2 = u_1v_1(\lambda_1 - \lambda_2 - \sqrt{Q_0}).$$

Эти решения переходят в солитон, подобный НУШ, например, в частном случае выполнения условий

$$\lambda_i = ik_1,\ \lambda_2 = ik_2,\ R_1R_2 \neq 0.$$

Однако форма решения несколько отличается от стандартного солитона НУШ.

В частном случае

$$k_1 = 1, k_2 = 2, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1. u_1 = u_2 = 1, v_1 = v_2 = -1, K_1 = 1, K_2 = 0.1$$

решение для $u(x,t)$ можно записать в виде

$$u(x,t) = \frac{2e^{i(6t-4x)}}{(2x-8t)+i(2x-8t)}.$$

При этом

$$|u(x,t)|^2 = \frac{288}{(4x-16t)}.$$

Выбор параметров в другом виде приводит к решениям, отличающимся от обычных солитонов.

4 Конечномерные динамические системы

4.1 Подстановки на алгебрах

Одним из способов расширить область применения матричных подстановок для построения интегрируемых уравнений является расширение понятия дифференцирования при формулировке системы базовых соотношений (2.18). Сам способ вывода рекуррентных соотношений (2.22), являющихся следствием базовых соотношений, требует лишь наличия определенных свойств у операторов дифференцирования, входящих в определение базовых соотношений. Пусть $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_t$ - два формальных линейных оператора на некотором пространстве матричных функций $\hat{T}$. С помощью этих операторов определим два базовых соотношения:

$$\hat{D}_x\hat{T} = \hat{A}\hat{T}, \quad \hat{D}_y\hat{T} = \hat{B}\hat{T}. \tag{4.1}$$

Для вывода следствий из этих двух формальных соотношений в форме соотношений, аналогичных соотношениям в случае, когда $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_t$ обычные производные, достаточно, чтобы операторы $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_y$ обладали двумя свойствами. Первое свойство представляет собой обобщенное правило Лейбница. Действие операторов на произведение произвольных матричных функций $\hat{T}$ и $\hat{S}$ должно выражаться следующим образом:

$$\hat{D}_x(\hat{S}\hat{T}) = P_x(\hat{S},\hat{D}_x\hat{S})\hat{T} + Q_x(\hat{S},\hat{D}_x\hat{S})\hat{D}_x\hat{T}, \ \hat{D}_y(\hat{S}\hat{T}) = P_y(\hat{S},\hat{D}_x\hat{S})\hat{T} + Q_y(\hat{S},\hat{D}_x\hat{S})\hat{D}_x\hat{T},$$

причем P_x, P_y и Q_x, Q_y могут быть произвольными матричными полиномами своих матричных аргументов. В частности, если

$$\hat{D}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \ \hat{D}_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

обычные частные производные, то

$$P_x = \hat{D}_x\hat{S}, \ Q_x = \hat{S}, \ P_y = \hat{D}_y\hat{S}, \ Q_y = \hat{S}. \tag{4.2}$$

Второе условие состоит в том, что коммутатор операторов должен выражаться только через сами операторы $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_y$ и, возможно, некоторые фиксированные матричные функции или постоянные. В простейшем случае $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_y$ могут коммутировать между собой, как в случае выбора их в форме частных производных.

Примером такого типа операторов являются операторы дифференцирования на матричных линейных алгебрах GL_n. Определим операторы $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_y$ следующим образом:

$$\hat{D}_x\hat{T} = [\hat{x},\hat{T}],\ \hat{D}_y\hat{T} = [\hat{y},\hat{T}],$$

где $\hat{x}$ и $\hat{y}$ - некоторые фиксированные элементы полной линейной матричной алгебры GL_n. В этом случае обобщенное правило Лейбница по форме совпадает с обычным правилом Лейбница (4.2). В силу тождества Якоби коммутатор этих операторов будет иметь такой вид:

$$[\hat{D}_x,\hat{D}_y]\hat{T} = \hat{D}_x\hat{D}_y\hat{T} - \hat{D}_y\hat{D}_x\hat{T} = [\hat{x},[\hat{y},\hat{T}]] - [\hat{y},[\hat{x},\hat{T}]] = -[[\hat{x},\hat{y}],\hat{T}].$$

Для того чтобы последнее тождество соответствовало выполнению второго условия, достаточно, чтобы матричный элемент $[\hat{x},\hat{y}]$ имел вид

$$[\hat{x},\hat{y}] = \alpha\hat{x} + \beta\hat{y} + \gamma\hat{I},$$

где α,β,γ - некоторые постоянные, а $\hat{I}$ - единичная матрица. В случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$ операторы коммутируют.

4.2 Дифференциально-алгебраический аналог обобщенных подстановок типа Коула-Хопфа

Рассмотрим матричные функции времени $\hat{T}(t)$, заданные на некоторой матричной алгебре A с конечным числом образующих $\hat{g}_\alpha, \alpha = 1,\dots,N$:

$$\hat{T} = \sum_{\alpha=1}^{N}\tau_\alpha(t)\hat{g}_\alpha. \quad (4.3)$$

На алгебре A рассмотрим оператор, действующий на любую функцию $\hat{F} = \sum_{\alpha=1} N\phi_\alpha(t)\hat{g}_\alpha$ на этой алгебре по правилу

$$\hat{D}_x\hat{F} = [\hat{X},\hat{F}] = \sum_{\alpha=1} N\phi_\alpha(t)[\hat{X},\hat{g}_\alpha], \quad (4.4)$$

где $\hat{X} = \sum_{\alpha=1}^{N}\xi_\alpha\hat{g}_\alpha$ - некоторый выделенный, независящий от времени t элемент алгебры A. Из (4.4) следует:

$$\hat{D}_x\hat{F} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\phi_\alpha(t)\xi_\beta[\hat{g}_\beta,\hat{g}_\alpha].$$

Пусть для образующих алгебры выполнены следующие соотношения:

$$\hat{g}_\alpha\hat{g}_\beta = \sum_{\gamma=1}^{N}C_{\alpha\beta\gamma}\hat{g}_\gamma,$$

где $C_{\alpha\beta\gamma}$ - структурные постоянные алгебры. Тогда имеем:

$$\hat{D}_x\hat{F} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\sum_{\gamma=1}^{N}\phi_\alpha(t)\xi_\beta[C_{\beta\alpha\gamma} - C_{\alpha\beta\gamma}]\hat{g}_\gamma.$$

Можно видеть, что оператор $\hat{D}_x$ представляет собой оператор дифференцирования в том смысле, что он удовлетворяет правилу Лейбница. Еще одним свойством оператора $\hat{D}_x$ является его перестановочность (коммутативность) с производной по переменной t, что обеспечивается независимостью от t выделенного элемента $\hat{X}$. Эти два свойства позволяют применить к уравнениям на любой матричной алгебре A метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа, развитый в [39].

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\hat{T}_t = \frac{d}{dt}\hat{T},\ \hat{T}_x = \hat{D}_x\hat{T} = [\hat{X},\hat{T}],\ \hat{T}_{xx} = \hat{D}_x\hat{D}_x\hat{T} = [\hat{X},[\hat{X},\hat{T}]],\ldots.$$

Аналогичные обозначения вводятся и для других матриц.

В [43] был рассмотрен вариант МФП, построенный на совокупности дифференциальных соотношений для вспомогательной функции $\hat{T}$, используемый в работах [34, 39]. Этот вариант строится на системе базовых уравнений первого и второго порядка, который особенно полезен в случае анализа гидродинамических задач. Для рассматриваемых в данной работе динамических систем более простым и полезным является метод, основанный на базовых уравнениях для вспомогательной функции первого порядка. Именно, рассмотрим для вспомогательной матричной функции $\hat{T}$ следующие два базовых уравнения:

$$\hat{T}_t = \hat{V}\hat{T},\ \hat{T}_x \equiv [\hat{X},\hat{T}] = \hat{S}\hat{T}, \tag{4.5}$$

где $\hat{V}$ и $\hat{S}$ - матричные функции t. При заданной матричной функции $\hat{T}$ матрицы $\hat{V}$ и $\hat{S}$ удовлетворяют уравнению связи

$$\hat{S}_t + [\hat{S}-\hat{X},\hat{V}] = 0. \tag{4.6}$$

Полагая

$$\hat{V} = \sum_{\alpha=1}^{N} v_\alpha \hat{g}_\alpha,\ \hat{S} = \sum_{\beta=1}^{N} s_\beta \hat{g}_\beta,$$

приходим к системе уравнений для коэффициентов разложения матриц по образующим алгебры A:

$$\dot{v}_\gamma + \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (C_{\beta\alpha\gamma} - C_{\alpha\beta\gamma})(v_\alpha - \xi_\alpha)s_\beta,\ \gamma = 1,\ldots,N. \tag{4.7}$$

Эта система представляет собой совокупность дифференциальных тождеств, которым удовлетворяют функции $v_\alpha(t), s_\alpha(t)$ в случае, если они вычисляются из соотношений (4.5) при произвольной матричной функции $\hat{T}$, заданной соотношением (4.3) на алгебре A.

4.3 Дифференциально-алгебраические подстановки

Общий метод построения интегрируемых с помощью матричных подстановок конечномерных динамических систем, как и в случае уравнений в частных производных, состоит в явном вычислении нелинейного уравнения исходя из конкретного вида произвольного интегрируемого уравнения, например линейного, с помощью дифференциальных соотношений (4.5) и их произвольного порядка дифференциальных следствий относительно вспомогательной матричной функции $\hat{T}$. Именно, из (4.5) по аналогии с [39] можно получить все возможные дифференциальные соотношения следующего вида:

$$\frac{d^n}{dt^n}\underbrace{[\hat{X},\cdots,[\hat{X},\hat{T}]]}_{k} = \hat{A}^{(n,k)}\hat{T},\ n = 0,1,\ldots; k = 0,1,\ldots. \tag{4.8}$$

Матричные коэффициенты $\hat{A}^{(n,k)}$ могут быть вычислены с помощью рекуррентных соотношений:

$$\hat{A}^{(n+1,k)} = \frac{d}{dt}\hat{A}^{(n,k)} + \hat{A}^{(n,k)}\hat{V},\quad \hat{A}^{(n,k+1)} = [\hat{X},\hat{A}^{(n,k)}] + \hat{A}^{(n,k)}\hat{S},$$

при начальных условиях

$$\hat{A}^{(0,0)} = \hat{1},\ \hat{A}^{(1,0)} = \hat{V},\ \hat{A}^{(0,1)} = \hat{S}.$$

Матричные коэффициенты $\hat{A}^{(n,k)}$ являются дифференциальными полиномами от функций $\hat{V}$ и $\hat{S}$.

В результате любому линейному обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $\hat{T}$ вида

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=0}^{L}\hat{C}_{k,n}(t)\frac{d^n}{dt^n}\underbrace{[\hat{X},\cdots,[\hat{X},\hat{T}]]}_{k} = 0, \tag{4.9}$$

с произвольными функциями $\hat{C}_{k,n}(t)$ с помощью дифференциальных соотношений (4.8) можно сопоставить нелинейное уравнение относительно функций $\hat{V}$ и $\hat{U}$:

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{n=0}^{L}\hat{C}_{k,n}(t)\hat{A}^{(n,k)} = 0. \tag{4.10}$$

В результате уравнения (4.10) образуют замкнутую нелинейную систему уравнений для вычисления матричных функций $\hat{V}$ и $\hat{S}$ (и их коэффициентов в разложении по базисным элементам алгебры A). В дальнейшем уравнения (4.9) будем называть замыкающими.

Из самого принципа построения уравнений (4.10) следует, что их интегрируемость связана напрямую с интегрируемостью уравнений (4.9). Действительно, в случае интегрируемости уравнений (4.9) имеется возможность явно вычислить решения для матричной функции $\hat{T}$. Тогда в силу дифференциальных соотношений (4.5) вычисляются явно функции $\hat{U},\hat{V},\hat{Q}$, которые заведомо обращают уравнения (4.10) в тождество. Соотношения (4.5) и являются собственно матричными подстановками типа Коула-Хопфа. Эти подстановки будем называть дифференциально-алгебраическими или DA-подстановками.

Утверждение 4.1. Система уравнений (4.10) и (4.6) является полностью интегрируемой, а ее решения полностью определяются решениями системы линейных уравнений (4.9) и вычисляются с помощью соотношений (4.5), которые представляют собой матричные подстановки типа Коула-Хопфа.

4.4 Законы сохранения

Факт полной интегрируемости динамических систем тесно связан с вопросом о наличии у системы достаточного числа интегралов движения. Поскольку системы, которые строятся с помощью предложенного метода, полностью интегрируемы в смысле исходного определения этого понятия, т.е. возможно представить их решения в форме квадратур, то эти системы обладают набором функционально независимых интегралов движения. Вычисление этих интегралов представляется важным элементом анализа таких систем с точки зрения прикладных задач. В рамках развитого подхода удается построить общий способ вычисления интегралов движения динамических систем, которые строятся с помощью матричных подстановок.

Для вычисления интегралов движения воспользуемся общим тождеством

$$\mathrm{S}p([\hat{A},\hat{B}]) = 0,$$

выполняющимся для любых матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Вычисляя след второго уравнения (4.5) и уравнения связи (2.17), находим, соответственно:

$$\mathrm{S}p(\hat{S}) = 0, \quad \frac{d}{dt}\mathrm{S}p(\hat{S}) = 0. \tag{4.11}$$

Используя тождество

$$[\hat{A}^{n+1},\hat{B}] = \sum_{k=0}^{n}\hat{A}^{k}[\hat{A},\hat{B}]\hat{A}^{n-k}$$

уравнение связи можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}(\hat{S}-\hat{X})^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(\hat{S}-\hat{X})^{k}\left[\frac{d}{dt}\hat{S}\right](\hat{S}-\hat{X})^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\hat{S}-\hat{X})^{k}[\hat{S}-\hat{X},\hat{V}](\hat{S}-\hat{X})^{n-k} = [(\hat{S}-\hat{X})^{n+1},\hat{V}].$$

Вычисляя след этого соотношения, находим:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{S}p[(\hat{S}-\hat{X})^{n+1}] = 0,\ n = 0,1,2,\ldots \qquad (4.12)$$

Отсюда сразу следует:

Утверждение 4.2. Система уравнений (4.10) и (4.6) имеет, в независимости от формы замыкающего уравнения (4.10), интегралы движения:

$$I_n = \mathrm{S}p[(\hat{S}-\hat{X})^{n+1}],\ n = 1,2,\ldots \qquad (4.13)$$

Число независимых интегралов движения вида (4.13) определяется размерностью N алгебры A и не превышает его в силу того, что любая степень матрицы на алгебре A выражается через образующие этой алгебры.

Остальные интегралы движения общей системы (4.10) и (4.6) определяются интегралами замыкающего уравнения (4.10) и фактически являются их образами при замене элементов матрицы $\hat{T}$ элементами матриц $\hat{S}$ и $\hat{V}$ в результате использования подстановок (4.5) .

Замыкающие уравнения вида (4.9) являются линейными. В зависимости от общего порядка системы уравнения (4.9), равного произведению порядка уравнения по t и размерности $\mathrm{d}imA = N$ алгебры A : $D = MN$, решения относительно функций $\tau_k(t)$ выражаются через D линейно-независимых функций $\phi_a, a = 1,\ldots,D$ с помощью их линейных комбинаций с постоянными коэффициентами $A_{k,a}$:

$$\tau_\alpha(t) = \sum_a Q_{\alpha,a}\phi_a(t), \alpha = 1,\ldots,N \qquad (4.14)$$

Коэффициенты $Q_{\alpha,a}$ являются постоянными интегрирования.

Обратим внимание на то, что система соотношений имеет своим следствием следующую систему тождеств:

$$\mathrm{S}p(\hat{A}^{(k,n)}\hat{T}) = \sum_{\alpha=1}^{N}\mathrm{S}p(\hat{A}^{(k,n)}\hat{g}_\alpha)\tau_\alpha = 0,\ n > 0. \qquad (4.15)$$

которые являются следствием общего тождества. Используя (4.14), соотношения (4.15) можно представить в виде

$$\sum_{a=1}^{D}\sum_{\alpha=1}^{N}\mathrm{S}p(\hat{A}^{(k,n)}\hat{g}_\alpha)Q_{\alpha,a}\phi_a(t) = 0,\ n > 0. \qquad (4.16)$$

Эти соотношения означают, что в каждый момент времени векторы $J_{k,n}$ с компонентами

$$J_{k,n}^a = \sum_{\alpha=1}^{N}\mathrm{S}p(\hat{A}^{(k,n)}\hat{g}_\alpha)Q_{\alpha,a} = 0, a = 1,\ldots,D,\ k = 1,2,\ldots,n > 0, \qquad (4.17)$$

ортогональны вектору функций $\phi_a(t)$, т.е. $J_{k,n}$ ортогональны функциональному пространству собственных функций замыкающего уравнения.

4.5 DA-подстановки на алгебре GL_2

В соответствии с работой [43] рассмотрим матричные функции времени $\hat{T}(t)$ в следующем виде:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^{3} \tau_i(t)\sigma_i, \tag{4.18}$$

где $\tau_i(t)$ - функции времени. Для любой пары матриц $\hat{S}$ и $\hat{V}$ из GL_2, имеющих представление $\hat{S} = \sum_{i=0}^{3} s_i(t)\hat{\sigma}_i$ и $\hat{V} = \sum_{i=0}^{3} v_i(t)\hat{\sigma}_i$, выполняются следующие соотношения:

$$\hat{S}\hat{V} = \left(s_0 v_0 + (\mathbf{s},\mathbf{v})\right)\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(s_0 v_\alpha + v_0 s_\alpha + i[\mathbf{s}\times\mathbf{v}]_\alpha\right)\hat{\sigma}_\alpha, \tag{4.19}$$

$$[\hat{S},\hat{V}] = 2i\sum_{\alpha=1}^{3}[\mathbf{s}\times\mathbf{v}]_\alpha\hat{\sigma}_\alpha,$$

Здесь $[\mathbf{s}\times\mathbf{v}]$ - векторное произведение двух векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{v}$ с компонентами $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, а $(\mathbf{s}\times\mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{3} s_\alpha v_\alpha$ - скалярное.

На алгебре GL_2 рассмотрим оператор $\hat{D}_x$, действующий на любую функцию $\hat{P} = \sum_{i=0}^{3} p_i\hat{\sigma}_i$ на этой алгебре по правилу:

$$\hat{D}_x\hat{P} = [\hat{X},\hat{P}] = 2i\sum_{\alpha=1}^{3}[\mathbf{x}\times\mathbf{p}]_\alpha\hat{\sigma}_\alpha, \tag{4.20}$$

где $\hat{X} = \sum_{i=0}^{3} x_i\hat{\sigma}_i$ - некоторый выделенный, не зависящий от времени t, элемент алгебры GL_2.

4.6 DA-подстановки для уравнений Ландау-Лифшица

Введем обозначения:

$$\hat{V} = v_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha\hat{\sigma}_\alpha,\ \hat{S} = s_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} s_\alpha\hat{\sigma}_\alpha.$$

Тогда из (4.11) и свойств матриц Паули $\mathrm{S}p(\hat{\sigma}_\alpha) = 0, \alpha - = 1,2,3$ сразу следует $s_0 = 0$, а уравнение (4.7) приводится к системе уравнений:

$$\mathbf{s}_t + 2i[(\mathbf{s}-\mathbf{x})\times\mathbf{v}] = 0, \quad \dot{s}_0 = 0. \qquad (4.21)$$

В качестве замыкающего уравнения рассмотрим следующее матричное уравнение для функции $\hat{T}$:

$$\hat{T}_t = \hat{P}[\hat{x},[\hat{x},\hat{T}]] + \hat{Q}[\hat{x},\hat{T}] + \hat{U}\hat{T}, \qquad (4.22)$$

В общем случае $\hat{P}(t)$, $\hat{U}(t)$ и $\hat{Q}(t)$ являются матричными функциями t из GL_2 общего вида. В данной работе рассмотрим в качестве матрицы $\hat{P}$ матрицу вида $\hat{P} = p_0(t)\hat{\sigma}_0$, а в качестве матриц $\hat{Q}$ и $\hat{U}$ матрицы общего вида: $\hat{Q} = \sum_{i=0}^{3} q_i(t)\hat{\sigma}_i$, $\hat{U} = \sum_{i=0}^{3} u_i(t)\hat{\sigma}_i$. Функции $q_\alpha(t)$ и $u_\alpha(t)$ являются компонентами векторов $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ и $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$.

Вычислим теперь вид условий, которые накладывает уравнение (4.22) на матрицы $\hat{S}$ и $\hat{V}$. Используя (4.5), находим:

$$\hat{V} = p_0([\hat{X},\hat{S}] + \hat{S}^2) + \hat{Q}\hat{S} + \hat{U}.$$

Вычислим матрицу $\hat{S}^2$, используя соотношения (4.19) :

$$\hat{S}^2 = (\mathbf{s}^2 - s_0^2)\hat{\sigma}_0 + 2s_0\hat{S} = \mathbf{s}^2\hat{\sigma}_0. \qquad (4.23)$$

Подставляя это соотношение в (4.6), получаем матричное уравнение

$$\hat{S}_t - p_0[\hat{S},[\hat{X},\hat{S}]] + [\hat{S},\hat{Q}]\hat{S} + [\hat{S},\hat{U}] = 0. \qquad (4.24)$$

Переходя к векторной форме записи этих уравнений с помощью соотношений (4.19), получаем уравнения следующего вида:

$$\mathbf{s}_t + 4p_0[(\mathbf{s}-\mathbf{x})\times[\mathbf{s}\times\mathbf{x}]] - 2[\mathbf{s}\times[\mathbf{s}\times\mathbf{q}]] - 2[\mathbf{c}\times[\mathbf{s}\times\mathbf{x}]] + [\mathbf{s}\times\mathbf{h}] + \mathbf{g} = 0,$$

где введены обозначения:

$$\mathbf{h} = 2iq_0\mathbf{x} + 2i\mathbf{u} + 2[\mathbf{q}\times\mathbf{x}], \ \mathbf{g} = -2i[\mathbf{x}\times\mathbf{u}].$$

Учитывая (4.23) и вводя обозначение $\mathbf{M} = \mathbf{s} - \mathbf{x}$, преобразуем это уравнение к следующему виду:

$$\mathbf{M_t} = -[\mathbf{M}\times[\mathbf{M}\times\mathbf{h_1}]] - [\mathbf{M},\mathbf{h}]. \qquad (4.25)$$

Здесь

$$\mathbf{h}_1 = 4p_0\mathbf{x} + 2\mathbf{q}.$$

Уравнение (4.25) представляет обобщение уравнений Ландау-Лифшица [85] для магнитного момента m однородного магнетика. Отличие уравнения (4.25) от уравнения Ландау-Лифшица в стандартном представлении состоит в том, что поля $\mathbf{h}$ и $\mathbf{h}_1$ здесь не совпадают. В классическом случае $\mathbf{h} = \gamma\mathbf{H}$ и $\mathbf{h}_1 = \nu\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ - эффективное магнитное поле в магнетике, γ - гиромагнитное отношение, а ν - постоянная, характеризующая релаксацию в среде. В этом случае первое слагаемое в правой части (4.25) представляет собой релаксационное слагаемое.

Для перехода к классической форме уравнений Ландау-Лифшица необходимо потребовать выполнения условий

$$\mathbf{h} = \frac{\gamma}{\nu}\mathbf{h}_1. \tag{4.26}$$

Это соотношение эквивалентно специальному выбору поля $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = -\frac{i\gamma}{\nu}(2p_0\mathbf{x} + \mathbf{q}) + i[\mathbf{q}\times\mathbf{x}] - q_0\mathbf{x}. \tag{4.27}$$

При этом параметры p_0, q_0 и вектор $\mathbf{q}$ могут быть произвольными функциями времени. Вектор x является произвольным постоянным вектором. При выполнении условия (4.26) уравнения (4.25) принимают классическую форму уравнений Ландау-Лифшица. Эффективное магнитное поле $\mathbf{H}$ в магнетике при этом будет иметь такой вид:

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\nu}(2p_0\mathbf{x} + \mathbf{q}). \tag{4.28}$$

Таким образом, имеем:

<u>Утверждение 4.3.</u> Уравнения Ландау-Лифшица

$$\mathbf{M}_t = -\nu[\mathbf{M}\times[\mathbf{M}\times\mathbf{H}]] - \gamma[\mathbf{M}\times\mathbf{H}]. \tag{4.29}$$

относительно компонентов $\mathbf{M}$ матрицы $\hat{M} = \hat{S} - \hat{X}$ для однородного магнетика связаны с линейным матричным уравнением (4.22) относительно матричной функции $\hat{T}$ подстановками (4.5) при выполнении условий (4.27) на элементы матрицы $\hat{U}$ и условия $\hat{P} = p_0(t)\hat{\sigma}_0$ для матрицы $\hat{P}$ произвольной матрицы $\hat{Q}$.

Заметим, что в силу вида соотношений (4.33) они остаются инвариантными относительно выбора вещественной функции $u_0(t)$. Поэтому без ограничения общности в дальнейшем будем полагать $u_0 \equiv 0$.

4.7 Решения уравнения Ландау-Лифшица для однородного магнетика

Построение решений уравнений (4.25) сводится к решению линейной системы уравнений (4.22) относительно компонентов матрицы $\hat{T}$ и к последующему вычислению функций $\mathbf{s}(t)$ из уравнений (4.5). Для построения решения и выяснения смысла соотношений (4.5) обратим внимание на то, что соотношение для матрицы $\hat{S}$ можно записать в виде

$$\hat{S} = (\hat{X}\hat{T} - \hat{T}\hat{X})\hat{T}^{-1} = \hat{X} - \hat{T}\hat{X}\hat{T}^{-1}.$$

Отсюда

$$\hat{M} = \hat{S} - \hat{X} = -\hat{T}\hat{X}\hat{T}^{-1}, \tag{4.30}$$

где $\hat{M} = m_0\hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} M_\alpha\hat{\sigma}_\alpha$ - матричное представление магнитного момента M.

При этом постоянная $m_0 = -x_0$ введена формально для общности. Эту постоянную вместе с x_0 можно полагать равными нулю: $m_0 = -x_0 = 0$. В этом случае имеем:

$$\hat{M}^2 = \hat{T}\hat{X}^2\hat{T}^{-1} = x^2\sigma^0 = const. \tag{4.31}$$

Матрицу $\hat{T}^{-1}$ можно представить таким образом:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{\tau_0^2 - t^2}(\tau_0\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\tau_\alpha\hat{\sigma}_\alpha). \tag{4.32}$$

Используя (4.32), из соотношения (4.30) находим:

$$\mathbf{M} = -\frac{2i\tau_0}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2}[\mathbf{t}\times\mathbf{x}] - \mathbf{x}\frac{\tau_0^2 + \mathbf{t}^2}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2} - \frac{2(\mathbf{t},\mathbf{x})}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2}\mathbf{t}. \tag{4.33}$$

Здесь $\mathbf{t} = (\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t))$.

Система (4.22) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Таким образом, система **нелинейных** уравнений Ландау-Лифшица сводится с помощью рассмотренного метода матричных подстановок к системе **линейных** дифференциальных уравнений первого порядка, что позволяет применить методы, развитые для линейных уравнений, к анализу динамики магнитного момента во внешнем магнитном поле, в том числе и переменном.

Поскольку магнитный момент является вещественной величиной, то интерес представляют такие решения системы (4.22), для которых вектор M в (4.33) является вещественным. Наиболее простая возможность получить такие решения состоит в следующем выборе произвольных функций и параметров:

$$Im\{x_0\} = 0,\ Im\{x\} = 0,\ Im\{q\} = 0,\ Im\{p_0\} = 0,\ \ Re\{\tau_0\} = 0,\ Re\{u\} = 0,\ Re\{q_0\} = 0.$$

Полагая $u = iw(t), q_0 = ir_0(t), \tau_0 = i\chi_0(t), \mu = \gamma/\nu$, где w, r_0, χ_0, μ - вещественные функции, приходим к записи уравнений и решений, не содержащих мнимой единицы.

Следовательно, доказано:

Утверждение 4.4. Вещественные решения уравнений Ландау-Лифшица (4.29) могут быть представлены в следующей общей форме:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta_0}\left(-2\chi_0[\mathbf{t}\times\mathbf{x}] + \mathbf{x}(\mathbf{t}^2 - \chi_0^2) + 2(\mathbf{t},\mathbf{x})\mathbf{t}\right), \tag{4.34}$$

$$\mathbf{t} = -[\mathbf{h_1}\times[\mathbf{x}\times\mathbf{t}]] - [(2r_0\mathbf{x} + \mathbf{w})\times\mathbf{t}] - \chi_0\mathbf{w}, \tag{4.35}$$

$$\dot{\chi}_0 = 2(\mathbf{q},[\mathbf{x}\times\mathbf{t}]) + (\mathbf{w},\mathbf{t}), \tag{4.36}$$

$$\mathbf{w} = -\mu(2p_0\mathbf{x} + \mathbf{q}) + [\mathbf{q}\times\mathbf{x}] - r_0\mathbf{x}. \tag{4.37}$$

Здесь $\Delta_0 = \chi_0^2 + \mathbf{t}^2$.

4.8 Пример циркулярно поляризованного поля

Одной из задач, которая рассматривается в рамках теории магнетиков, построенной на уравнениях Ландау-Лифшица, является задача о магнитном резонансе [15, 16, 81, 94]. Рассмотрим в качестве примера задачу о динамике намагниченности в переменном эффективном магнитном поле, которое часто встречается на практике (см. [94] и библиографию там). Будем полагать

$$\mathbf{x} = \eta(0,0,1),\ \mathbf{q} = \xi(t)(\cos(\psi(t)), \sin(\psi(t)), 0),$$

где $\psi(t)$ и $\xi(t)$ - вещественные функции. При таком выборе параметров эффективное магнитное поле будет иметь вид:

$$\mathbf{H} = \frac{2}{\nu}\xi(t)(\cos(\psi(t))\mathbf{e}_x + \sin(\psi(t))\mathbf{e}_y) + \frac{4p_0(t)}{\nu}\eta\mathbf{e}_z = H_x\mathbf{e}_x + H_y\mathbf{e}_y + H_z\mathbf{e}_z, \tag{4.38}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - орты декартовой системы координат,

$$H_x = H_0(t)\cos\phi(t), H_y = H_0(t)\sin\phi(t), H_z = \frac{4\eta}{\nu}p_0(t),$$

$H_0 = 2\xi(t)/\nu$. В силу произвольности функций $\xi(t), \psi(t)$ и $p_0(t)$ компоненты эффективного поля являются произвольными функциями времени. Поскольку поле H не зависит от $r_0(t)$, то эта функция не влияет на окончательный результат и ее можно выбрать равной нулю: $r_0 = 0$.

Уравнения (4.25) содержат три постоянных ν, γ и $M_0 = \sqrt{\mathbf{M}^2} = \eta$ (4.31), которые определяют функциональный вид решений при заданном внешнем поле $\mathbf{H}$. В силу этого в параметризации решений некоторые вспомогательные функции особой роли не играют и могут выбираться произвольно. В частности, удобно положить $q_0(t) = i\mu p_0(t)$. В этом случае, вводя обозначения $\theta_1(t) = \exp(i\psi(t))((\tau_1(t) + i\tau_2(t))$ и $\theta_2(t) = \tau_3(t) + i\chi_0(t)$, после простых преобразований систему уравнений можно записать в следующем виде:

$$\dot{\theta}_1 = A_1\theta_1 + B_1\theta_2, \qquad \dot{\theta}_2 = A_2\theta_1 + B_2\theta_2. \tag{4.39}$$

Здесь $A_1 = k_0 H_z \nu/2 - i\Omega$, $B_1 = H_0\nu k_0^*/2$, $A_2 = -H_0\nu(2\eta + k_0)/2$, $B_2 = -i\gamma H_z$, $\Omega = \dot{\psi}$, $k_0 = 2\eta + i\mu$.

В простейшем случае, если коэффициенты системы (4.39) являются постоянными, то решение можно искать в виде

$$\theta_1 = ae^{\lambda t},\ \theta_2 = be^{\lambda t}.$$

В результате приходим к алгебраической системе для комплексных коэффициентов a, b с условием совместности:

$$\lambda^2 - 2(\omega_1 + i\omega_2)\lambda + k_1 + ik_2 = 0. \tag{4.40}$$

Здесь $\omega_1, \omega_2, k_1, k_2$ - вещественные параметры, имеющие вид:

$$\omega_1 + i\omega_2 = (A_1 + B_2)/2,\ k_1 + ik_2 = A_1B_2 - B_1A_2.$$

Уравнение (4.40) имеет два комплексных корня λ_+ и λ_-. Соответствующие им комплексные амплитуды $a_\pm$ при произвольных $b_\pm$ имеют вид:

$$a_\pm = \frac{\nu H_0 k_0^*}{2(\lambda_\pm - A_1)} b_\pm.$$

В результате имеем:

$$\theta_1 = \tau_1 + i\tau_2 = e^{i\Omega t}\left(a_+ e^{\lambda_+ t} + a_- e^{\lambda_- t}\right), \tag{4.41}$$

$$\theta_2 = \tau_3 + i\chi_0 = \left(b_+ e^{\lambda_+ t} + b_- e^{\lambda_- t}\right). \tag{4.42}$$

Точное решение (4.34) для вектора полной намагниченности M для рассматриваемого случая можно представить в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} + N(t)\mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{m} = m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y$ - вектор, интерпретируемый как намагниченность, вызванная внешним полем. Этот вектор ортогонален вектору постоянного поля подмагничивания $\mathbf{h}_0 = (4\eta p_0 / \nu)\mathbf{e}_z$. Такое представление позволяет сравнивать результаты работ, в которых применялись методы теории возмущений с данным точным решением, которое для вектора m можно записать так:

$$m_x = 2\eta(\tau_1\tau_3 - \chi_0\tau_2)/\Delta_0, \; m_y = 2\eta(\tau_2\tau_3 + \chi_0\tau_1)/\Delta_0. \tag{4.43}$$

Вдоль вектора подмагничивания h_0 полная намагниченность изменяется со временем по закону

$$N(t) = (2\tau_3^2(t) + \mathbf{t}^2 - \chi_0^2)/\Delta_0. \tag{4.44}$$

Соотношения (4.43) и (4.44) дают точное решение задачи о динамике магнитного момента во внешнем циркулярно поляризованном магнитном поле. Эти решения сводятся к системе уравнений с постоянными коэффициентами, что позволяет в нелинейном варианте исследовать явление резонанса в такой системе. Аналогичные решения могут быть построены и для внешних полей с произвольной функциональной зависимостью от времени с помощью решения вспомогательной линейной задачи (4.22) или в частном случае (4.39). Это позволяет решать общие задачи в теории однородных магнетиков.

5 Подстановки для моделей на сетках

5.1 Различные типы дифференцирования на сетке

Важным с точки зрения приложений примером являются нелинейные задачи, связанные с уравнениями на дискретных сетках, или сеточные уравнения. Такие уравнения чаще всего рассматриваются в качестве приближенных моделей для уравнений, представленных в форме частных производных относительно непрерывных функций. Для численного анализа нелинейных уравнений в частных производных прибегают к замене в них частных производных на разностные производные. Аналогичные сеточные уравнения появляются и другими способами, например, с помощью конечных элементов. Дискретные уравнения используются также в молекулярной динамике, в которой конденсированную среду представляют цепочками или решетками атомов и молекул, взаимодействующих между собой. Еще одним примером использования сеточных уравнений являются задачи построения моделей обработки экспериментальных данных. В этих случаях в качестве функционального пространства рассматриваются множества базовых функций $T_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$, заданных в узлах некоторой сетки на n - мерном вещественном пространстве R^n. Простейший случай соответствует двумерному пространству R^2. Именно этот случай и будет рассмотрен в данной главе.

5.1.1 Сдвиговая производная

Рассмотрим матричные функции $T_{i,j}$, заданные на прямоугольной сетке с узлами, нумеруемыми индексами i, j, расположенными в двумерном вещественном пространстве R^2. Первый индекс относится к пространственной координате x, а второй - ко времени t. Шаг сетки для этих производных не важен.

Назовем сдвиговой левой производной функции $\hat{T}_{i,j}$ по координате x функцию $\overset{+}{D}_x\hat{T}_{i,j}$, определенную соотношением

$$\overset{+}{D}_x T_{i,j} = T_{i+1,j}, \tag{5.1}$$

правой сдвиговой производной - функцию $\overset{-}{D}_x\hat{T}_{i,j}$:

$$\overset{-}{D}_x T_{i,j} = T_{i-1,j}, \tag{5.2}$$

Аналогично сдвиговыми левой и правой производными функции T_{ij} по времени назовем функции $\overset{\pm}{D_t} T_{i,j}$, определенные соотношениями

$$\overset{\pm}{D_t} T_{i,j} = T_{i,j\pm 1}. \tag{5.3}$$

Как нетрудно проверить прямыми вычислениями, определенные таким образом производные перестановочны. Например:

$$\overset{+}{D_x}\overset{+}{D_t} T_{i,j} - \overset{+}{D_t}\overset{+}{D_x} T_{i,j} = T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j+1} = 0,$$

и для них выполняются обобщенные правила Лейбница:

$$\overset{+}{D_x}(U_{i,j}V_{i,j}) = U_{i+1,j}V_{i+1,j} = \overset{+}{D_x}U_{i,j}\,\overset{+}{D_x}V_{i,j}, \tag{5.4}$$

$$\overset{+}{D_t}(U_{i,j}V_{i,j}) = U_{i,j+1}V_{i,j+1} = \overset{+}{D_t}U_{i,j}\,\overset{+}{D_t}V_{i,j}.$$

Поэтому совместность базовых соотношений

$$\overset{+}{D_x} T_{i,j} = T_{i+i,j} = A_{i,j}T_{i,j},\ \ \overset{+}{D_t} T_{i,j} = T_{i,j+1} = B_{i,j}T_{i,j}, \tag{5.5}$$

приводит к соотношению совместности:

$$\overset{+}{D_x}(B_{i,j}T_{i,j}) - \overset{+}{D_t}(A_{i,j}T_{i,j}) = (B_{i+1,j}A_{i,j} - A_{i,j+1}B_{i,j})T_{i,j} = 0$$

Отсюда находим связь между $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$ следующего вида:

$$B_{i+1,j}A_{i,j} - A_{i,j+1}B_{i,j} = 0. \tag{5.6}$$

или

$$A_{i,j}\overset{+}{D_x}B_{i,j} - B_{i,j}\overset{+}{D_t}A_{i,j} = 0. \tag{5.7}$$

5.1.2 Конечные разности или h-производные

В качестве второго типа дифференцирования рассмотрим для определенности левые разностные производные. Правые рассматриваются аналогично. Левые разностные производные по координатам x и t определяются соотношениями

$$\hat{D}_x T_{i,j} = \frac{1}{h_x}(T_{i+1,j} - T_{i,j}),\ \ \hat{D}_t T_{i,j} = \frac{1}{h_t}(T_{i,j+1} - T_{i,j}). \tag{5.8}$$

Здесь h_x и h_t - шаги сетки в каждом из направлений. Для определенных таким способом производных выполняется условие перестановочности

$$(\hat{D}_t\hat{D}_x - \hat{D}_x\hat{D}_t)T_{i,j} = \frac{1}{h_x h_t}(T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j} - T_{i,j+i} + T_{i,j}) - \frac{1}{h_x h_t}(T_{i+1,j+1} - T_{i,j+1} - T_{i+1,j} + T_{i,j}) = 0,$$

а обобщенное правило Лейбница будет иметь такой вид:

$$\hat{D}_x(U_{i,j}V_{i,j}) = \frac{1}{h_x}(U_{i+1,j}V_{i+1,j} - U_{i,j}V_{i,j}) =$$

$$= \frac{1}{h_x}\Big([U_{i+1,j} - U_{i,j}]V_{i+1,j} + U_{i,j}[V_{i+1,j} - V_{i,j})\Big) =$$

$$= \frac{1}{h_x}\Big([U_{i+1,j} - U_{i,j}]V_{i,j} + U_{i,j}[V_{i+1,j} - V_{i,j}] + [U_{i+1,j} - U_{i,j}][V_{i+1,j} - V_{i,j}]\Big) =$$

$$= V_{i,j}\hat{D}_x U_{i,j} + U_{i,j}\hat{D}_x V_{i,j} + h_x(\hat{D}_x V_{i,j})(\hat{D}_x U_{i,j}). \qquad (5.9)$$

Аналогично для производной по t:

$$\hat{D}_t(U_{i,j}V_{i,j}) = \frac{1}{h_x}(U_{i,j+1}V_{i,j+1} - U_{i,j}V_{i,j}) =$$

$$= V_{i,j}\hat{D}_t U_{i,j} + U_{i,j}\hat{D}_t V_{i,j} + h_t(\hat{D}_t V_{i,j})(\hat{D}_t U_{i,j}). \qquad (5.10)$$

Условие совместности базовых соотношений

$$\hat{D}_x T_{i,j} = \frac{1}{h_x}(T_{i+1,j} - T_{i,j}) = A_{i,j}T_{i,j},\ \hat{D}_t T_{i,j} = \frac{1}{h_t}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) = B_{i,j}T_{i,j}.$$

принимает в этом случае такой вид:

$$D_x(B_{i,j}T_{i,j}) - D_t(A_{i,j}T_{i,j}) = \frac{1}{h_x}(B_{i+1,j}T_{i+1,j} - B_{i,j}T_{i,j}) - \frac{1}{h_t}(A_{i,j+1}T_{i,j+1} - A_{i,j}T_{i,j}) =$$

$$= \left(B_{i+1,j}A_{i,j} + \frac{1}{h_x}(B_{i+1,j} - B_{i,j})) - A_{i,j+1}B_{i,j} + \frac{1}{h_t}(A_{i,j+1} - A_{i,j})\right)T_{i,j}$$

Отсюда имеем:

$$(1 + h_x A_{i,j})D_x B_{i,j} - (1 + h_t B_{i,j})D_t A_{i,j} = 0. \qquad (5.11)$$

5.2 Замечание о центральных разностях

Центральные разности используются для приближения первых непрерывных производных на сетках с целью увеличения точности приближения. Центральная разностная производная для основной функции может быть записана в следующем виде:

$$D_C\hat{T}_i = \frac{1}{2h}(T_{i+1} - T_{i-1}). \qquad (5.12)$$

Можно проверить, что для данной разностной производной правило Лейбница в подходящей для использования в МФП форме не выполняется. Действительно, имеем:

$$D_C(A_i T_i) = \frac{1}{2h}(A_{i+1}T_{i+1} - A_{i-1}T_{i-1}) =$$

$$= \frac{1}{2h}((A_{i+1} - A_{i-1})T_{i+1} - A_{i-1}(T_{i+1} - T_{i-1})) = (D_C A_i)T_{i+1} - A_{i-1}D_C T_i.$$

Видно, что в правую часть правила Лейбница входит значение T_{i+1}, которое берется со следующего шага по отношению к узлу сетки с номером i. Это означает, что при записи правила Лейбница необходимо использовать правую и левую разности, которые по сути и образуют центральную разность. Отсюда можно сделать вывод, что операторы правой и левой разностных производных независимы и должны использоваться наравне друг с другом при необходимости записать разностные уравнения общего вида.

Для реализации центральной разности введем два оператора:

$$D_L\hat{T}_i = \frac{1}{h}(T_{i+1} - T_i) = \frac{1}{h}(\overset{+}{D_x} - 1)T_i,\ D_R\hat{T}_i = \frac{1}{h}(T_i - T_{i-1}) = -\frac{1}{h}(\overset{-}{D_x} - 1)T_i. \tag{5.13}$$

В результате имеем

$$D_C\hat{T}_i = \frac{1}{2}(D_L + D_R)T_i = \frac{1}{h}(\overset{+}{D_x} - \overset{-}{D_x})T_i.$$

Поскольку правая и левая производные подчиняются правилу Лейбница в подходящей форме, то для центральной разности нет необходимости специально проверять выполнение правил Лейбница. Однако при этом необходимо включать в базовую схему правую и левую производные как независимые, но коммутирующие между собой операторы. Кроме этого, из соотношений (5.13) следует, что при анализе уравнений между сдвиговой разностной производной особой разницы нет, особенно в случае, если вспомогательные уравнения содержат левую и правую производные. Поэтому в дальнейшем в таких случаях будем ограничиваться рассмотрением только сдвиговых производных, указывая при необходимости возникающие в уравнениях отличия.

5.3 Сеточное уравнение Бюргерса

Рассмотрим теперь процедуру применения МФП для построения нелинейных уравнений со сдвиговыми производными. В качестве примера рассмотрим вспомогательное сеточное уравнение следующего вида:

$$(D_x)^2 T_{i,j} - D_t T_{i,j} = 0. \tag{5.14}$$

Это уравнение является сеточным аналогом уравнения теплопроводности. Явный его вид для разных типов производных отличается. Для случая сдвиговой производной оно имеет следующий явный вид:

$$T_{i+2,j} - T_{i,j+1} = 0,$$

а для h-производной - следующий:

$$T_{i+2,j} - 2T_{i+1,j} + T_{i,j} - \frac{h_x^2}{h_t}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) = 0.$$

Построим интегрируемые аналоги нелинейного уравнения (5.14), которое соответствует сеточному уравнению теплопроводности для обоих типов производных. Для сдвиговой производной уравнение (5.14) приводится к следующему виду:

$$A_{i+1,j}A_{i,j}=B_{i,j},$$

или

$$B_{i,j}=A_{i,j}D_xA_{i,j}.$$

Подставляя последнее соотношение в (5.7), приходим к следующему сеточному аналогу уравнения Бюргерса:

$$\overset{2}{D_x}A_{i,j}-A_{i,j}D_tA_{i,j}=0.$$

В явном виде это уравнение оказывается линейным и выглядит следующим образом:

$$A_{i+2,j}=A_{i,j+1}.$$

Аналогично для h-производной, используя базовые соотношения (5.5), приводим уравнение (5.14) к такой форме:

$$D_x(A_{i,j}T_{i,j})-B_{i,j}T_{i,j}=\frac{1}{h_x}(A_{i+1,j}T_{i+1,j}-A_{i,j}T_{i,j})-B_{i,j}T_{i,j}=$$

$$=(D_xA_{i,j}+(A_{i,j})^2-B_{i,j})T_{i,j}$$

или

$$D_xA_{i,j}+(A_{i,j})^2-B_{i,j}=0.$$

Исключая из условия связи (5.6) с помощью последнего соотношения $B_{i,j}$, находим уравнение для сеточной функции $A_{i,j}$:

$$(1+h_xA_{i,j})[(D_x)^2A_{i,j}+D_x(A_{i,j}^2)]-(1+h_tD_xA_{i,j}+A_{i,j}^2)D_tA_{i,j}=0,$$

которое является сеточным аналогом уравнения Бюргерса с h-производными.

5.4 Сеточные аналоги для эволюционных уравнений со сдвиговой производной

Рассмотрим теперь в качестве вспомогательных уравнений уравнения следующего общего вида:

$$(D_x)^nT_{i,j}=D_tT_{i,j}, \tag{5.15}$$

где n - некоторое целое число. Анализ нелинейных уравнений, которые строятся с помощью МФП для этого типа уравнений, будем проводить только для сдвиговой производной. В этом случае уравнения (5.15) эквивалентны следующим сеточным уравнениям:

$$T_{i+n,j}=T_{i,j+1}.$$

При заданном начальном условии $T_{i,0}=\tau_i$ решениями этого уравнения являются сеточные функции следующего вида:

$$T_{i,j} = \tau_{i+nj}.$$

Это уравнение эквивалентно следующей связи между функциями $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$:

$$A_{i+n-1,j}A_{i+n-2,j}\cdots A_{i,j} = \prod_{k=0}^{n-1} A_{i+k} = B_{i,j}.$$

Подставляя это уравнение в соотношение (5.7), приходим опять к линейному уравнению

$$A_{i+n,j} = A_{i,j+1}.$$

Решением этого уравнения является сеточная функция

$$A_{i,j} = \frac{T_{i+1,j}}{T_{i,j}} = \frac{\tau_{i+1+nj}}{\tau_{i+nj}}.$$

Рассмотрим более общее вспомогательное линейное эволюционное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \overset{k}{D_x} T_{i,j} = D_t T_{i,j}. \tag{5.16}$$

Решением этого уравнения при заданном начальном условии

$$T_{i,0} = \tau_i,$$

будет следующая сеточная функция:

$$T_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} C_k \tau_{i+kj}.$$

Вспомогательное уравнение (5.16) приводится к следующему уравнению связи между $A_{i,j}$ и $B_{i,j}$:

$$B_{i,j} = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p,j}.$$

Вновь подставляя последнее соотношение в уравнение связи (5.7), приходим к нелинейному уравнению относительно $A_{i,j}$:

$$A_{i,j}(C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p+1,j}) = A_{i,j+1}(C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p+1,j}).$$

В частности, при $n = 3$ последнее уравнение имеет такой вид:

$$A_{i,j}\left(C_0 + (C_1 + C_2 A_{i+2,j} + C_3 A_{i+3,j} A_{i+2,j}) A_{i+1,j}\right) = A_{i,j+1}\left(C_0 + (C_1 + C_2 A_{i+1,j} + C_3 A_{i+2,j} A_{i+1,j}) A_{i,j}\right).$$

Для h-производных можно получить аналогичные соотношения, однако они будут более громоздкими. В силу этого такие соотношения здесь не приводятся.

5.5 Уравнения в смешанных производных

Рассмотренные выше уравнения содержали сеточные производные по обеим координатам. В прикладных задачах, в частности молекулярной динамики, важную роль играют уравнения, когда время является непрерывным, а пространство - дискретным. Такие уравнения будем в дальнейшем называть уравнениями со смешанными производными.

Рассмотрим базовые соотношения в такой форме:

$$\overset{+}{D_x}\Phi_i = A_i(t)\Phi_i,\ \overset{-}{D_x}\Phi_i = B_i(t)\Phi_i,\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi_i = C_i(t)\Phi_i, \tag{5.17}$$

для значений Φ_i в поле вещественных чисел:

$$\overset{+}{D_x}\hat{\Phi}_i = \hat{A}_i\hat{\Phi}_i,\ \overset{-}{D_x}\hat{\Phi}_i = \hat{B}_i\hat{\Phi}_i,\ \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}_i = \hat{C}_i\hat{\Phi}_i, \tag{5.18}$$

в случае, если $\hat{\Phi}_i(t)$ - матричная функция размерности $N \times N$.

Можно проверить, что операторы D_x и непрерывная производная по t коммутируют между собой как для случая сдвиговой производной, так и для конечных разностей. Например, для сдвиговой производной имеем:

$$(D_x\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}D_x)\Phi_i = \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial t} \equiv 0,$$

аналогично и для h-производной. Исходя из этого, находим условия связи между базовыми функциями A_i и B_i:

$$(\overset{+}{D_x}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}D_x)\Phi_i = D_x(C_i\Phi_i) - \frac{\partial}{\partial t}(A_i\Phi_i) =$$

$$= B_{i+1}\Phi_{i+1} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\Phi_i - A_i\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = ((C_{i+1} - C_i)A_i - \frac{\partial A_i}{\partial t})\Phi_i = 0,$$

или окончательно:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = (C_{i+1} - C_i)A_i. \tag{5.19}$$

По аналогии имеем следующее соотношение для обратных сдвигов:

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = (C_{i-1} - C_i)B_i. \tag{5.20}$$

В матричном случае это соотношение выглядит так:

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial t} = \hat{C}_{i+1}\hat{A}_i - \hat{A}_i\hat{C}_i,\ \ \frac{\partial \hat{B}_i}{\partial t} = \hat{C}_{i-1}\hat{B}_i - \hat{B}_i\hat{C}_i. \tag{5.21}$$

Для h-производных имеем соотношения следующего вида:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{1}{h_x}(C_{i+1} - C_i)(h_x A_i + 1),$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \frac{1}{h_x}(C_{i-1} - C_i)(-h_x B_i + 1), \tag{5.22}$$

и, соответственно, для матричного случая:

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial t} = \hat{C}_{i+1}\hat{A}_i - \hat{A}_i\hat{C}_i + \frac{1}{h_x}(\hat{C}_{i+1} - \hat{C}_i),$$

$$\frac{\partial \hat{B}_i}{\partial t} = \hat{C}_{i-1}\hat{B}_i - \hat{B}_i\hat{C}_i + \frac{1}{h_x}(\hat{C}_{i-1} - \hat{C}_i). \tag{5.23}$$

5.6 Рекуррентные соотношения

Поскольку базовые соотношения и соотношения связи между функциями A_i и B_i выполняются для любой функции Φ_i, то имеется возможность установить вид ограничений, которые возникают, когда функции $\Phi_i(t)$ выбираются из множества решений некоторого конкретного интегрируемого уравнения. Для вычисления старших производных, которые могут содержать вспомогательные уравнения по обеим переменным, полезно воспользоваться рекуррентными соотношениями, вытекающими непосредственно из базовых соотношений. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \overset{k}{D_x} \hat{\Phi}_i = \hat{A}_i^{[k,m]}(t)\hat{\Phi}_i. \tag{5.24}$$

Тогда по аналогии с обычными производными функции $\hat{A}_i^{[k,m]}(t)$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений следующего вида:

$$\hat{A}_i^{[k+1,m]} = \hat{A}_{i+1}^{[k,m]}\hat{A}_i,\ \hat{A}_i^{[k,m+1]} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_i^{[k,m]} + \hat{A}_i^{[k,m]}\hat{B}_i, \tag{5.25}$$
$$\hat{A}_i^{[1,0]} = \hat{A}_i,\ \hat{A}_i^{[0,1]} = \hat{B}_i,\ k = 0,1,2\ldots,\ m = 0,1,2,\ldots.$$

Аналогичные соотношения имеют место для s-производных и в матричном случае. Заметим, что и в скалярном, и в матричном случаях первое рекуррентное соотношение приводит к следующему представлению для $\hat{A}_i^{[k+1,0]}$:

$$\hat{A}_i^{[k+1,0]} = \prod_{j=0}^{k}\hat{A}_{i+j} = \hat{A}_{i+k}\hat{A}_{i+k-1}\cdots\hat{A}_i. \tag{5.26}$$

Для случая h-производных аналогичные (5.25) рекуррентные соотношения имеют такой вид:

$$\hat{A}_i^{[k+1,m]} = \hat{A}_{i+1}^{[k,m]}\hat{A}_i + \frac{1}{h_x}(\hat{A}_{i+1}^{[k,m]} - \hat{A}_i^{[k,m]}),$$
$$\hat{A}_i^{[k,m+1]} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_i^{[k,m]} + \hat{A}_i^{[k,m]}\hat{B}_i, \tag{5.27}$$
$$\hat{A}_i^{[1,0]} = \hat{A}_i,\ \hat{A}_i^{[0,1]} = \hat{B}_i,\ k = 0,1,2\ldots,\ m = 0,1,2,\ldots.$$

5.7 Вычисление уравнений нелинейных цепочек

В качестве вспомогательного уравнения для основной функции Φ_i рассмотрим линейное уравнение следующего общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i = \sum_{k=0}^{n} M_k \overset{k}{D_x}\Phi_i, \tag{5.28}$$

где n - натуральное число, $M_k(t)$ - в общем случае функции времени, а под

D_x понимается производная одного типа - либо левая, либо правая. Уравнения такого типа являются аналогом линейных эволюционных уравнений в частных производных. Введем бесконечный вектор $\mathbf{U} = \{\ldots, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots\}$ и бесконечную матрицу M со строками, содержащими одинаковые элементы $M_i, i = 0,\ldots,n$, но сдвинутыми на 1 вправо. В результате (5.28) можно записать в общем виде так:

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{MU}. \tag{5.29}$$

Используя базовые соотношения (5.17) и (5.26) для левой и правой s-производных, уравнение (5.28) приводится к вспомогательным уравнениям связи:

$$(\overset{+}{D_x}):\quad C_i = M_0 + \sum_{k=1}^{n} M_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p}, \qquad (\overset{-}{D_x}):\quad C_i = M_0 + \sum_{k=1}^{n} M_k \prod_{p=0}^{k-1} B_{i-p}. \tag{5.30}$$

Подставляя C_i из этого соотношения в уравнение связи (5.19), приходим к уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln A_i = \sum_{k=1}^{n} M_k (A_{i+k} - A_i) \prod_{p=1}^{k-1} A_{i+p}. \tag{5.31}$$

В частности, для $n = 1,2,3$ имеем такое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln A_i = M_1(A_{i+1} - A_i) + M_2(A_{i+2} - A_i)A_{i+1} + M_3(A_{i+3} - A_i)A_{i+2}A_{i+1}. \tag{5.32}$$

В случае левой h-производной аналогом уравнения (5.31) является следующее соотношение:

$$C_i = M_0 + \sum_{k=1}^{n} M_k A_i^{[k,0]}. \tag{5.33}$$

Эти соотношения необходимо теперь подставить в (5.23), в результате чего получаем общее соотношение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i = (h_x A_i + 1) \sum_{k=1}^{n} M_k (A_{i+1}^{[k,0]} - A_i^{[k,0]}). \tag{5.34}$$

Ограничимся тем, что приведем явные выражения уравнения (5.34) для случая $n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i = (h_x A_i + 1)\big(K_1(A_{i+1} - A_i) + K_2(A_{i+2} - A_i)(h_x A_{i+1} + 1)\big), \tag{5.35}$$

где $K_1 = M_1 - 2M_2 / h_x$ и $K_2 = M_2 / h_x$. При $n > 2$ форма уравнения вычисляется с помощью рекуррентных соотношений (5.28), однако результат имеет громоздкую форму. Аналогичные уравнения имеют место и для правой h-производной. Как видно, уравнения для h-производных можно без труда привести к такому же виду, что и для s-производных.

Структура уравнений (5.31) и (5.34) подсказывает, что эти уравнения можно привести к форме, подобной цепочкам Тоды, с помощью экспоненциальных подстановок $A_i = e^{\phi_i}$ для D_+ и $A_i = (e^{\phi_i} - 1)/h_x$. В этом случае уравнения (5.31) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_i = \sum_{k=1}^{n} M_k (e^{\phi_{i+k}} - e^{\phi_i}) \exp\left\{\sum_{p=1}^{k-1}\phi_{i+p}\right\} = R_{i+1}e^{\phi_{i+1}} - R_i e^{\phi_i}, \qquad (5.36)$$

где

$$R_i = M_1 + \sum_{k=2}^{n} M_k \exp\left\{\sum_{p=1}^{k-1}\phi_{i+p}\right\}.$$

В частном случае (5.32) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_i = M_1(e^{\phi_{i+1}} - e^{\phi_i}) + M_2(e^{\phi_{i+2}} - e^{\phi_i})e^{\phi_{i+1}} + M_3(e^{\phi_{i+3}} - e^{\phi_i})e^{\phi_{i+2}+\phi_{i+1}}. \qquad (5.37)$$

Аналогичные уравнения возникают и в случае использования D_L. В отличие от цепочек Тоды данные уравнения имеют первый порядок по времени и требуют отдельной интерпретации.

Отметим также одно важное обстоятельство, полезное для возможности строить решения неоднородных уравнений. Такие уравнения можно получить, если во вспомогательные уравнения включить слагаемые вида $L_i(t)\Phi_i$, где $L_i(t)$ - некоторые заданные функции. В качестве примера рассмотрим вспомогательные уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_i = \sum_{k=1}^{n} M_k \overset{k}{D_x}\Phi_i + L_i\Phi_i, \qquad (5.38)$$

где сохранены старые обозначения. Используя базовые соотношения для случая левой производной, получаем уравнения

$$C_i = M_0 + \sum_{k=1}^{n} M_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p} + L_i. \qquad (5.39)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения связи, приходим к следующей цепочке уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_i = R_{i+1}e^{\phi_{i+1}} - R_i e^{\phi_i} + I_i, \qquad (5.40)$$

где $I_i = L_{i+1} - L_i$. Возможность строить решения уравнений такого типа связана с возможностью точно решать вспомогательные уравнения (5.38). Описание процедуры построения вспомогательных уравнений будет приведено далее.

5.8 Уравнения с правой и левой производными первого порядка

Рассмотрим особый случай вспомогательных уравнений, содержащих левую и правую s-производные. Полная система уравнений связи между коэффициентами базовых соотношений A_i, B_i, C_i имеет такой вид:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = A_i(C_{i+1} - C_i),$$
$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = -B_i(C_i - C_{i-1}), \qquad (5.41)$$
$$B_{i+1}A_i - A_{i-1}B_i = 0.$$

Последнее соотношение является условием коммутативности левой и правой s-производных. Введем вместо A_i и B_i новые функции в соответствии с правилами

$$A_i = e^{\psi_i},\ B_i = e^{\phi_i}. \qquad (5.42)$$

Тогда совокупность уравнений связи (5.42) примет такой вид:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = C_{i+1} - C_i,\ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -(C_i - C_{i-1}),\ \phi_{i+1} + \psi_i = \psi_{i-1} + \phi_i. \qquad (5.43)$$

Из первых двух уравнений находим:

$$\psi_i + \phi_{i+1} = v_i,\ \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0. \qquad (5.44)$$

Третье уравнение системы (5.42) преобразуется к соотношению

$$v_i = v_{i-1},$$

откуда следует, что для всех i : $v_i = v_0 = const$, где v_0 - произвольное вещественное число.

Рассмотрим теперь вспомогательное уравнение следующего общего вида:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = (M D_+ + N D_- + L_i)\Phi_i, \qquad (5.45)$$

где M , N и L_i - некоторые независящие от t числа. Используя базовые соотношения (5.42) и соотношения (5.42) и (5.44), преобразуем уравнение (5.45) к форме связи базовых коэффициентов:

$$C_i = MA_i + NB_i = Me^{\psi_i} + Ne^{\phi_i} + L_i. \qquad (5.46)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (5.43) и используя (5.44) , находим:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = M(e^{\psi_{i+1}} - e^{\psi_i}) + Me^{v_0}(e^{-\psi_i} - e^{-\psi_{i-1}}) + I_i, \qquad (5.47)$$

где, как и раньше, $I_i = L_{i+1} - L_i$.

Рассмотрим теперь дополнительно уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = (M D_+^2 + N D_-^2)\Phi_i = M\Phi_{i+2} + N\Phi_{i-2} + L_i\Phi_i, \qquad (5.48)$$

где M и N - также некоторые постоянные. В этом случае для функций $C_i(t)$ получаем с учетом (5.44) следующие соотношения:

$$C_i = Me^{\psi_{i+1}+\psi_i} + Ne^{\phi_{i-1}+\phi_i} = Me^{\psi_{i+1}+\psi_i} + Ne^{2v_0}e^{-\psi_{i-2}-\psi_{i-1}} + L_i.$$

Введем для удобства следующие обозначения $u_i = \psi_{i+1} + \psi_i$, тогда уравнения для этой функции примут вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = M(e^{u_{i+2}} - e^{u_i}) + Ne^{2v_0}(e^{-u_{i-1}} - e^{-u_{i-2}}) + I_i. \qquad (5.49)$$

Очевидно, что частные случаи, соответствующие только левой или правой производной во вспомогательных уравнениях, можно получить, полагая либо $M = 0$, либо $N = 0$. В более общем случае вспомогательные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \sum_{k=0}^{n}(M_k D_+ + N_k D_-)\Phi_i = \sum_{k=0}^{n}(M_k \Phi_{i+k} + N_k \Phi_{i-k}) + L_i \Phi_i. \qquad (5.50)$$

5.9 Циклические цепочки

Отдельный класс цепочек, связанных со сдвиговыми производными, возникает, если дополнительно потребовать, чтобы после конечного числа сдвигов базовые уравнения переходили бы сами в себя. Это условие можно выразить следующим соотношением:

$$D_+\Phi_i = \Phi_{i+1}, D_+\Phi_{i+1} = \Phi_{i+2}, \ldots, D_+^q\Phi_i = D_+\Phi_{i+q-1} = \Phi_{i+q} = \Phi_i,$$

где q - некоторое натуральное число, большее 1: $q > 1$. В этом случае на коэффициенты базовых соотношений накладываются дополнительные условия, сводящиеся к соотношениям:

$$\prod_{k=0}^{q-1} A_{i+k} = 1, \quad A_{i+q} = A_i, \quad C_{i+q} = C_i. \qquad (5.51)$$

В результате подстановки $\phi_i = \ln A_i$ первое и второе из этих соотношений сводятся к формулам

$$\sum_{k=0}^{q-1} \phi_{i+k} = 0, \ \phi_q = \phi_0. \qquad (5.52)$$

Условия цикличности приводят к некоторым модификациям цепочек. Цепочки (5.36) в случае $n = q$ приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_i = \sum_{k=1}^{q-1} M_k (e^{\phi_{i+k}} - e^{\phi_i}) \exp\left\{\sum_{p=1}^{k-1} \phi_{i+p}\right\}, i = 1, \ldots, q, \qquad (5.53)$$

где q функций $\phi_i, i = 1, \ldots, q-1$ связаны соотношением (5.52) . В силу цикличности цепочки только $q-2$ функций являются независимыми. Поэтому индекс i пробегает конечный интервал значений $i = 0,1,\ldots,q-2$.

В частном случае $q=2$ соотношение (5.52) имеет такой вид:

$$\phi_i + \phi_{i+1} = 0,$$

что эквивалентно

$$\phi_1 = -\phi_0.$$

В этом случае, поскольку $B_2 = B_0$, уравнение (5.53) примет вид одного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_0 = M_1(e^{-\phi_0} - e^{\phi_0}) = -2M_1(\phi_0), \qquad (5.54)$$

для функции ϕ_0. В случае же $q=3$ уравнение (5.53) имеет такой вид:

$$\phi_i + \phi_{i+1} + \phi_{i+2} = 0,$$

что приводит к двум уравнениям для ϕ_0 и ϕ_1:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_0 = (M_1 - M_2 e^{\phi_0})e^{\phi_1} - M_1 e^{\phi_0} + M_2 e^{-\phi_0},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_1 = (M_1 e^{-\phi_1} - M_2)e^{-\phi_0} - M_1 e^{\phi_1} + M_2 e^{-\phi_1}. \qquad (5.55)$$

Если ввести обозначения $x = e^{\phi_0}$ и $y = e^{\phi_1}$, то уравнение (5.54) сводится к уравнению Ферхюльста:

$$\dot{x} = 2M_1(1 - x^2)$$

Система же (5.55) превращается в систему следующего вида:

$$\dot{x} = (M_1 - M_2 x)xy - M_1 x^2 + M_2,$$
$$\dot{y} = (M_1 - M_2 y)x^{-1} - M_1 y^2 + M_2, \qquad (5.56)$$

которая, как и уравнение Ферхюльста, может иметь приложение в задачах популяционной динамики или теории химических реакций.

5.10 Ограниченные цепочки

Еще одним классом интегрируемых моделей рассмотренного типа являются конечные цепочки, ограничение которых производится с помощью других условий, нежели циклическое замыкание. В качестве примера приведем цепочки типа (5.31). Потребуем, чтобы начиная с некоторого конечного номера $q \le n$ выполнялись условия

$$\Phi_{q+i} = \Phi_q, \; i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда все уравнения для функций $\Phi_{q+i}, i > 1$ превращаются в одно и то же уравнение вида

$$\dot{\Phi}_q = \Phi_q \sum_{i=0}^{n} M_i.$$

Уравнения с номерами, меньшими q будут отличаться от этого исходного уравнения. В результате все функции $A_{q+i} = \Phi_{i+q+1} / \Phi_{i+q} = 1, i > 0$ будут равны 1, а функции $\phi_{q+i} = \ln A_{q+i}, i > 0$ - нулю. В результате совокупность уравнений для всех функций ϕ_i с номерами $-p < i < q$, где $p \le 0$ - любое неотрицательное число, является замкнутой и описывает конечную цепочку уравнений вида (5.31). В качестве примера приведем уравнения следующей цепочки с $n = 2, q = 3, p = 0$:

$$\dot{\phi}_0 = M_1(e^{\phi_1} - e^{\phi_0}) + M_2(e^{\phi_2} - e^{\phi_0})e^{\phi_1},$$
$$\dot{\phi}_1 = M_1(e^{\phi_2} - e^{\phi_1}) + M_2(1 - e^{\phi_1})e^{\phi_2},$$
$$\dot{\phi}_2 = (M_1 + M_2)(1 - e^{\phi_2}),$$

Если перейти к переменным $x = e^{\phi_0}, y = e^{\phi_1}, z = e^{\phi_2}$, то эти уравнения примут такой вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M_1(y - x)x + M_2(z - x)xy, \\ \dot{y} &= M_1(z - y)y + M_2 y^2 - M_2 z y^2, \\ \dot{z} &= (M_1 + M_2)(1 - z)z. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Эта система также может использоваться в моделях химических реакций и популяционной динамике в биологии. Аналогичные уравнения имеют место и для конечных цепочек с правым сдвигом. Однако цепочки со сдвигами обоих типов требуют отдельного рассмотрения, что выходит за рамки данной работы.

5.11 Цепочки с условиями отражения

Рассмотренные способы ограничения длины цепочек с помощью условия цикличности и условия обрезания не применимы к цепочкам, содержащим одновременно правые и левые производные. В этом случае для ограничения длины цепочек можно воспользоваться условием отражения. Условие отражения продемонстрируем на следующем примере. Рассмотрим цепочку вида (5.47) со вспомогательными уравнениями (5.45) при условии $I_i = 0$. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\phi_i = -\phi_{-i}, \; i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.58}$$

Из этих условий следует, что $\phi_0 = 0$, что автоматически приводит к требованию $M = N$. Можно заметить, что в этом случае уравнения (5.47) для $i < 0$ переходят в уравнения для $i > 0$. Действительно, при $i < 0$ уравнения

$$\frac{\partial \psi_{-|i|}}{\partial t} = M(e^{\psi_{-|i|+1}} - e^{\psi_{-|i|}}) + M(e^{-\psi_{-|i|}} - e^{-\psi_{-|i|-1}}),$$

в силу условий отражения переходят в уравнения

$$\frac{\partial \psi_{|i|}}{\partial t} = M(e^{\psi_{-|i+1|}} - e^{-\psi_{|i|}}) + M(e^{\psi_{-|i|}} - e^{\psi_{-|i-1|}}),$$

что в точности совпадает с уравнениями при $i > 0$. Таким образом, можно получить полубесконечную цепочку. Условиям отражения (5.58) соответствует следующее условие для функций Φ_i:

$$\Phi_0 = \Phi_1, \Phi_i = \Phi_{-i},\ i = 1, \ldots .$$

Для того чтобы получить конечную цепочку, необходимо поставить условие отражения с другого конца цепочки на некотором шаге q, полагая:

$$\phi_{q-i} = -\phi_{q+1+i}, i = 0,1,\ldots, q. \tag{5.59}$$

При $i = q$ имеем соотношение $\phi_0 = \phi_{2q+1} = 0$. Можно видеть, что в этом случае уравнения с номерами $q+1+i$ переходят в уравнения с номерами $q-i$ для указанных значений индекса i. В результате получаем замкнутую конечную цепочку уравнений с номерами $i = 1,\ldots, q$. В частности, при $q = 3$ имеем систему уравнений следующего вида:

$$\dot{\phi}_1 = M(e^{\phi_2} - e^{\phi_1} + e^{-\phi_1} - 1),$$
$$\dot{\phi}_2 = M(e^{\phi_3} - e^{\phi_2} + e^{-\phi_2} - e^{-\phi_2}),$$
$$\dot{\phi}_3 = M(2e^{-\phi_3} - e^{\phi_3} - e^{-\phi_2}).$$

Переходя к переменным x, y, z, запишем эту систему в полиномиальном виде:

$$\dot{x} = M(y - x)x + M(1 - x),$$
$$\dot{y} = M(z - y)y + M(1 - y / x),$$
$$\dot{z} = M(2 - z^2 - z / y).$$

Условия отражения можно распространить и на другие типы цепочек, построенных на вспомогательных уравнениях одновременно с правыми и левыми сдвигами.

5.12 Системы конечной длины общего вида

Результаты, полученные для цепочек конечной длины, формально можно обобщить, не прибегая к той или иной процедуре ограничения длины бесконечных цепочек. Рассмотрим систему (5.29) относительно вектора $U = \{\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ с произвольной вещественной матрицей M. Введем следующее представление для функций Φ_i, полагая

$$\Phi_i = Q_i(t)\Phi_0, i = 1,\ldots, n. \tag{5.60}$$

Подставляя эти соотношения в систему (5.29), находим:

$$\frac{1}{\Phi_0}\frac{d\Phi_0}{dt}=M_{00}+\sum_{k=1}^{n}M_{0k}Q_k(t),$$
$$\frac{dQ_i}{dt}=-Q_i\frac{1}{\Phi_0}\frac{d\Phi_0}{dt}+M_{i0}+\sum_{k=1}^{n}M_{ik}Q_k,\ i=1,\dots,n.$$

Исключая из последних уравнений Φ_0 с помощью первого уравнения, приходим к нелинейной системе уравнений относительно n функций Q_i следующего вида:

$$\frac{dQ_i}{dt}=M_{i0}-Q_iM_{00}+\sum_{k=1}^{n}(M_{ik}-Q_iM_{0k})Q_k,\ i=1,\dots,n. \tag{5.61}$$

В матричном виде эту систему можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}=\mathbf{m}+(M_1-M_{00})\mathbf{Q}-(\mathbf{n},\mathbf{Q})\mathbf{Q}, \tag{5.62}$$

где $\mathbf{Q}=\{Q_1,\dots,Q_n\}$, $\mathbf{m}=\{M_{10},\dots,M_{n0}\}$, $\mathbf{n}=\{M_{01},\dots,M_{0n}\}$, $(\mathbf{n},\mathbf{Q})=\sum_{k=1}^{n}n_kQ_k$ и матрица $\mathbf{M}_1$ представляет собой часть матрицы $\mathbf{M}$ без первой строки и первого столбца. Пусть теперь функции Q_i являются дифференцируемыми функциями компонентов другого вектора $\mathbf{x}=\{x_1,\dots,x_n\}$. Будем полагать, что зависимость $Q_i=Q_i(x)$ такова, что матрица J с компонентами

$$J_{km}=\frac{\partial Q_k}{\partial x_m},\ k,m=1,\dots,n,$$

является невырожденной. Тогда система (5.62) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\hat{J}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{m}+(\hat{J}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{M}_1\hat{J}(\mathbf{x})-M_{00})\mathbf{x}-(\mathbf{n}\hat{J}(\mathbf{x}),\mathbf{x})\mathbf{x}. \tag{5.63}$$

Последняя система нелинейных уравнений относительно x представляет наиболее общий тип уравнений, который можно связать с конечной вспомогательной системой с помощью подстановки (5.60). В частности, в эту схему попадают все редукции бесконечных цепочек к конечным, рассмотренные ранее. Каждая из рассмотренных редукций (циклическая, ограниченная или отражательная) фиксирует матрицу $\mathbf{M}$ и, следовательно, $\mathbf{M}_1$. Связь же Q_i с функциями $x_i=A_{i-1}$ (или $x_i=B_{i+1}$), определяется рекуррентными соотношениями (5.26), что дает:

$$Q_k=\prod_{j=0}^{k-1}A_j=x_ix_{i-1}\cdots x_1. \tag{5.64}$$

Отсюда

$$J_{km}=\frac{\partial Q_k}{\partial x_m}=\begin{cases}0, & k>m+1,\\ Q_k/x_m, & k\le m+1.\end{cases}$$

Очевидно, что подстановку (5.60) можно рассматривать независимо от подстановок для бесконечных цепочек.

В качестве примера рассмотрим модель в размерности $n=2$, которая соответствует простейшему выбору функций $Q_1(t)=x+K_0, Q_2(t)=y+L_0$. Уравнения этой модели при произвольной матрице M размерности 3×3 имеют в этом случае такой вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=R_{10}x+R_{01}y+R_{20}x^2+R_{11}xy+R_{00}, \\
&\dot{y}=Q_{10}x+Q_{01}y+Q_{02}y^2+Q_{11}xy+Q_{00},
\end{aligned} \tag{5.65}$$

где

$$\begin{aligned}
&R_{10}=M_{11}-M_{00}-L_0M_{02}-2K_0M_{01}, \\
&R_{01}=M_{12}-K_0M_{02},\ R_{20}=-M_{01},\ R_{11}=-M_{02}, \\
&R_{00}=M_{10}+L_0M_{12}+K_0(M_{11}-M_{00}-L_0M_{02}-K_0M_{01}), \\
&Q_{01}=M_{22}-M_{00}-K_0M_{01}-2L_0M_{02}, \\
&Q_{10}=M_{21}-L_0M_{01},\ Q_{02}=-M_{02},\ Q_{11}=-M_{01}, \\
&Q_{00}=M_{20}+k_0M_{21}+L_0(M_{22}-M_{00}-K_0M_{01}-L_0M_{02}).
\end{aligned}$$

Количество независимых коэффициентов этой модели равно 10, а число независимых параметров равно 11, т.е. на 1 больше. Коэффициенты линейной части этой модели могут быть выбраны произвольно, а коэффициенты квадратичной части в каждом из уравнений модели определяются только двумя независимыми параметрами M_{01} и M_{02}. Это указывает на некоторую выделенность моделей с квадратичной нелинейностью, интегрируемых с помощью рассматриваемых подстановок.

5.13 Интегралы движения и фазовые портреты конечномерных систем

Для случая цепочек конечной длины вычисление интегралов движения формально производится по общим схемам, рассмотренным в Приложении к данной главе (раздел 5.17). Поскольку динамические системы для цепочек конечной длины играют важную роль в прикладных задачах, например, в задачах физической и биологической кинетики, полезно, кроме общей схемы вычисления решений, привести примеры построения интегралов движения и их фазовых портретов.

5.13.1 Циклические цепочки

Для циклических цепочек матрица M размерности $q\times q$ представляет собой циклическую матрицу или циркулянт [5] и может быть записана в следующем общем виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_q \\ M_q & M_0 & M_1 & \dots & M_{q-1} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \\ M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_0 \end{pmatrix}. \tag{5.66}$$

Собственные числа этой матрицы не являются кратными и имеют следующий вид:

$$\lambda_k = p(r_k), k = 1, \dots, q,$$

где $p(x) = M_0 + M_1 x + \dots + M_q x^{q-1}$ и $r_k = e^{2\pi/k}$. Правые собственные вектора циклической матрицы имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}_k = column\{1, r_k, r_k^2, \dots, r_k^{q-1}\}, k = 1, \dots, q.$$

Матрица левых собственных векторов вычисляется как обратная к матрице правых собственных векторов с теми же собственными числами.

В частности, для случая $q = 3$, соответствующему модели (5.56), необходимо решать систему из трех уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0 &= M_0\Phi_0 + M_1\Phi_1 + M_2\Phi_2, \\ \dot{\Phi}_1 &= M_0\Phi_1 + M_1\Phi_2 + M_2\Phi_0, \\ \dot{\Phi}_2 &= M_0\Phi_2 + M_1\Phi_0 + M_2\Phi_1. \end{aligned} \tag{5.67}$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет такой вид:

$$(M_0 - \lambda)^3 + M_1^3 + M_2^3 - 3(M_0 - \lambda)M_1 M_2 = 0,$$

а соответствующие корни:

$$\lambda_1 = M_0 + M_1 + M_2,\ \lambda_{2,3} = M_0 - (M_1 + M_2)/2 \pm i(M_1 - M_2)\sqrt{3}/2.$$

Правые собственные вектора циклической матрицы

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 \\ M_2 & M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 & M_0 \end{pmatrix}, \tag{5.68}$$

соответствующей системе (5.67), имеют такой вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{M_1 - M_2 - i\sqrt{3}(M_1 + M_2)}{M_1 + M_2 + i\sqrt{3}M_1}, 1, \frac{2M_1 + M_2 - i\sqrt{3}M_2}{M_1 + M_2 + i\sqrt{3}M_1} \right), \\ v_2 &= \left(-\frac{M_1 - M_2 + i\sqrt{3}(M_1 + M_2)}{2M_1 + 2M_2 + i\sqrt{3}M_2}, -\frac{M_1 + 2M_2 - i\sqrt{3}M_2}{2M_1 + 2M_2 + i\sqrt{3}M_2}, 1 \right), \\ v_3 &= (1,1,1). \end{aligned}$$

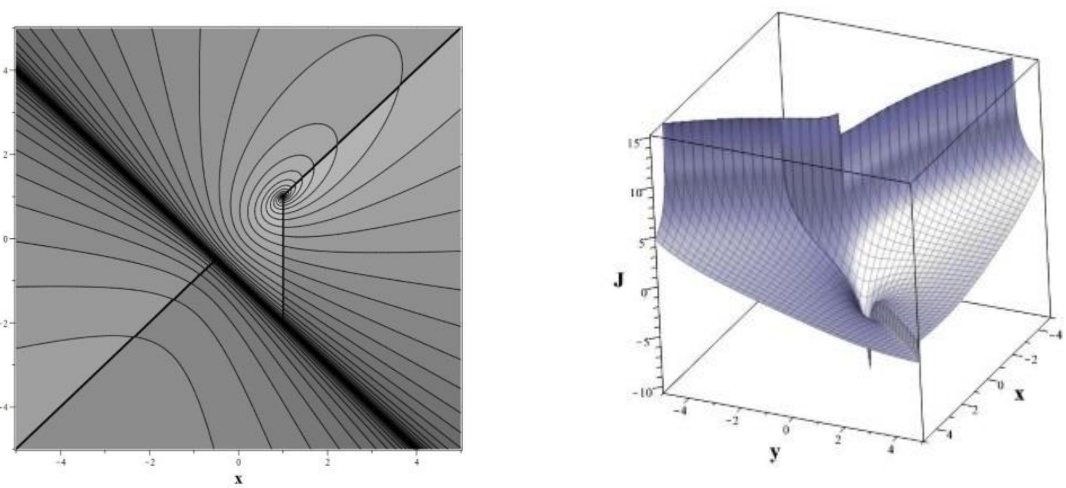
Используя для модели (5.56) схему вычисления интегралов движения для случая некратных собственных чисел, приходим к одному интегралу движения следующего вида:

$$J_{12} = \frac{1}{2}\ln(F(x,y)) + \frac{k_1 - k_2}{k_3}(H(x,y)),$$

где $k_1 = M_0 + M_1 + M_2, k_2 = M_0 - (M_1 + M_2)/2, k_3 = \sqrt{3}(M_1 - M_2)/2$,

$$F(x,y) = \frac{(y+x+1)^2}{(y+x+1)^2 - 3(yx+x+y)}, \quad H(x,y) = \frac{\sqrt{3}\gamma(y-1)}{2x-y-1}.$$

Фазовый портрет этой системы для $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$ представлен на рис. 5.1 a. Динамическая система (5.56) имеет одну особую точку $x_0 = 1, y_0 = 1$ типа фокус. Кроме этого имеется особенность вдоль прямой $x + y + 1 = 0$, на которой значение интеграла обращается в бесконечность. Три дополнительных отрезка прямых, проходящих через особую точку, указывают на положение точек, где арктангенс скачком изменяется на π. Эти особенности устранимы. Видно, что фазовые кривые на рис. 5.1 a переходят через линии скачков непрерывно.



a b

Рис. 5.1. Фазовый портрет циклической цепочки (5.56): a – фазовый портрет; b – функция интеграла J=J(x,y)

5.13.2 Ограниченные цепочки

В случае ограниченных цепочек типа (5.57) вспомогательные уравнения имеют вид системы (5.29), в которой $\mathbf{U} = \mathrm{column}\{\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_q\}$, а матрица M имеет размерность $(q+1)\times(q+1)$ и такой вид:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_0 & M_1 & \dots & M_{n-1} & M_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_0 & M_1 & \dots & M_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_0 & \dots & M_{n-1}+M_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & M_0+\dots+M_n \end{pmatrix}. \qquad (5.69)$$

Без ограничения общности полагаем $p=0$. Данная матрица имеет два различных собственных числа: $\lambda_1 = M_0+\dots+M_n, \lambda_2=\lambda_3=\dots=\lambda_q=M_0$, одно из которых q раз вырождено. Это означает, что для вычисления интегралов следует использовать соотношения (5.84). Для случая $q=3$ интегралы движения имеют следующий вид:

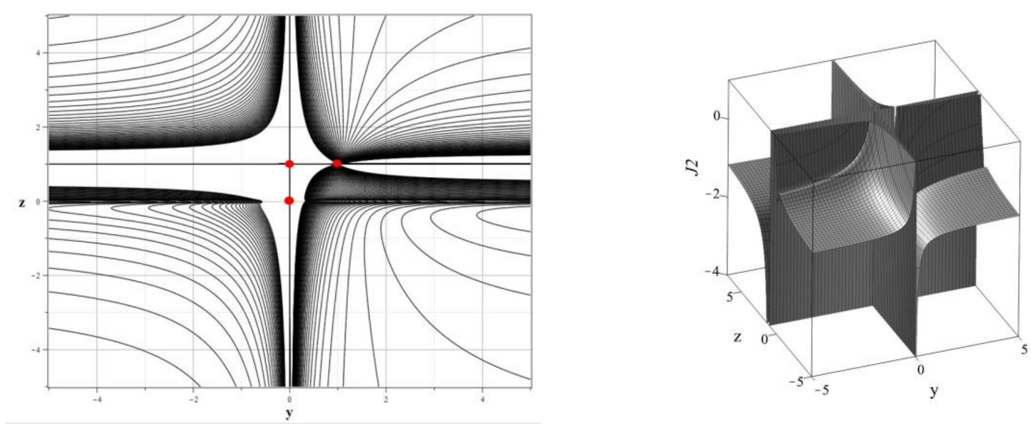
$$J_{yz}=M_1\tau(z)+\frac{zy-1}{y(z-1)},\quad J_{xyz}=(M_1^2)/2\tau^2(z)-(M_1\frac{1-yz)}{y(1-z)}+M_2)\tau(z)+\frac{1-xyz}{xy(1-z)},$$

где

$$\tau(z)=1/(M_1+M_2)\ln\left|\frac{z}{z-1}\right|$$

На рис. 5.2 a представлен фазовый портрет данной динамической системы.

.



a b

Рис. 5.2. Фазовый портрет ограниченной цепочки (5.57): a – фазовый портрет; b – функция интеграла $J=J(x,y)$

5.13.3 Линеаризуемые конечномерные модели

Для модели размерностью $n=2$ имеется один интеграл движения (см. раздел 5.17), который в случае, когда все три собственных числа $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ матрицы M различны, имеет такой вид:

$$J_{12} = \frac{\ln|Q_1/Q_0|}{\lambda_0-\lambda_1} - \frac{\ln|Q_2/Q_0|}{\lambda_0-\lambda_2},$$

где $Q_k = v_k^0 + v_k^1 x + v_k^2 y, k = 0,1,2$, а v_k - левые собственные векторы матрицы M размерности 3 общего вида. Поскольку частным случаем матрицы M являются варианты циклической и ограниченной матриц, рассмотренные выше, то интерес представляет только случай симметричной матрицы. Поскольку для симметричной матрицы собственные числа и собственные векторы вещественны и, кроме того, собственные векторы ортогональны, то удобно вместо самой матрицы задавать сами собственные числа и собственные векторы. Выберем в качестве собственных векторов матрицы $\mathbf{M}$ следующие три вектора:

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{2}/2(\cos(\theta), \sin(\theta), 1),$$
$$\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}/2(-\cos(\theta), -\sin(\theta), 1),$$
$$\mathbf{v}_3 = (-\sin(\theta), \sin(\theta), 0),$$

а в качестве собственных чисел, им соответствующих, три вещественных числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. В этом случае интеграл движения примет следующий вид:

$$J_{12} = \frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)} \ln\left|\frac{(cos(\theta)+\sin(\theta)x+y)}{(x\cos(\theta)-\sin(\theta))}\right| - \frac{1}{\lambda_0-\lambda_2} \ln\left|\frac{-\cos(\theta)-\sin(\theta)x+y}{x\cos(\theta)-\sin(\theta)}\right|.$$

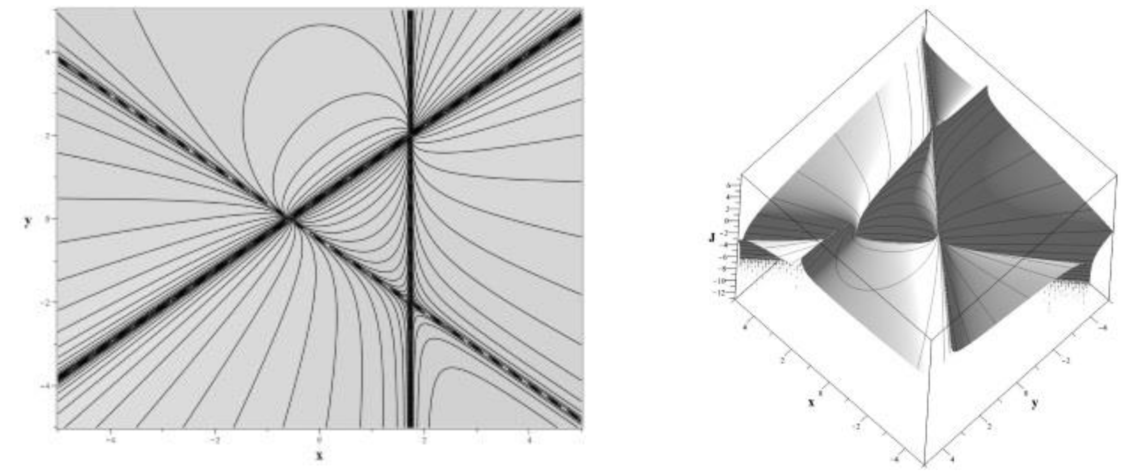
Для случая $\theta = \pi/3$ и $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ матрица $\mathbf{M}$ будет иметь такой вид:

$$\mathbf{M} = 1/8\begin{pmatrix} ((21 & -3\sqrt{3} & -2 \\ -3\sqrt{3} & 15 & -2\sqrt{3} \\ -2 & -2\sqrt{3} & 12 \end{pmatrix},$$

а сама динамическая система будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{x} = 1/8(6x + 2\sqrt{3}y - 3\sqrt{3}x^2 + 2xy + 3\sqrt{3}),$$
$$\dot{y} = 1/8(2\sqrt{3}x + 9y - 2y^2 - 3\sqrt{3}xy + 2). \tag{5.70}$$

Фазовый портрет данной системы приведен на рис. 5.3 а. Три особые точки системы лежат на пересечении трех особых прямых интеграла $J_{12}(x, y)$, соответствующих трем собственным векторам матрицы $\mathbf{M}$. Одна из точек – седловая, а две другие – узлы. Один из узлов устойчивый, другой - неустойчивый.



a b

Рис. 5.3. Фазовый портрет динамической системы (5.70): a – фазовый портрет; b – функция интеграла $J_{12} = J_{12}(x, y)$

5.14 Построение решений вспомогательных уравнений и уравнений цепочек

Решения полученных уравнений строятся с помощью подстановок, связанных с базовыми соотношениями (5.17) или (5.18). Именно функции $A_i(t)$ и $\hat{A}_i$ вычисляются следующим образом:

$$A_i(t) = \frac{\Phi_{i+1}(t)}{\Phi_i(t)},\ \hat{A}_i(t) = \hat{\Phi}_{i+1}\hat{\Phi}_i^{-1}.$$

Сами функции Φ_i и $\hat{\Phi}_i$ вычисляются как решения соответствующих вспомогательных уравнений.

Рассмотрим вначале скалярные уравнения (5.28). Искать частные решения этих уравнений с постоянными коэффициентами будем в следующей форме:

$$\Phi_i = P(z) z^i e^{\lambda t}.$$

В результате уравнения (5.28) приводятся к виду

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n} C_k z^k.$$

Это последнее соотношение является характеристическим уравнением, из которого вычисляется параметр λ как функция комплексного параметра z. В результате общее решение уравнения (5.28) можно представить в такой форме:

$$\Phi_i = \int_C P(z) z^i e^{\lambda(z)t} dz,$$

где C - контур в комплексной плоскости изменения параметра z.

В случае матричных уравнений решения строятся по аналогичной схеме. Частные решения ищутся в виде

$$\hat{\Phi}_i = z^i e^{\lambda_a t} p_a(z),$$

где $P_a(z)$ - собственный вектор с номером a матрицы $\hat{Q}$:

$$\hat{Q}(z) = \sum_{k=0}^{n} \hat{C}_k z^k$$

с матричными коэффициентами $\hat{C}_k$, соответствующими собственному числу $\lambda_a(z), a = 1, \ldots, n$. Общее решение для $\hat{\Phi}_i$ имеет теперь такой вид:

$$\hat{\Phi}_i = \int_C \hat{P}(z) z^i e^{\lambda(z)t} dz,$$

где $\hat{P}(z)$ - матрица собственных векторов матрицы $\hat{Q}$, удовлетворяющая уравнению

$$\hat{P}(z)\hat{L}(z) = \hat{Q}(z)\hat{P}(z),$$

где $\hat{L}(z) = \mathrm{d}iag\{\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_n z\}$, n - размерность матриц.

5.15 Решения в случае ограниченных и циклических цепочек

В случае циклических цепочек построение сводится к решению системы из q связанных между собой линейных уравнений относительно q вспомогательных функций $\Phi_i, i = 0, \ldots, q-1$. В частности, для случая $q = 3$ необходимо решать систему из трех уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_0 &= M_0\Phi_0 + M_1\Phi_1 + M_2\Phi_2, \\
\dot{\Phi}_1 &= M_0\Phi_1 + M_1\Phi_2 + M_2\Phi_0, \\
\dot{\Phi}_2 &= M_0\Phi_2 + M_1\Phi_0 + M_2\Phi_1.
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет такой вид:

$$(M_0 - \lambda)^3 + M_1^3 + M_2^3 - 3(M_0 - \lambda)M_1 M_2 = 0,$$

а соответствующие корни выглядят следующим образом:

$$\lambda_1 = M_0 + M_1 + M_2,\ \lambda_{2,3} = M_0 - (M_1 + M_2)/2 \pm i(M_1 - M_2)\sqrt{3}/2.$$

Решения этой системы можно записать в векторной форме:

$$\mathbf{U} = P_1\mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + P_2\mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} + P_3\mathbf{u}_3 e^{\lambda_3 t},$$

где $\mathbf{U} = \mathrm{c}olumn\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_3\}$, P_i - произвольные постоянные, а $u_k, k = 1, 2, 3$ - собственные вектора матрицы $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 \\ M_2 & M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 & M_0 \end{pmatrix}$$

Если Φ_0, Φ_1, Φ_2 - решения этой линейной системы уравнений, тогда решения уравнений (5.55) и (5.56) имеют такой вид:

$$\phi_0 = \ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right),\ \phi_1 = \ln\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right),\ x = \frac{\Phi_1}{\Phi_0},\ y = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

В общем случае решения уравнений (5.53) сводятся к решению линейной системы уравнений (5.28) с циклической матрицей (циркулянтом) $\mathbf{M}$ [5] размерности $q \times q$, имеющей вид (5.66). В результате общее решение вспомогательных уравнений можно записать, как и в предыдущих случаях, в следующем виде:

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{q} P_k \mathbf{u}_k e^{\lambda_k t}.$$

Соответственно, решения нелинейной циклической цепочки будут иметь такой вид:

$$\phi_k = \ln\left(\frac{\Phi_{k+1}}{\Phi_k}\right),\ k = 0,\ldots,q-2. \qquad (5.71)$$

5.16 Матричные уравнения

Рассмотрим в заключение данной главы матричные уравнения со смешанными производными. Ограничимся вспомогательными уравнениями первого порядка по производной t. В качестве первого такого уравнения возьмем уравнение на сетке, подобное уравнению (3.14), в котором частная производная по координате x заменяется на сдвиговую производную на сетке:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_i = \hat{H} D_x \hat{T}_i = \hat{H}\hat{T}_{i+1}. \qquad (5.74)$$

Здесь $\hat{H}$ - постоянная матрица. Используя базовые соотношения (5.17), последнее сеточное уравнение приводится к виду

$$\hat{B}_i = \hat{H}\hat{A}_i. \qquad (5.75)$$

Подставляя это уравнение связи в уравнение (5.21), приходим к матричному уравнению для $\hat{A}_i(t)$:

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial t} = (\hat{H}\hat{A}_{i+1} - \hat{A}_i\hat{H})\hat{A}_i. \qquad (5.76)$$

В более общем случае вспомогательное уравнение выберем в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_i = \hat{H} D_x^n \hat{T}_i = \hat{H}\hat{T}_{i+n}, \qquad (5.77)$$

где n - целое, отличное от нуля.

В этом более общем случае в соответствии с (5.26) уравнение для $\hat{A}_i$ примет такой вид:

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial t} = (\hat{H}\hat{A}_{i+1} - \hat{A}_i \hat{H} \prod_{k=1}^{n-1} \hat{A}_{i+k})\hat{A}_i. \tag{5.78}$$

В качестве относительно компактных по форме представления примеров рассмотрим вновь только случай матричной размерности 2×2, для которого справедлив развитый ранее формализм работы с матрицами Паули (3.6). Представим матрицы $\hat{A}_i$ в следующей стандартной форме

$$\hat{A}_i = \alpha_i(t)\hat{\sigma}_0 + (\mathbf{a}_i(t), \hat{\mathbf{s}}),$$

где скаляры $\alpha_i(t)$ и трехмерные вектора $a_i(t)$ заданы однозначно элементами матриц $\hat{A}_i$. Постоянную матрицу зададим в следующей форме:

$$\hat{H} = (\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}).$$

В соответствии с правилами вычислений с матрицами Паули уравнение (5.76) можно представить в форме одного скалярного уравнения на сетке и одного векторного:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i = (\mathbf{H}, (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i))\boldsymbol{\alpha}_i, \tag{5.79}$$

$$\mathbf{a}_i = -4[[\mathbf{H}\times(\mathbf{a}_{i+1} + \mathbf{a}_i)]\times \mathbf{a}_i] + 2i[\mathbf{H}\times \mathbf{P}_i] + (\mathbf{H}, (\mathbf{a}_{i+1} - \mathbf{a}_i))\mathbf{a}_i + \alpha_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i)\mathbf{H},$$

где $P_i = a_{i+1}\alpha_i + a_i\alpha_{i+1}$. Эту систему можно интерпретировать как уравнение Ланда-Лифшица для решетки магнитных частиц.

5.17 Приложение. Интегралы движения

Как уже отмечалось, вычисление решений рассмотренных бесконечных цепочек производится с помощью решений линейных вспомогательных уравнений. В частности, для всех типов вспомогательных уравнений, если найдены решения для Φ_i, то решения для A_i, B_i, ϕ_i вычисляются по следующим формулам:

$$A_i = \Phi_{i+1}(t)/\Phi_i(t), \phi_i = \ln A_i, B_i = \Phi_{i-1}/\Phi_i. \tag{5.80}$$

Для наглядного качественного анализа свойств рассмотренных динамических систем необходимо иметь возможность вычислять их интегралы движения. Интегралы для этих систем строятся с помощью интегралов движения системы (5.29). Обозначим через $v_k = (\dots, v_k^0, v_k^1, v_k^2, \dots), k \in [-\infty, \infty]$ левые собственные вектора матрицы $\boldsymbol{M}$, соответствующие собственному числу λ_k, как в конечном, так и бесконечном случае. Тогда, умножая (10) слева на v_k, находим:

$$\dot{V}_k = \lambda_k V_k,\ \ V_k(\boldsymbol{U}) = (v_k, \boldsymbol{U}) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} v_k^a \Phi_a. \tag{5.81}$$

Предположим, что среди всех собственных чисел λ_k нет кратных. Пусть далее $\lambda_0 \neq 0$ - отличное от нуля собственное число системы (5.81) . В этом случае имеем:

$$t = \frac{1}{\lambda_k}\ln V_k - H_k,$$

где H_k - постоянные интегрирования. Тогда интегралами системы (5.29) являются все возможные функции:

$$I_k = H_k - H_0 = \frac{1}{\mu_k}\ln V_k(\boldsymbol{U}) - \frac{1}{\mu_0}\ln V_0(\boldsymbol{U}), k \neq 0. \quad (5.82)$$

Для всех k, у которых $\lambda_k = 0$ интегралами являются сами функции $V_k(\boldsymbol{U})$. Обращая соотношения (5.82) по отношению к Φ_i, находим

$$\Phi_i = \Phi_0 \prod_{j=0}^{i-1} A_j, i > 0, \Phi_i = \Phi_0 \prod_{j=1}^{i} A_j^{-1}, i < 0.$$

Отсюда $V_k = \Phi_0 Q_k$, где

$$Q_k = v_k^0 + \sum_{a=1}^{\infty} (v_k^{-a} \prod_{j=1}^{a} A_j^{-1} + v_k^a \prod_{j=1}^{a} A_j).$$

Подставляя эти соотношения в (34) и исключая из интегралов функцию $\ln\Phi_0(t)$, окончательно находим, что интегралами движения цепочек будут величины

$$J_{km} = \frac{\ln\lfloor Q_k/Q_0\rfloor}{\lambda_0-\lambda_k} - \frac{\ln\lfloor Q_m/Q_0\rfloor}{\lambda_0-\lambda_m}, \quad (5.83)$$

где $k \neq m \neq 0$. В эту схему аналогичным образом включаются и интегралы, соответствующие нулевым собственным числам.

Если среди собственных чисел имеются кратные собственные числа, то вычисление интегралов для этой группы проводится по несколько другой схеме. Пусть, как и раньше, $\lambda_0 \neq 0$ - некоторое не кратное собственное число, и $\lambda_p = \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_q$, где $q > p$. В этом случае часть уравнений (5.29) с соответствующими номерами после умножения слева на v_k преобразуются к форме Жордана [5]. Исходя из этого, уравнения для функций $V_k, k = p, \dots, q$ в общем случае можно записать в такой форме:

$$\dot{V}_k = \lambda_p V_k + V_{k+1}, k = p, \dots, q-1, \dot{V}_q = \lambda_p V_q.$$

Заметим, что если матрица M является верхнетреугольной или нижнетреугольной, то матрицу не обязательно приводить к форме Жордана, а уравнения для V_k можно получать непосредственно из решения самой исходной системы (5.29). В случае представления Жордана находим, что решения для функций V_k в соответствующем диапазоне номеров имеет такой вид:

$$V_{p+k} = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{C_{s-\alpha}}{(k-\alpha)!} t^{k-\alpha} e^{\lambda_p t}, k = p, \dots, s.$$

где $s = q - p$, а C_α - постоянные интегрирования. Для функций $V_q = Q_q\Phi_0$ и $V_0 = Q_0\Phi_0$ имеем два соотношения:

$$t = \frac{1}{\lambda_p}(\ln Q_q + \ln\Phi_0 - \ln C_s) t = \frac{1}{\lambda_0}(\ln Q_0 + \ln\Phi_0 - H_0),$$

Исключая из них Φ_0, находим:

$$t = \frac{1}{\Delta} Z_p, \qquad Z_p = \ln(Q_p/Q_0) - H_{p0}$$

где $H_{p0} = \ln C_s - H_0$ и $\Delta = \lambda_p - \lambda_0$.

Используя последнее соотношение, находим интегралы движения в следующей форме:

$$J_{kp} = \ln(C_{s-k}/C_s) = \ln(Q_{p+k}/Q_q) - \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{C_{s-\alpha}}{\Delta^{k-\alpha}(k-\alpha)!} Z_p^{k-\alpha}, \qquad (5.84)$$

$$k = 1, \dots, s-1.$$

Эти интегралы с заданным k вычисляются рекуррентно через значения интегралов с $k-1$.

6 Подстановки для многомерных уравнений

Следующим важным шагом в развитии метода функциональных подстановок является перенос базовых соотношений на случай многомерных уравнений. Хорошо известно, что расширение МОЗ на многомерные уравнения сопряжено с трудностями. Здесь же покажем, что с формальной точки зрения методология МФП без труда распространяется на многомерный случай. Это позволяет надеяться на то, что многомерный вариант этого метода даст более широкий круг интегрируемых моделей, полезных на практике. Поскольку в предыдущей главе были введены матричные подстановки, то естественно многомерный случай рассматривать сразу в матричной форме. Случай скалярных функций будет являться частным вариантом общего матричного подхода.

6.1 Общая формулировка метода в многомерном варианте

Рассмотрим в качестве базовых дифференциальных соотношений следующую совокупность уравнений для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{T}=\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})\hat{T},\ \alpha=1,\ldots,n. \tag{6.1}$$

Из условия непрерывности функции $\hat{T}(\mathbf{x})$ следует, что функции $\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})$, определенные базовыми соотношениями (6.1), связаны между собой соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\beta-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\hat{A}_\alpha+[\hat{A}_\beta,\hat{A}_\alpha]=0,\ \alpha,\beta=1,\ldots,n. \tag{6.2}$$

Кроме этих очевидных следствий непрерывности функции $\hat{T}(\mathbf{x})$, из совокупности базовых соотношений следуют и рекуррентные соотношения для производных базовых функций A_α любого порядка. Именно по индукции доказывается, что $A^{(a_1,a_2,\ldots,a_n)}(\mathbf{x})$, определенные соотношениями

$$\frac{\partial^{|a|}\hat{T}}{\partial x_1^{a_1}\cdots\partial x_1^{a_n}}=\hat{A}^{(a)}(\mathbf{x})\hat{T}, \tag{6.3}$$

являются дифференциальными полиномами только функций $A_\alpha,\alpha=1,\ldots,n$. Здесь и далее вводится мультииндекс $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ с целочисленными компонентами a_i и обозначение $|\mathbf{a}|=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

Действительно, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\hat{T}^{[\mathbf{a}]} = \hat{A}^{(\mathbf{a}+\mathbf{1}_{\alpha})}\hat{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})}\hat{A}_{\alpha}\right)\hat{T},\ \alpha = 1,\ldots,n,$$

где

$$\mathbf{1}_{\alpha} = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{\alpha-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-\alpha}).$$

Отсюда следует набор рекуррентных соотношений:

$$\hat{A}^{(\mathbf{a}+\mathbf{1}_{\alpha})} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})}\hat{A}_{\alpha},\ \alpha,\beta = 1,\ldots,n. \tag{6.4}$$

Как и в размерности $1+1$ (или 2), рассмотренной в предыдущих разделах, можно рассмотреть дифференциальные следствия для функций $\hat{A}_{\alpha}, \alpha = 1,\ldots,n$, которые порождены требованием, что функция $\hat{T}(\mathbf{x})$ удовлетворяет одному или нескольким дополнительным уравнениям. Действительно, если рассматривать такие функции $\hat{A}_{\alpha}, \alpha = 1,\ldots,n$, которые соответствуют функции $\hat{\mathbf{T}}(x)$, являющейся решением линейного уравнения общего вида

$$\sum_{|a|=0}^{N}\hat{C}_{a}(\mathbf{x})\frac{\partial^{|a|}\hat{T}}{\partial x^{a_1}\cdots\partial x^{a_n}} = 0, \tag{6.5}$$

то после подстановки в него базовых соотношений для функций $\hat{A}_{\alpha}$ получается дополнительное нелинейное уравнение вида:

$$\sum_{|a|=0}^{N}\hat{C}_{a}(\mathbf{x})\hat{A}^{(a)} = 0. \tag{6.6}$$

Поскольку $\hat{A}^{(a)}$ являются дифференциальными полиномами функций $\hat{A}_{\alpha}(\mathbf{x})$, последнее уравнение в совокупности с (6.2) можно рассматривать как систему нелинейных уравнений относительно $\hat{A}_{\alpha}$.

6.2 Простые примеры интегрируемых скалярных моделей

В данном разделе рассмотрим примеры конструирования многомерных интегрируемых уравнений на основе линейных моделей для скалярной функции $T(x)$. В скалярном случае трудно ожидать получения существенно новых полезных для практики интегрируемых моделей, поскольку свойства совокупности функций $A_{\alpha}(x)$ в этом случае определяются очень простыми соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}A_{\beta} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}A_{\alpha} = 0,\ \alpha,\beta = 1,2,\ldots,n \tag{6.7}$$

Тем не менее рассмотрим некоторые варианты построения интегрируемых моделей, поскольку они систематизируют свойства целого набора моделей, в частности гидродинамических, что достаточно трудно сделать с точки зрения других подходов.

Простейшими примерами использования схемы МФП для многомерных систем уравнений является построение точных решений уравнений Навье-Стокса для потенциальных течений вязкой сжимаемой жидкости. Из гидродинамики известно [56, 60, 61, 126], что в случае потенциальных течений несжимаемой жидкости вязкие напряжения не дают вклада в уравнения. Однако в случае сжимаемой жидкости (газа) такой вклад остается, и его учет как раз и дает следующий пример применения МФП.

6.2.1 Вязкие потенциальные течения сжимаемой жидкости

Для удобства выделим переменную времени от остальных координат, полагая $t = x^0$, оставляя число координат равным n. Тогда базовая система уравнений примет следующий вид:

$$T_t = WT, \;\; T_{,\alpha} = A_\alpha T, \;\; \alpha = 1,\ldots,n. \tag{6.8}$$

Отсюда уравнения связи можно записать так:

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}, \; W_{,\alpha} = A_{\alpha,t}, \; \alpha,\beta = 1,\ldots,n. \tag{6.9}$$

В качестве дополнительного уравнения рассмотрим уравнение теплопроводности в пространстве размерности n:

$$T_t = \nu \Delta T. \tag{6.10}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}.$$

Это уравнение эквивалентно следующему замыкающему соотношению:

$$\frac{1}{\nu} W = \sum_{\alpha=1}^{n} (A_{\alpha,\alpha} + A_\alpha^2). \tag{6.11}$$

Из последнего соотношения простым дифференцированием находим:

$$W_{,\alpha} = A_{\alpha,t} = \nu \sum_{\beta=1}^{n} (A_{\beta,\beta\alpha} + 2A_\alpha A_{\alpha,\beta}).$$

Используя условия совместности, из этого соотношения для каждого значения индекса β получаем:

$$\frac{1}{\nu} A_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^{n} (A_{\alpha,\beta\beta} + 2A_\alpha A_{\beta,\alpha}). \tag{6.12}$$

Если ввести обозначения $v_\alpha = -2\nu A_\alpha$, то последнее уравнение приводится к уравнению Навье-Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $\mathbf{v} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ и нулевой силой Архимеда:

$$v_{\alpha,t}+\sum_{\beta=1}^{n}v_\beta\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta}=\nu\Delta v_\alpha.$$

Это уравнение можно назвать многомерным уравнением Бюргерса.

Вводя обозначения $u_\alpha=-\nu A_\alpha$, уравнение (6.12) приводится к следующему виду:

$$u_{\alpha,t}+\sum_{\beta=1}^{n}u_\beta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}=\nu\Delta u_\alpha-\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \tag{6.13}$$

где

$$p=\frac{\nu}{2}\sum_{\alpha=1}^{n}A_\alpha^2+p_0. \tag{6.14}$$

Здесь p_0 - произвольная постоянная. Уравнение (6.13) интерпретируется как уравнения Навье-Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $u=v/2$ и давлением p. Однако для полноты такой интерпретации необходимо указать уравнение сохранения массы, которое должно иметь вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\rho u^\alpha=0. \tag{6.15}$$

К такому виду приводится исходное уравнение (6.10). Действительно:

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\nu\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[T\frac{\partial\ln T}{\partial x_\alpha}\right]=0.$$

Используя обозначения для скорости и полагая $\rho=T$, приходим к уравнению (6.15). Таким образом, любое решение уравнения (6.10) дает решение уравнений Навье-Стокса с давлением p и плотностью ρ. Однако требуется определённое уточнение этих уравнений.

Поскольку в систему уравнений включена непостоянная плотность среды, то это требует определённого пересмотра уравнения Навье-Стокса. В реальности в запись правой части уравнения (6.13) при непостоянной плотности среды должен входить множитель ρ^{-1}. Это означает, что уравнение (6.13) необходимо модифицировать. Это можно сделать, учитывая тот факт, что в запись слагаемого, ответственного за вязкую диссипацию в уравнении (6.13), входит динамическая вязкость, пропорциональная плотности жидкости, которая в нашем случае $\rho=T$. Следовательно, это слагаемое должно выглядеть следующим образом:

$$F_\alpha^{(\nu)}=\frac{\nu}{\rho}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\rho\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right]=-\frac{\nu^2}{T}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[T\frac{\partial^2\ln T}{\partial x_\beta\partial x_\alpha}\right]=-\sum_{\beta=1}^{n}u_\beta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}+\nu\Delta u_\alpha.$$

Уравнение (6.13) теперь можно переписать в таком виде:

$$u_{\alpha,t}+\sum_{\beta=1}^{n}u_{\beta}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}=\frac{\nu}{\rho}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left[\rho\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\right]. \qquad (6.16)$$

Это уравнение не содержит силы Архимеда (градиента давления), т.е. относится к инерционной динамике жидкости с постоянным по пространству давлением.

Формально уравнение (6.16) можно привести к виду, которое содержит объемную силу типа градиента от некоторой функции. Действительно, умножим уравнение (6.16) на постоянную q и в качестве поля скорости рассмотрим поле с компонентами $v_{\alpha}=qu_{\alpha}$. Тогда нелинейное слагаемое в левой части уравнения можно разделить на две части:

$$qu^{\beta}\frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}=v^{\beta}\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}v^{2},$$

где $v^{2}=\sum_{\beta=1}^{n}(v_{\beta})^{2}$. В силу этого уравнение (6.16) можно переписать так:

$$v_{\alpha,t}+\sum_{\beta=1}^{n}v_{\beta}\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}=\frac{\nu}{\rho}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}\left[\rho\frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\right]-\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}},$$

где $\phi=(1-1/q)v^{2}/2$.

Объемная сила в правой части последнего уравнения не вполне соответствует силе Архимеда, поскольку не содержит множителя $\rho^{-1}=T^{-1}$. Поэтому последняя модель не имеет исключительно гидродинамической интерпретации. Но если интерпретировать ϕ как потенциал гравитационного поля, то последнее уравнение можно было бы интерпретировать как течение жидкости в гравитационном поле с потенциалом ϕ. Однако такую модель нельзя интерпретировать как самосогласованную систему для самогравитирующей жидкости, поскольку уравнением для ϕ в случае самосогласованной системы должно быть уравнение Пуассона:

$$\Delta\phi=4\pi G\rho.$$

Последнее уравнение эквивалентно дополнительному уравнению для T:

$$\frac{q(q-1)}{2}\Delta\left(\frac{(\nabla T,\nabla T)}{T^{2}}\right)=4\pi GT. \qquad (6.17)$$

Произвольную постоянную q можно выбрать в соответствии со значением гравитационной постоянной Ньютона G. Таким образом, модель может быть использована для анализа течений вязкой самогравитирующей жидкости с помощью подстановок, если удастся найти совместные решения уравнений (6.10) и (6.17).

Отметим также, что если в качестве исходного уравнения в размерности n использовать уравнение Лапласа (Д’Аламбера), то совершенно аналогичные выкладки приводят к стационарному уравнению Навье-Стокса для потенциальных течений. Поэтому специально эти результаты здесь не приводятся.

6.2.2 Уравнение переноса тепла

Единственным недостатком полученного решения является неясность с уравнением состояния $p = p(\rho,\Theta)$ для полученного класса решений. Здесь Θ - температура жидкости (газа). Температура системы должна удовлетворять уравнению теплопроводности. Для получения такого уравнения продифференцируем уравнение (6.11) по t и воспользуемся соотношениями (6.9). В результате имеем:

$$\frac{1}{\nu}W_t = \sum_{\beta=1}^{n}(A_{\beta,\beta,t} + 2A_\beta A_{\beta,t}) = \sum_{\beta=1}^{n}(W_{,\beta,\beta} + 2A_\beta W_{,\beta}).$$

Если положить, что температура Θ среды связана с W соотношением

$$\Theta = \gamma W + \Theta_0 = \gamma\frac{\partial \ln T}{\partial t} + \Theta_0,$$

приходим к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x_\alpha} = \nu\Delta\Theta + \gamma\frac{\partial p}{\partial t}.$$

с источником, равным $\gamma\dot{p}$. Это же уравнение можно записать в форме уравнения без источника:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial\Theta}{\partial x_\alpha} = \frac{\nu}{\rho}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\rho\frac{\partial\Theta}{\partial x_\beta}\right]. \tag{6.18}$$

6.3 Дополнительные соотношения для многомерных уравнений

Схема с дополнительными соотношениями эффективно применяется для многомерных уравнений. Эффективность этой схемы в многомерном случае объясняется тем, что в случае многомерных уравнений система вспомогательных уравнений для функции T может содержать гораздо более богатый класс совместных решений, чем это было в размерности 1+1. В качестве первого примера рассмотрим базовые соотношения в размерности 1+2:

$$T_x = AT,\ T_y = BT,\ T_t = CT, \tag{6.19}$$

с условиями совместности схемы базовых соотношений:

$$A_t = C_x,\ B_t = C_y,\ A_y = B_x. \tag{6.20}$$

Дополним базовые соотношения двумя уравнениями для $T(x,y,t)$ следующего вида:

$$T_t = T_{xx} + T_{yy},\ T_{xx} = T_y. \tag{6.21}$$

Можно установить, что общим решением этой пары уравнений являются функции

$$T = \int_C a(k) e^{kx + k^2 y + (k^2 + k^4) y} dk, \tag{6.22}$$

где $a(k)$ - произвольная функция k и интеграл берется по произвольному контуру C в комплексной плоскости. Используя базовые соотношения (6.19), находим, что вспомогательные уравнения (6.21) имеют такой вид:

$$C = A_x + A^2 + B_y + B^2,\ B = A_x + A^2. \tag{6.23}$$

С помощью последних двух соотношений из условий совместности базовых соотношений (6.19) получаем два из возможных уравнений, которым удовлетворяет функция A:

$$A_t = A_{xx} + A_{yy} + 2AA_x + 2A_y(A_x + A^2),$$

$$A_t = A_{xx} + A_{xxy} + 2AA_x + \frac{\partial}{\partial x}(2A_y A + (A_x + A^2)^2).$$

Оба уравнения получаются из условия совместности $C_x = A_t$ с помощью замены функции B в соответствии с (6.23) двумя различными способами. Вычитая эти уравнения, приходим к еще одному уравнению:

$$A_{yy} - A_{xxy} + 2(A_x + A)A_y - \frac{\partial}{\partial x}(2A_y A + (A_x + A^2)^2) = 0.$$

Решения обоих уравнений строятся с помощью подстановки $A = T_x / T$ для любой дифференцируемой функции T, заданной соотношением (6.22).

6.4 Матричные подстановки для многомерных уравнений

Матричные подстановки в многомерном случае существенно расширяют класс интегрируемых и частично интегрируемых уравнений. В многомерном случае дополнительные вспомогательные уравнения оставляют более широкий произвол в выборе решений для базовой матричной функции $\hat{T}$. Поэтому существенно расширяется класс частично интегрируемых нелинейных уравнений именно в многомерном случае. Изложение примеров применения общей схемы матричных подстановок для многомерных уравнений начнем со вспомогательных уравнений первого порядка.

6.4.1 Задача M -волн в размерности 1+2

Как и в предыдущих главах, будем рассматривать в качестве базовых матричные функции $\hat{T}(x,t)$ матричной размерности $N \times N$. Простым примером использования описанной схемы являются нелинейные уравнения, которые можно получить, отталкиваясь от системы вспомогательных уравнений в координатной размерности 1+2 следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{P}\hat{T}_x,\ \hat{T}_t = \hat{Q}\hat{T}_y. \tag{6.24}$$

Будем предполагать, что матрицы $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ не вырождены и коммутируют между собой: $[\hat{P},\hat{Q}]=0$, а также имеют элементы, независящие от x,y,t. Условие коммутативности необходимо для совместности системы (6.24). Базовые соотношения переобозначим. Именно будем полагать:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T},\ \hat{T}_y = \hat{B}\hat{T},\ \hat{T}_t = \hat{C}\hat{T}. \tag{6.25}$$

Здесь матрицы $\hat{A},\hat{B}$ и $\hat{C}$ размерности $N \times N$ представляют собой базовые функции схемы. Связь между этими матрицами в силу выполнения базовых соотношений имеет такой вид:

$$\hat{A}_t - \hat{C}_x + [\hat{A},\hat{C}] = 0,\ \hat{B}_t - \hat{C}_y + [\hat{B},\hat{C}] = 0,\ \hat{A}_y - \hat{B}_x + [\hat{A},\hat{B}] = 0.$$

Используя базовые соотношения, приводим уравнения (6.24) к следующему виду:

$$\hat{C} = \hat{P}\hat{A},\ \hat{C} = \hat{Q}\hat{B}. \tag{6.26}$$

Из этих соотношений сразу следует, что базовые функции $\hat{A},\hat{B}$ и $\hat{C}$ удовлетворяют по отдельности следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}\hat{A}_t - \hat{P}\hat{A}_x + [\hat{A},\hat{P}]\hat{A} = 0,\ \hat{C}_t - \hat{P}\hat{C}_x + \hat{C}^2 - \hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} = 0,\\ \hat{B}_t - \hat{Q}\hat{B}_y + [\hat{B},\hat{Q}]\hat{B} = 0,\ \hat{C}_t - \hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - \hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0,\\ \hat{P}^{-1}\hat{C}_y - \hat{Q}^{-1}\hat{C}_x + [\hat{P}^{-1}\hat{C},\hat{Q}^{-1}\hat{C}] = 0.\end{gathered} \tag{6.27}$$

Объединяя часть уравнений этой совокупности, в частности, получаем многомерное уравнение

$$\hat{C}_t - p\hat{P}\hat{C}_x - q\hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - p\hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} - q\hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0, \tag{6.28}$$

где p и q - два любых вещественных числа, связанных между собой условием $p+q=1$. Эта система может рассматриваться как известная система N^2-волн с квадратичной нелинейностью в размерности 1+2. Решения этой системы могут быть получены с помощью подстановки:

$$\hat{C} = \hat{T}_t\hat{T}^{-1},$$

где $\hat{T}$ - любое решение системы (6.24).

6.4.2 Задача M -волн в n -мерном пространстве

Рассмотренная система имеет естественное обобщение в размерности $1+n$:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} = \hat{P}_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\hat{T},\ \alpha = 1,\dots,n. \tag{6.29}$$

Как и в предыдущем примере, будем предполагать, что матрицы $\hat{P}_\alpha$ не вырождены, коммутируют между собой: $[\hat{P}_\alpha,\hat{Q}_\beta]=0$ и имеют элементы, независящие от $\mathbf{x}=(x^0,x^1,x^2,\dots,x^n)$. Условие взаимной коммутативности матриц $\hat{P}_\alpha$ необходимо для совместности системы (6.29).

Используя базовые соотношения, приводим уравнения (6.29) к следующему виду:

$$\hat{C} = \hat{P}_\alpha^{-1}\hat{A}_\alpha,\ \alpha = 1,\dots,n. \tag{6.30}$$

где для удобства введено обозначение $\hat{C}=\hat{A}_0$. Из этих соотношений сразу следует, что базовые функции $\hat{A}_j$ удовлетворяют по отдельности следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_\alpha - \hat{P}_\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{A}_\alpha + [\hat{A}_\alpha,\hat{P}_\alpha^{-1}]\hat{A}_\alpha = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} - \hat{P}_\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{C} + \hat{C}^2 - \hat{P}_\alpha^{-1}\hat{C}\hat{P}_\alpha\hat{C} = 0,\ \alpha = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

Умножая каждое из уравнений второй части системы (6.31) на числа Q_α, такие, что $\sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha = 1$ и складывая результаты, получаем многомерное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{C} - \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha\hat{P}_\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\hat{C} + \hat{C}^2 - \sum_{\alpha=1}^{n} Q_\alpha\hat{P}_\alpha^{-1}\hat{C}\hat{P}_\alpha\hat{C} = 0. \tag{6.32}$$

Эта система может рассматриваться как известная система N^2 -волн в многомерном пространстве размерности $1+n$ с квадратичной нелинейностью. Решения этой системы могут быть получены с помощью подстановки

$$\hat{C} = \hat{T}_t\hat{T}^{-1},$$

где $\hat{T}$ - любое решение системы (6.29).

Построение решений этой системы сводится к следующим вычислениям. Пусть $\mathbf{n}_m,\ m=1,\dots,N$ - набор собственных векторов матриц $\hat{P}_\alpha$, имеющих собственные числа $p_\alpha^{(m)}, \alpha=1,\dots,n; m=1,\dots,N$. Тогда общее решение системы (6.29) имеет такой вид:

$$\hat{T} = \int_C \sum_{m=1}^{N} R_m(\lambda)\hat{V}_m \exp(\lambda(\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha^{(m)} x_\alpha + t))d\lambda,$$

где интеграл берется по произвольному контуру в комплексной плоскости, $R_m(\lambda)$ - произвольные функции спектрального параметра λ, а постоянные матрицы $\hat{V}_\alpha$ имеют такой вид:

$$\hat{V}_m = (\underbrace{0,\ldots,0}_{m-1}, \mathbf{n}_m, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-m})$$

т.е. являются матрицами, единственным ненулевым столбцом которой является столбец с номером m, совпадающий с собственным вектором матриц $\hat{P}_\alpha$.

6.5 Интегрируемые модели автоволн в размерности 1+2

Рассмотрим теперь в качестве вспомогательного уравнения матричное уравнение следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{g}\hat{T}_{xy}, \tag{6.33}$$

где $\hat{g}$ - некоторая постоянная матрица. Базовые соотношения будем использовать в форме (6.25). Тогда уравнение (6.33) приводит к следующим двум соотношениям:

$$\hat{C} = \hat{g}(\hat{A}_y + \hat{A}\hat{B}),\ \hat{C} = \hat{g}(\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A}).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения совместности, приходим к двум матричным уравнениям для матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\begin{aligned}&\hat{A}_t - \hat{g}\hat{A}_{xy} - \hat{g}\hat{A}_x\hat{B} - \hat{g}\hat{A}_y\hat{A} + [\hat{A},\hat{g}](\hat{A}_y + \hat{A}\hat{B}) = 0,\\ &\hat{B}_t - \hat{g}\hat{B}_{xy} - \hat{g}\hat{B}_x\hat{B} - \hat{g}\hat{B}_y\hat{A} + [\hat{B},\hat{g}](\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A}) = 0.\end{aligned} \tag{6.34}$$

Сделаем в уравнениях формальную замену:

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \to \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

где $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$. В этом случае вспомогательное уравнение примет такой вид:

$$\hat{T}_t = \frac{\hat{g}}{4}\Delta\hat{T}, \tag{6.35}$$

где

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

- двумерный оператор Лапласа. Кроме этого, имеем:

$$\hat{A} = \hat{T}_z\hat{T}^{-1},\ \hat{B} = \hat{T}_{\bar{z}}\hat{T}^{-1}.$$

Отсюда следует, что в случае, если матрица $\hat{T}$, как решение уравнения (6.35), выбрана вещественной, то матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ будут комплексно сопряжены друг другу:

$$\hat{B} = \hat{A}^*.$$

Для выполнения условия вещественности решений (6.35) необходимо, чтобы матрица $\hat{g}$ также была вещественной. Последнее означает, что уравнения (6.34) для $\hat{A}$ и $\hat{B}$ также комплексно сопряжены друг другу:

$$\begin{aligned} &\hat{A}_t - \frac{1}{4}\hat{g}\Delta\hat{A} - \hat{g}\hat{A}_z\hat{A}^* - \hat{g}\hat{A}_{\bar{z}}\hat{A} + [\hat{A},\hat{g}](\hat{A}_{\bar{z}} + \hat{A}\hat{A}^*) = 0, \\ &\hat{A}_t^* - \frac{1}{4}\hat{g}\Delta\hat{A}^* - \hat{g}\hat{A}_z^*\hat{A}^* - \hat{g}\hat{A}_{\bar{z}}^*\hat{A} + [\hat{A}^*,\hat{g}](\hat{A}_z^* + \hat{A}^*\hat{A}) = 0. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Можно видеть, что эти уравнения переходят друг в друга при комплексном сопряжении в случае вещественной матрицы $\hat{g}$. Эти уравнения представляют собой, в зависимости от интерпретации, либо интегрируемый вариант диффузионных уравнений с кубической нелинейностью, либо при подходящей комплексификации уравнений - интегрируемый вариант уравнений типа НУШ. В покомпонентной записи эти уравнения содержат N^2 уравнений для отдельных элементов матриц $\hat{A}$ и $\hat{A}^*$, что выглядит достаточно громоздко.

6.6 Нелинейное уравнение Дирака

Важным примером использования предложенной общей схемы является возможность сконструировать интегрируемое с помощью подстановок нелинейное уравнение Дирака в размерности 1+3, имеющее также квадратичную нелинейность. Исследование этого уравнения и его решений и будет основной задачей данной главы.

Для вывода уравнения типа Дирака рассмотрим вспомогательное уравнение первого порядка в размерности 1+3 следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{T} = \sum_{\alpha=1}^{3}\hat{\sigma}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} + \hat{\mu}\hat{T}. \tag{6.37}$$

Здесь $\hat{T}$ - матрицы 2×2, а $\hat{\sigma}_\mu$ - матрицы Паули (3.6). Используя базовые соотношения

$$\hat{T}_t = \hat{A}_0\hat{T},\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\hat{T} = \hat{A}_\alpha\hat{T},\ \alpha = 1,2,3, \tag{6.38}$$

приходим к следующему матричному уравнению:

$$\hat{C} = \hat{A}_0 = \sum_{\alpha=1}^{3}\hat{\sigma}_\alpha\hat{A}_\alpha + \hat{\mu}. \tag{6.39}$$

Условия совместности схемы в данном случае можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\hat{A}_{\beta}-\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\hat{A}_{\alpha}+[\hat{A}_{\beta},\hat{A}_{\alpha}]=0,\ \alpha,\beta=1,\ldots,3,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_{\beta}-\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\hat{C}+[\hat{A}_{\beta},\hat{C}]=0,\ \beta=1,\ldots,3, \tag{6.40}$$

Сворачивая обе системы (6.40) по индексу β, предварительно умножив их соответственно на $\hat{\sigma}_{\beta}$ и используя (6.39), приходим к следующей системе для матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_{\beta}$, $\beta=1,2,3$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_{\alpha}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\hat{A}_{\alpha}+\hat{A}_{\alpha}\hat{C}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_{\beta}\hat{A}_{\alpha}\hat{A}_{\beta}-\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\hat{\mu}-\hat{\mu}\hat{A}_{\alpha}=0,\ \beta=1,\ldots,3,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{C}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_{\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\hat{C}+\hat{C}^{2}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_{\beta}\hat{C}\hat{A}_{\beta}-\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mu}-\hat{\mu}\hat{C}=0. \tag{6.41}$$

Для простоты далее будем рассматривать ситуации, когда $\hat{\mu}=const$. Покажем теперь, что при таком условии уравнения (6.41) можно рассматривать как нелинейные уравнения Дирака.

6.7 Переход к спинорной форме записи

Матричные уравнения (6.41) можно представить в векторном виде (см. Приложение), если каждую из матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_{\alpha}$ представить в виде одного вектора, составленного из их столбцов по правилу. Запишем матрицу $\hat{C}$ в виде двух столбцов:

$$\hat{C}=(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2),\ \mathbf{c}_1=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\end{pmatrix},\ \mathbf{c}_2=\begin{pmatrix}c_{12}\\ c_{22}\end{pmatrix}. \tag{6.42}$$

Введем следующий би-спинор $\mathbf{\Psi}_0$, имеющий вид:

$$\mathbf{\Psi}_0=\begin{pmatrix}c_{11}\\ c_{21}\\ c_{1,2}\\ c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{\Psi}_1^0\\ \mathbf{\Psi}_2^0\end{pmatrix}, \tag{6.43}$$

где $\boldsymbol{\psi}_1=\mathbf{c}_1$ и $\boldsymbol{\psi}_2=\mathbf{c}_2$ - спиноры. Тогда, согласно правилам тензорного произведения (см. Приложение), первое уравнение системы (6.41) можно записать в следующем виде:

$$\hat{S}_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi}_0+\sum_{\alpha=1}^{3}\hat{S}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\mathbf{\Psi}_0+\hat{E}\mathbf{\Psi}_0=0, \tag{6.44}$$

где

$$\hat{S}_0 = (\hat{I}\bigotimes\hat{I}),\ \hat{S}_\alpha = -(\hat{\sigma}_\alpha\bigotimes\hat{I}) = -\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_\alpha & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{\sigma}_\alpha\end{pmatrix},\ \alpha = 1,2,3.$$

а матрица $\hat{E}$ вычисляется по следующему правилу (см. Приложение) тензорного произведения матриц:

$$\hat{E} = \hat{I}\bigotimes\hat{A}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}(\hat{\sigma}_\alpha\bigotimes\hat{I})(\hat{I}\bigotimes\hat{A}_\alpha) - \hat{\mu}_0 = \sum_{j=0}^{3}\hat{S}_j A_j - \hat{\mu}_0.$$

Здесь введены обозначения:

$$A_\alpha = (\hat{I}\bigotimes\hat{A}_\alpha) = \begin{pmatrix}a_{11}^\alpha\hat{I} & a_{21}^\alpha\hat{I}\\ a_{12}^\alpha\hat{I} & a_{22}^\alpha\hat{I}\end{pmatrix},\ A_0 = (\hat{I}\bigotimes\hat{C}) = \begin{pmatrix}c_{11}\hat{I} & c_{21}\hat{I}\\ c_{12}\hat{I} & c_{22}\hat{I}\end{pmatrix},\ \hat{\mu}_0 = (\hat{\mu}\bigoplus\hat{I}).$$

По виду матрицы $\hat{E}$ ее можно интерпретировать (с точностью до размерного множителя) как энергию взаимодействия заряженной частицы с векторным потенциалом обобщенного электромагнитного поля с векторным потенциалом, представленным 4-вектором с компонентами в виде матриц $\hat{A}_j,\ j = 0,1,2,3$.

Умножая уравнение (6.44) на четырехрядную матрицу $\hat{\gamma}_0$:

$$\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{I}\\ -\hat{I} & \hat{0}\end{pmatrix},$$

приходим к уравнению, совпадающему с уравнением Дирака с точностью до размерных множителей функций, входящих в запись этого уравнения:

$$\sum_{j=0}^{3}\hat{\gamma}_j\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \widehat{A}_j\right)\mathbf{\Psi}_0 = \hat{m}\mathbf{\Psi}_0, \tag{6.45}$$

где введены обозначения

$$\hat{m} = \hat{\gamma}_0\hat{\mu}_0,\ \hat{\gamma}_\alpha = \hat{\gamma}_0\hat{S}_\alpha, \alpha = 1,2,3. \tag{6.46}$$

Определенным отличием данного уравнения от классического является то, что матрица $\hat{\gamma}_0$ совпадает с классической матрицей Дирака $\hat{\gamma}_5$, а не с классической матрицей Дирака:

$$\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix}\hat{I} & \hat{0}\\ \hat{0} & -\hat{I}\end{pmatrix}.$$

По аналогии с матрицей $\hat{C} = \hat{A}_0$ введем спинорное представление и матриц $\hat{A}_\alpha$. Именно, полагая

$$\hat{A}_\alpha = (\mathbf{a}_1^\alpha, \mathbf{a}_2^\alpha),\ \mathbf{a}_1^\mu = \begin{pmatrix}a_{11}^\alpha\\ a_{21}^\alpha\end{pmatrix},\ \mathbf{a}_2^\alpha = \begin{pmatrix}a_{12}^\alpha\\ a_{22}^\alpha\end{pmatrix}, \tag{6.47}$$

введем следующие би-спиноры Ψ_α:

$$\mathbf{\Psi}_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \\ a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi}_1^\alpha \\ \mathbf{\Psi}_2^\alpha \end{pmatrix}. \tag{6.48}$$

Опять с помощью правил тензорного произведения находим, что уравнения, которым удовлетворяют спиноры $\mathbf{\Psi}_\alpha$ имеют уравнения Дирака следующего вида:

$$\sum_{j=0}^{3} \hat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \widehat{A}_j \right) \mathbf{\Psi}_\alpha = \hat{m} \mathbf{\Psi}_\alpha, \ \alpha = 1,2,3, \tag{6.49}$$

где матрицы $\hat{A}_j$ имеют тот же вид (6.46), что и в уравнении для $\mathbf{\Psi}_0$.

К этим соотношениям, записанным в спинорном виде, необходимо добавить и соотношение (6.39), также представленное в спинорном виде:

$$\mathbf{\Psi}_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \hat{S}_\alpha \mathbf{\Psi}_\alpha + \mathbf{M}, \tag{6.50}$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что би-спиноры $\mathbf{\Psi}_j$, $j = 01,2,3$ линейно зависимы.

Аналогично в спинорном виде можно представить и уравнение (6.37). Полагаем:

$$\hat{T} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2), \ \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}, \ \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}, \tag{6.51}$$

вводим би-спинор:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix},$$

который теперь удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\nu=0}^{3} \hat{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{\Phi} + \hat{m} \mathbf{\Phi} = 0, \tag{6.52}$$

что соответствует линейному уравнению Дирака для заряженной частицы с массой, определяемой матрицей $\hat{m}$.

Также можно преобразовать в спинорную форму и базовые соотношения (6.38). Они будут выглядеть таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\mathbf{\Phi} = \hat{B}_j\mathbf{\Phi}, \;\; j = 0,1,2,3, \tag{6.53}$$

где $B_j = (\hat{A}_j \otimes \hat{I})$ - матрицы 4×4, отличные от матриц A_j. В силу выполнения базовых соотношений в спинорной форме (6.53), выполняются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x^k}B_j - \frac{\partial}{\partial x^j}B_k + [B_j, B_k] = 0, \;\; j,k = 0,1,2,3. \tag{6.54}$$

6.8 Интерпретация

Уравнения Дирака (6.44) и (6.45) описывают динамику трех заряженных частиц (в силу линейной зависимости би-спиноров частиц) со спином $1/2$ (фермионов) в совокупном поле, созданном самими частицами, потенциал которого описывается матрицами A_j. Компоненты 4-потенциала $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$, в свою очередь, определяются би-спинорами Ψ_j в соответствии с формулами (6.48) и (6.43). То, что компоненты векторного потенциала, созданного частицами поля, выражаются через матрицы, говорит о том, что данное поле следует рассматривать как калибровочное поле типа Янга-Миллса со значениями в алгебре матриц второго порядка $SL[2]$. Тензор напряженности этого поля со значениями в той же подалгебре матриц 4×4 имеет вид:

$$\hat{F}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k}\hat{A}_j - \frac{\partial}{\partial x^j}\hat{A}_k + [\hat{A}_j, \hat{A}_k].$$

Для проверки, является ли такое поле в точности полем Янга-Миллса, необходимо еще установить, каким уравнениям удовлетворяет напряженность этого поля в силу выполнения вспомогательного уравнения (6.37). Заметим только, что напряженность этого поля отлична от нуля, хотя напряженность поля с компонентами B_j равна нулю в силу соотношений (6.54). Таким образом, полученная модель представляет собой специфический случай самосогласованной модели взаимодействия четырех фермионов с собственным полем, подобным полю Янга-Миллса.

Полученную систему можно также использовать в качестве основного состояния системы четырех фермионов, а квантовые состояния в ней можно описывать с помощью теории возмущений вблизи этого основного состояния (см., например, [75]). В этом случае, кроме самой нелинейной модели, следует рассмотреть и уравнения для ее возмущений первого порядка.

Уравнения для возмущений удобно строить исходя из их первичной матричной формы, а затем перейти уже к спинорной записи этих уравнений.

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{A}_\alpha-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta\hat{A}_\alpha+\delta\hat{A}_\alpha\hat{C}+\hat{A}_\alpha\delta\hat{C}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(\delta\hat{A}_\alpha\hat{A}_\beta+\hat{A}_\alpha\delta\hat{A}_\beta\right)=\hat{m}\delta\hat{A}_\alpha,\ \alpha=1,\ldots,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\hat{C}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\delta\hat{C}+\delta\hat{C}\hat{C}+\hat{C}\delta\hat{C}-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta(\delta\hat{C}\hat{A}_\beta+\hat{C}\delta\hat{A}_\beta)=\hat{m}\delta\hat{C}. \qquad (6.55)$$

Переходя к спинорной записи, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_\alpha-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xi_\alpha+A_0\xi_\alpha+B_\alpha\xi_0-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{\sigma}_\beta\left(A_\beta\xi_\alpha+B_\alpha\xi_\beta\right)=\hat{m}\xi_\alpha,\ \beta=1,\ldots,3,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_0-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\xi_0+(A_0+B_0)\xi_0-\sum_{\beta=1}^{3}\hat{S}_\beta(A_\beta\xi_0+B_0\xi_\beta)=\hat{m}\xi_0. \qquad (6.56)$$

Здесь

$$\xi_j=\begin{pmatrix}\delta a_{11}^j\\ \delta a_{21}^j\\ \delta a_{12}^j\\ \delta a_{22}^j\end{pmatrix},\ j=0,1,2,3.$$

6.9 Построение решений для нелинейного уравнения Дирака

Вычислим решения вспомогательного уравнения в форме (6.52). Будем искать решение в следующей форме:

$$\mathbf{\Phi}=\mathbf{u}\exp(i\sum_{j=0}^{3}p_jx_j),$$

где $\mathbf{u}$ - постоянный спинор, а $\mathbf{p}=(p_0,p_1,p_2,p_3)$ - параметры решения, представляющие по сути компоненты вектора энергии-импульса частицы, описывающейся уравнением Дирака (6.52). В этом случае (6.52) переходит в задачу на собственные числа и вектора:

$$\sum_{j=0}^{3}\hat{\gamma}_j\mathbf{u}-i\hat{m}\mathbf{u}=0.$$

Эту систему можно представить в следующей форме:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha\hat{S}_\alpha+i\hat{\mu}_0\right)\mathbf{u}=p_0\mathbf{u}.$$

Последняя система представляет собой задачу на собственные числа и вектора матрицы:

$$\hat{W}=\left(\sum_{\alpha=1}^{3}p_\alpha\hat{S}_\alpha+i\hat{\mu}_0\right).$$

Обозначим через $E_a=E_a(p_1,p_2,p_3\,|\,\hat{\mu}_0),\ a=1,2,3,4$ собственные числа матрицы $\hat{W}$, которым соответствуют собственные вектора $u_a(\hat{\mu})$:

$$\hat{W}u_a = E_a(p_1, p_2, p_3 \mid \hat{\mu}_0)u_a, a = 1,2,3,4.$$

Тогда общее решение для функции $\hat{T}$ можно представить в таком виде:

$$\hat{T} = \int \sum_{a=1}^{4} U_a(p_1, p_2, p_3) u_a(\hat{\mu}_0) \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha x_\alpha + iE_a(p_1, p_2, p_3 \mid \hat{\mu}_0)t \right) dp_1 dp_2 dp_3. \quad (6.57)$$

Здесь $U_a(p_1, p_2, p_3), a = 1,2,3,4$ - произвольные функции $p = (p_1, p_2, p_3)$. Решения для спиноров $\Psi_j, j = 0,1,2,3$ при этом вычисляются с помощью подстановок (6.38) и преобразования компонентов матриц $\hat{C}$ и $\hat{A}_\alpha$ в спинорную форму (6.42) и (6.47).

Полученные решения позволяют построить теперь и точные решения для возмущений. Для этого достаточно воспользоваться базовыми соотношениями (6.1), связывающими функции $\hat{A}_j, j = 0,1,2,3$ с матрицей $\hat{T}$. Возмущения первого порядка вблизи решения нелинейного уравнения Дирака, соответствующего матрицам $\hat{T}^{(0)}$ и $\hat{A}_j^{(0)}$ для этих соотношений, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \delta \hat{T}^{(0)} = \delta \hat{A}_j \hat{T}^{(0)} + \hat{A}_j^{(0)} \delta \hat{T}.$$

Отсюда находим, что возмущения матриц $\delta \hat{A}_j$ выражаются через возмущения матрицы $\hat{T}^{(0)}$, саму матрицу и $\hat{A}_j^{(0)}$ следующим образом:

$$\delta \hat{A}_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \delta \hat{T} - \hat{A}_j^{(0)} \delta \hat{T} \right) (\hat{T}^{(0)})^{-1}. \quad (6.58)$$

Используя преобразование к спинорному виду, можем получить возмущения для би-спиноров $\xi_j, j = 0,1,2,3$, которые удовлетворяют уравнениям (6.56). Возмущения матрицы $\hat{T}$ находятся непосредственно из общего решения (6.57), в котором возмущения могут быть связаны с произвольными функциями $U_a(p_1, p_2, p_3)$ и матрицей $\hat{\mu}$, входящей во вспомогательное уравнение для $\hat{T}$, от которого не зависит явный вид уравнений (6.49) и (6.45). Таким образом, (6.58) полностью решает задачу о возмущениях вблизи того или иного точного решения уравнений Дирака и может быть использовано для задач квантовой динамики.

6.10 Приложение

Матричное уравнение

$$\hat{A}\hat{X}\hat{B} + \hat{C}\hat{X}\hat{D} = \hat{F} \quad (6.59)$$

относительно матрицы $\hat{X} = (x_1, \ldots x_N)$ размерности $N \times N$, где x_i - столбцы матрицы $\hat{X}$ с номером $i=1,\dots,N$, может быть представлено в виде векторного уравнения относительно вектора размерности $d=N^2$:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

В этом уравнении $\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D}$ и $\hat{F}$ - известные матрицы той же размерности $n\times n$. Введем обозначения:

$$(\hat{I}\bigoplus\hat{B})=\begin{pmatrix} B_{11}\hat{I} & B_{21}\hat{I} & \cdots & B_{N1}\hat{I} \\ B_{12}\hat{I} & B_{22}\hat{I} & \cdots & B_{N2}\hat{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{1N}\hat{I} & B_{2N}\hat{I} & \cdots & B_{NN}\hat{I} \end{pmatrix},\ (\hat{I}\bigoplus\hat{D})=\begin{pmatrix} D_{11}\hat{I} & D_{21}\hat{I} & \cdots & D_{N1}\hat{I} \\ D_{12}\hat{I} & D_{22}\hat{I} & \cdots & D_{N2}\hat{I} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{1N}\hat{I} & D_{2N}\hat{I} & \cdots & D_{NN}\hat{I} \end{pmatrix}$$

$$(\hat{A}\bigoplus\hat{I})=\begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{A} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{A} \end{pmatrix},\ (\hat{C}\bigoplus\hat{I})=\begin{pmatrix} \hat{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{C} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \hat{C} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{I}$ - единичная матрица размерности $N\times N$. Тогда уравнение (6.59) эквивалентно системе уравнений

$$\left((\hat{A}\bigoplus\hat{I})(\hat{I}\bigoplus\hat{B})+(\hat{C}\bigoplus\hat{I})(\hat{I}\bigoplus\hat{D})\right)X=F,$$

где

$$F=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_N \end{pmatrix},$$

а $f_1, f_2,\dots, f_N$ - столбцы матрицы $\hat{F}$.

7 Многофункциональные подстановки и МОЗ

7.1 Функциональные подстановки и МОЗ

В предыдущих главах было продемонстрировано на нескольких примерах, что при использовании дополнительных вспомогательных уравнений функциональные подстановки дают возможность получать частные решения нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью МОЗ. Это касалось и уравнения КдВ, и НУШ. Однако многосолитонные решения уравнений, интегрируемых с помощью МОЗ, строить с помощью развитых схем функциональных подстановок оказывается проблематично. Для того чтобы МФП давал возможность строить решения, подобные многосолитонным решениям, необходимо, чтобы схема базовых соотношений содержала множество функций, достаточное для представления многосолитонного решения. Для реализации такой возможности необходимо модифицировать общую схему метода.

7.2 Функциональные подстановки второго порядка

Основной принцип видоизменений схемы МФП, предлагаемый в данной работе, продемонстрируем вначале на примере простой их формы, связанной с введением трех вспомогательных матричных функций размерности $n \times n$ вместо одной в стандартной схеме МФП, кратко изложенной выше.

В качестве базовых соотношений типа (3.1) рассмотрим систему соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{xx} &= \hat{a}_0(x,t)\hat{T} + \hat{a}_1(x,t)\hat{T}_x + \hat{a}_2(x,t)\hat{T}_t,\\
\hat{T}_{xt} &= \hat{b}_0(x,t)\hat{T} + \hat{b}_1(x,t)\hat{T}_x + \hat{b}_2(x,t)\hat{T}_t,\\
\hat{T}_{tt} &= \hat{c}_0(x,t)\hat{T} + \hat{c}_1(x,t)\hat{T}_x + \hat{c}_2(x,t)\hat{T}_t.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

По порядку производных в левой части данную систему будем называть базовой системой второго порядка. В таком подходе число коэффициентов базовых соотношений равно девяти. Для задания всех коэффициентов этой системы теперь требуется задать три линейно независимые матричные функции: $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$. В результате систему базовых соотношений можно записать в форме матричного равенства:

$$F_3 = R_3 \Psi_3, \tag{7.2}$$

где введены обозначения:

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} \hat{T}_1 & \hat{T}_2 & \hat{T}_3 \\ \hat{T}_{1,x} & \hat{T}_{2,x} & \hat{T}_{3,x} \\ \hat{T}_{1,t} & \hat{T}_{2,t} & \hat{T}_{3,t} \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \\ \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \\ \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} \hat{T}_{1,xx} & \hat{T}_{2,xx} & \hat{T}_{3,xx} \\ \hat{T}_{1,xt} & \hat{T}_{2,xt} & \hat{T}_{3,xt} \\ \hat{T}_{1,tt} & \hat{T}_{2,tt} & \hat{T}_{3,tt} \end{pmatrix}. \qquad (7.3)$$

Если матрица Ψ_3 не вырождена, то элементы матрицы R_3 вычисляются однозначно из матричного соотношения

$$R_3 = F_3 \Psi_3^{-1}.$$

Систему базовых уравнений (7.1) можно представить в виде пары матричных уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{a}_0 & \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \\ \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix}, \qquad (7.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} & \hat{I} \\ \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \\ \hat{c}_0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix} = B_3 \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{T}_x \\ \hat{T}_t \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{0}$ - матрица со всеми нулевыми элементами, а $\hat{I}$ - единичная матрица размерности $n \times n$. Система (7.4) получена из (7.1) с помощью дополнения ее двумя формальными тождествами:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{T} = \hat{T}_x, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{T} = \hat{T}_t,$$

которые содержатся в первых строках матриц A_3 и B_3 общей размерности $3n \times 3n$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_3 = A_3\Psi_3, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Psi_3 = B_3\Psi_3, \quad . \qquad (7.5)$$

По построению эта система совместна. Поэтому, если функциональные параметры базовой системы вычисляются из (7.1) при заданных функциях $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3$ (при условии $\det\Psi_2 \neq 0$), то для матриц $\hat{A}_3$ и B_3 выполняется матричное тождество:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{A}_3 - \frac{\partial}{\partial x}\hat{B}_3 + [\hat{A}_3, \hat{B}_3]\right)\hat{\Psi}_3 = 0. \qquad (7.6)$$

Эта система уравнений приводится к шести матричным уравнениям, имеющим вид:

$$\hat{a}_{0,t} - \hat{b}_{0,x} + (\hat{a}_1 - \hat{b}_2)\hat{b}_0 + \hat{a}_2\hat{c}_0 - \hat{b}_1\hat{a}_0 = 0,$$

$$\hat{a}_{1,t} - \hat{b}_{1,x} + \hat{a}_2\hat{c}_1 - \hat{b}_2\hat{b}_1 + [\hat{a}_1, \hat{b}_1] - \hat{b}_0 = 0,$$

$$\hat{a}_{2,t} - \hat{b}_{2,x} - \hat{b}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_2\hat{c}_2 + (\hat{a}_1 - \hat{b}_2)\hat{b}_2 + \hat{a}_0 = 0, \qquad (7.7)$$

$$\hat{b}_{0,t} - \hat{c}_{0,x} + \hat{b}_1\hat{b}_0 + \hat{b}_2\hat{c}_0 - \hat{c}_1\hat{a}_0 - \hat{c}_2\hat{b}_0 = 0,$$
$$\hat{b}_{1,t} - \hat{c}_{1,x} + (\hat{b}_1 - \hat{c}_2)\hat{b}_1 + \hat{b}_2\hat{c}_1 - \hat{c}_1\hat{a}_1 - \hat{c}_0 = 0,$$
$$\hat{b}_{2,t} - \hat{c}_{2,x} - \hat{c}_1\hat{a}_2 + \hat{b}_1\hat{b}_2 + [\hat{b}_2, \hat{c}_2] + \hat{b}_0 = 0.$$

Система (7,7) содержит шесть матричных уравнений для девяти коэффициентов базовых соотношений и является незамкнутой. В соответствии с общей идеологией МФП, если $\hat{T}_i$ выбирать из множества решений уравнений определенного типа, то к системе уравнений (7.7) добавляются уравнения на коэффициенты базовых соотношений, которые замыкают эту систему.

7.2.1 Обобщенные уравнения Бюргерса

В качестве примера рассмотрим вспомогательное уравнение в форме уравнения теплопроводности, аналогичное тем уравнениям, которые используются для вывода уравнения Бюргерса в схеме МФП [39]:

$$\hat{T}_{i,xx} = \lambda\hat{T}_i + u_0\hat{T}_{i,x} + \varepsilon\hat{T}_{i,t}, \quad i = 1,2,3, \tag{7.8}$$

где $u_0, \varepsilon, \lambda$ - некоторые вещественные постоянные. Сравнивая эти соотношения с базовыми (7.1), находим: $a_0 = \lambda$, $a_1 = u_0 = const$, $a_2 = \varepsilon = const$. В результате имеем:

<u>**Утверждение 7.1.**</u> Функции $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3$ удовлетворяют замкнутой системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\hat{b}_{0,t} - \hat{b}_{0,xx} - 2\hat{b}_{2,x}\hat{b}_0 - u_0\hat{b}_{0,x} - 2\lambda\hat{b}_{1,x} = 0, \\ &\varepsilon\hat{b}_{1,t} - \hat{b}_{1,xx} - 2\hat{b}_{2,x}\hat{b}_1 - u_0\hat{b}_{1,x} - 2\hat{b}_{0,x} = 0, \\ &\varepsilon\hat{b}_{2,t} - \hat{b}_{2,xx} - 2\hat{b}_{2,x}\hat{b}_2 - u_0\hat{b}_{2,x} - 2\hat{b}_{1,x} = 0. \end{aligned} \tag{7.9}$$

и системе соотношений для функций $\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{c}_2$:

$$\hat{c}_0 = \varepsilon^{-1}[\hat{b}_{0,x} + \hat{b}_2\hat{b}_0 + \lambda\hat{b}_1 - u_0\hat{b}_2\hat{b}_1], \quad \hat{c}_1 = \varepsilon^{-1}[\hat{b}_{1,x} + \hat{b}_2\hat{b}_1 + \hat{b}_0],$$
$$\hat{c}_2 = \varepsilon^{-1}[\hat{b}_{2,x} + \hat{b}_2^2 - \lambda\hat{I} + \lambda\hat{b}_1 - u_0\hat{b}_2]. \tag{7.10}$$

Уравнения (7.9) представляют собой систему уравнений, обобщающую уравнение Бюргерса на матричный случай. В матричном виде эта система при $\varepsilon = i$ может служить также моделью для волн в оптической среде определенного вида. Однако полученные уравнения имеют смысл и в случае скалярных базовых и вспомогательных функций.

Заменим все матрицы $\hat{a}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i$ в соотношениях (7.9) и (7.10) на скалярные функции, что эквивалентно матрицам размерности 1×1. Тогда уравнения (7.9) примут такой вид:

$$\varepsilon b_{0,t} - b_{0,xx} - 2b_{2,x}b_0 - u_0 b_{0,x} - 2\lambda b_{1,x} = 0,$$
$$\varepsilon b_{1,t} - b_{1,xx} - 2b_{2,x}b_1 - u_0 b_{1,x} - 2b_{0,x} = 0, \qquad (7.11)$$
$$\varepsilon b_{2,t} - b_{2,xx} - 2b_{2,x}b_2 - u_0 b_{2,x} - 2b_{1,x} = 0.$$

Эта система представляет связанную между собой систему уравнений Бюргерса, что может иметь приложение в задачах гидродинамики и плазмы.

7.2.2 Вспомогательные уравнения первого порядка

В качестве еще одного примера использования полученных соотношений рассмотрим вспомогательное уравнение в форме матричных уравнений первого порядка:

$$\hat{T}_{i,x} = \hat{H}\hat{T}_{i,t} + \hat{Q}\hat{T}_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (7.12)$$

Здесь $\hat{H}$ и $\hat{Q}$ - постоянные матрицы. Отличие процедуры использования этой системы от той, которая рассматривалась в предыдущем примере, состоит в том, что теперь для получения информации о вторых производных вспомогательных функций систему (7.12) необходимо дифференцировать. Дифференцируя систему (7.12) по x и t, находим:

$$\hat{T}_{i,xx} = \hat{H}\hat{T}_{i,tx} + \hat{Q}\hat{T}_{i,x}$$
$$\hat{T}_{i,xt} = \hat{H}\hat{T}_{i,tt} + \hat{Q}\hat{T}_{i,t}, \quad i = 1,2,3.$$

Учитывая первое соотношение системы (7.1), приходим к следующей модификации базовых соотношений:

$$\hat{T}_{i,xx} = \hat{a}_0\hat{T}_i + \hat{a}_1\hat{T}_{i,x} + \hat{a}_2\hat{T}_{i,t},$$
$$\hat{T}_{i,xt} = \hat{H}\hat{a}_0\hat{T}_i + (\hat{H}\hat{a}_1 + \hat{Q})\hat{T}_{i,x} + \hat{H}\hat{a}_2\hat{T}_{i,t}, \qquad (7.13)$$
$$\hat{T}_{i,tt} = \hat{H}^2\hat{a}_0\hat{T}_i + (\hat{H}^2\hat{a}_1 + \hat{H}\hat{Q})\hat{T}_{i,x} + (\hat{H}^2\hat{a}_2 + \hat{Q})\hat{T}_{i,t}, \quad i = 1,2,3.$$

Отсюда находим следующие соотношения:

$$\hat{b}_0 = \hat{H}\hat{a}_0, \ \hat{b}_1 = \hat{H}\hat{a}_1 + \hat{Q}, \ \hat{b}_2 = \hat{H}\hat{a}_2, \quad \hat{c}_0 = \hat{H}^2\hat{a}_0, \quad \hat{c}_1 = \hat{H}^2\hat{a}_1 + \hat{H}\hat{Q}, \quad \hat{c}_2 = \hat{H}^2\hat{a}_2 + \hat{Q}. \qquad (7.14)$$

Подставляя эти соотношения в систему (7.7), приходим к одной нелинейной системе относительно функций $\hat{a}_i$:

$$\hat{a}_{0,t} - \hat{H}\hat{a}_{0,x} + [\hat{a}_1, \hat{H}]\hat{a}_0 + [\hat{a}_2, \hat{H}]\hat{H}\hat{a}_0 - \hat{Q}\hat{a}_0 = 0,$$
$$\hat{a}_{1,t} - \hat{H}\hat{a}_{1,x} + [\hat{a}_1, \hat{H}]\hat{a}_1 + [\hat{a}_2, \hat{H}](\hat{H}\hat{a}_1 + \hat{Q}) + [\hat{a}_1, \hat{Q}] - \hat{H}\hat{a}_0 = 0, \qquad (7.15)$$
$$\hat{a}_{2,t} - \hat{H}\hat{a}_{2,x} + [\hat{a}_1, \hat{H}]\hat{a}_2 + [\hat{a}_2, \hat{H}]\hat{H}\hat{a}_2 + [\hat{a}_2, \hat{Q}] - \hat{a}_0 = 0.$$

В случае скалярных функций эта система оказывается линейной и поэтому малоинтересна. Однако уже в размерности матриц 2×2, по аналогии с моделями (3.17), эти уравнения приводят к множеству новых интегрируемых систем типа (3.23).

7.3 Дополнительные вспомогательные соотношения и уравнение КдВ

Согласно общей идее, которая была первоначально продемонстрирована в [45, 50] на примере НУШ, для того чтобы с помощью подстановок получить решения уравнений, интегрируемых с помощью МОЗ, в общую схему замыкания базовой системы необходимо включить дополнительные вспомогательные уравнения. В качестве основного примера реализации такого подхода рассмотрим ее применение для построения многосолитонных решений уравнений КдВ.

Рассмотрим систему базовых соотношений (7.1) со скалярными функциями $T_i(x,t), i=1,2,3$, которые удовлетворяют системе вспомогательных уравнений следующего вида:

$$T_{i,xxx} = T_{i,t}, \;\; T_{i,xx} = \lambda_i T_i, \; i=1,\ldots,3, \tag{7.16}$$

где $\lambda_i, i=1,2,3$ - некоторые постоянные. Каждая функция T_i теперь удовлетворяет паре уравнений и поэтому выбирается из более ограниченного класса решений, чем в рассмотренном выше случае с уравнением теплопроводности. Важным является то, что оба типа вспомогательных уравнений можно, исключив из них основные функции T_i, представить в виде дополнительных уравнений для коэффициентов a_i, b_i, c_i базовых соотношений. Эти дополнительные уравнения позволяют, не меняя вида решений, заданных базовыми соотношениями, существенно расширить множество уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты базовых соотношений. В результате среди этого множества уравнений при правильном подборе дополнительной совокупности вспомогательных уравнений содержатся и уравнения, интегрируемые с помощью МОЗ. Продемонстрируем это на примере уравнения КдВ.

Соотношения (7.16) генерируют дополнительные к (7.6) соотношения для элементов матриц A_3 и B_3, определенных в (7.4). Дифференцируя (7.4) по x, находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{\Psi}_3 = \left(\hat{A}_{3.x} + \hat{A}_3^2\right)\hat{\Psi}_3 = \hat{U}_3\hat{\Psi}_3 = \hat{\Psi}_3\hat{L}, \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\hat{\Psi}_3 = \left(\hat{A}_{3,xx} + 2\hat{A}_{3,x}\hat{A}_3 + \hat{A}_3\hat{A}_{3,x} + \hat{A}_3^3\right)\hat{\Psi}_3 = \hat{B}_3\hat{\Psi}_3, \tag{7.18}$$

где матрица Ψ_3 определена в (7.3), а матрицы $\hat{U}_3$ и $\hat{L}_3$ такие:

$$U_3=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & 1\\ B_0 & B_1 & B_2\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$B_0=a_{0,t}+a_1b_0+a_2c_0,\ B_1=a_{1,t}+a_1b_1+a_0+a_2c_1,$$

$$B_2=a_{2,t}+a_1b_2+a_2c_2+a_0,$$

Подставляя это соотношение в (7.6), приходим к матричному уравнению

$$\hat{A}_{3,t}=\hat{A}_{3,xxx}+\frac{\partial}{\partial x}\left(2\hat{A}_{3,x}\hat{A}_3+\hat{A}_3\hat{A}_{3,x}+\hat{A}_3^3\right)+[\hat{A}_3,\hat{A}_{3,xx}]+2[\hat{A}_3,\hat{A}_{3,x}]\hat{A}_3+\hat{A}_3[\hat{A}_3,\hat{A}_{3,x}]. \qquad (7.19)$$

Для того чтобы в покомпонентной записи этих уравнений содержалось уравнение КдВ, к нему необходимо добавить условия, вытекающие из (7.17). Для исключения из этих условий матрицы L_3 их можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{U}_3+[\hat{U}_3,\hat{A}_3]=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_3+[\hat{U}_3,\hat{B}_3]=0 \qquad (7.20)$$

Проблема состоит в том, что изначально неясно, какой именно коэффициент базовых соотношений (или их комбинация) удовлетворяет именно уравнению КдВ. Все остальные коэффициенты будут удовлетворять уравнениям других типов. Чтобы решить эту проблему, воспользуемся сравнением базовых уравнений с одевающими операторами метода преобразований Дарбу [63, 65, 32] для КдВ.

7.4 Метод сравнения с преобразованиями Дарбу для уравнения КдВ

Уравнение КдВ

$$u_t+\frac{3}{2}uu_x-\frac{1}{4}u_{xxx}=0, \qquad (7.21)$$

имеет представление Лакса в форме условия коммутативности операторов:

$$\hat{L}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u(x,t),\ \hat{A}=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{3}{4}u_x(x,t).$$

Для построения точных решений этого уравнения можно применить метод преобразований Дарбу [65, 64]. Преобразование Дарбу для уравнений КдВ строится как процедура “одевания голых” операторов:

$$\hat{A}_0=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^3},\ \hat{L}_0=\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Для одевания рассматривается линейный оператор $\hat{M}_N$ следующего вида:

$$\hat{M}_N=\frac{\partial^N}{\partial x^N}+\xi_N(x,t)\frac{\partial^{N-1}}{\partial x^{N-1}}+\ldots+\xi_0(x,t). \qquad (7.22)$$

Для того чтобы операторы $\hat{A}_0$, $\hat{L}_0$ и $\hat{M}_N$ обладали N общими собственными функциями, необходимо и достаточно, чтобы существовали операторы $\hat{D}_A$ и $\hat{D}_L$, такие что

$$[\hat{A}_0,\hat{M}_N]=\hat{D}_A\hat{M}_N,\quad [\hat{L}_0,\hat{M}_N]=\hat{D}_L\hat{M}_N. \tag{7.23}$$

Выполнения этих условий можно добиться явным заданием N функций $\psi_k, k=1,\cdots,N$, которые одновременно удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\hat{A}_0\psi_k=\frac{\partial}{\partial t}\psi_k-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi_k=0,\ \hat{L}_0\psi_k=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_k=\lambda_k\psi_k,\ k=1,\ldots,N, \tag{7.24}$$

при условии, что все они являются собственными функциями оператора $\hat{M}_N$, отвечающими его нулевому собственному значению:

$$\hat{M}_K\psi_k=\left[\frac{\partial^K}{\partial x^K}+\xi_K(x,t)\frac{\partial^{K-1}}{\partial x^{K-1}}+\ldots+\xi_0(x,t)\right]\psi_k=0,\ k=1,\ldots,K. \tag{7.25}$$

Последние K уравнений можно рассматривать как неоднородную линейную алгебраическую систему K уравнений относительно K коэффициентов $\xi_k, k=0,\ldots,K-1$, которая имеет единственное решение при условии линейной независимости функций ψ_k. Согласно указанной теореме, операторы $\hat{D}_A$ и $\hat{D}_L$ существуют, а их явный вид можно определить, непосредственно вычисляя коммутаторы в правых частях операторных уравнений (7.23). В частности, имеем:

$$\hat{D}_L=u(x,t),\ \ \hat{D}_A=-\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3}{4}u_x,$$

где $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t)=2\xi_{N-1,x}. \tag{7.26}$$

В результате можно показать, что операторы

$$\hat{A}_1=\hat{A}_0-\hat{D}_A=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{3}{4}u_x, \tag{7.27}$$

$$\hat{L}_1=\hat{L}_0-\hat{D}_L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u(x,t), \tag{7.28}$$

коммутируют между собой, т.е. обладают полным набором общих собственных функций $\phi(x,t,\lambda)$, имеющих вид

$$\phi(x,t,\lambda)=\hat{M}_K\psi(x,t,\lambda),$$

где $\psi(x,t,\lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$\hat{A}_0\psi(x,t,\lambda)=0,\ \hat{L}_0\psi(x,t,\lambda)=\lambda\psi(x,t,\lambda),$$

для любого комплексного значения спектрального параметра λ. Вычисляя коммутатор операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{L}_1$, находим:

$$[\hat{A}_1,\hat{L}_1] = -(u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{4}u_{xxx}) = 0,$$

т.е. функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению КдВ (7.21).

Сравнивая соотношения (7.24) с (7.16), видим их полную идентичность при условии, что $K = 3$ и равенствах $\psi_i = T_i, i = 1,2,3$. При этом базовые соотношения (7.1) необходимо сравнить с уравнениями (7.25) на собственные функции одевающего оператора Дарбу, с помощью которых вычисляются коэффициенты, соответственно, базовых соотношений и коэффициенты ξ_i одевающего оператора $\hat{M}_3$. Первое уравнение из (7.1), заменяя в нем производные $T_{k,t}$ на производные $T_{k,xxx}$, можно записать в следующем виде:

$$T_{k,xxx} - \frac{1}{a_2}T_{k,xx} + \frac{a_1}{a_2}T_{k,x} + \frac{a_0}{a_2}T_k = 0, \quad k = 1,2,3. \tag{7.29}$$

что в точности совпадает с (7.25) при выполнении условий

$$\xi_2 = -\frac{1}{a_2}, \quad \xi_1 = \frac{a_1}{a_2}, \quad \xi_0 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Отсюда следует $\xi_2 = -a_2^{-1}$. Поэтому функция

$$u(x,t) = 2\xi_{2,x} = 2\frac{a_{2,x}}{a_2^2}, \tag{7.30}$$

удовлетворяет уравнению КдВ в соответствии с методом преобразований Дарбу, изложенным выше. Следовательно, решения, которые получаются с помощью подстановок второго порядка для уравнения КдВ, представляют собой 3-солитонные (квазисолитонные) решения этого уравнения.

Оставшиеся два уравнения системы базовых соотношений (7.1) после замены $T_{k,t}$ на $T_{k,xxx}$ выглядят так:

$$\begin{aligned} &T_{k,xxxx} - b_2T_{k,xxx} - b_1T_{k,x} - b_0T_k = 0, \\ &T_{k,xxxxxx} - c_2T_{k,xxx} - c_1T_{k,x} - c_0T_k = 0, \; k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Формально операторы порядка 4 и 6, соответствующие этим уравнениям, также можно рассматривать как одевающие для уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты этих операторов. Число ненулевых коэффициентов этих операторов равно трем. Следовательно, из условия, что функции T_k являются их собственными функциями, отвечающими нулевому собственному значению, полностью определяют их коэффициенты $b_i(x,t)$ и $c_i(x,t)$.

7.5 Подстановки произвольного порядка

Представленная схема МФП может быть обобщена. Рассмотрим систему дифференциальных соотношений с производными суммарного порядка N следующего вида:

$$\hat{T}^{[n,N-n]} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\hat{A}_{k,m}^{n,N-n}(x,t)\hat{T}^{[k,m]},\ n = 0,1,\cdots,N. \tag{7.32}$$

Здесь и далее введены обозначения:

$$\hat{T}^{[n,m]} = \frac{\partial^{n+m}\hat{T}}{\partial x^n \partial t^m},\ n,k = 0,1,2\ldots.$$

Эта система, которую в дальнейшем будем называть **базовой порядка N**, очевидно обобщает схему подстановок второго порядка на случай подстановок произвольного конечного порядка N. Как и в случае подстановок второго порядка (7.1), эта система является недоопределенной по отношению к коэффициентам $\hat{A}_{km}^{n,N-}(x,t)$ базовых соотношений - число коэффициентов превышает число соотношений. Действительно, (7.32) содержит ровно $N+1$ дифференциальных соотношений с $K=(N+1)^2 N/2$ функциональными матричными коэффициентами $\hat{A}_{km}^{n,N-}(x,t)$, которые связывают производные порядка N со всеми $(N+1)N/2$ производными более низкого порядка. Для использования (7.32) в качестве схемы МФП необходимо формально замкнуть эту систему относительно $\hat{A}_{km}^{n,N}(x,t)$. Эта процедура осуществляется с помощью требования, чтобы все дифференциальные соотношения обращались в тождество при подстановке в каждое из них $M=(N+1)N/2$ линейно независимых функций $\hat{T}_1,\hat{T}_2,\ldots,\hat{T}_M$. В результате каждое из $N+1$ соотношений с номером $n=0,\ldots,N$ для набора функций $T_M = \{\hat{T}_1,\hat{T}_2,\ldots,\hat{T}_M\}$ будет образовывать систему линейных алгебраических уравнений относительно соответствующих функций $\hat{A}_{km}^{(n,N-n)}(x,t)$, число которых равно $N(N+1)/2$, с отличным от нуля определителем (в силу линейной независимости набора T_M). Из этой системы можно однозначно вычислить коэффициенты $\hat{A}_{km}^{(n,N-n)}(x,t)$. Такая процедура подобна вычислению коэффициентов одевающего оператора в методе преобразований Дарбу с помощью соотношений (7.25).

По аналогии с МФП второго порядка систему (7.32), записанную для набора функций T_M, можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_M = A_M \Psi_M; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi_M = B_M \Psi_M. \tag{7.33}$$

Здесь

$$
\Psi_M = \begin{pmatrix}
\hat{T}_1^{[0,0]} & \hat{T}_2^{[0,0]} & \dots & \hat{T}_M^{[0,0]} \\
\hat{T}_1^{[1,0]} & \hat{T}_2^{[1,0]} & \dots & \hat{T}_M^{[1,0]} \\
\hat{T}_1^{[0,1]} & \hat{T}_2^{[0,1]} & \dots & \hat{T}_M^{[0,1]} \\
\hat{T}_1^{[2,0]} & \hat{T}_2^{[2,0]} & \dots & \hat{T}_M^{[2,0]} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\hat{T}_1^{[1,N-2]} & \hat{T}_2^{[1,N-2]} & \dots & \hat{T}_M^{[1,N-2]} \\
\hat{T}_1^{[0,N-1]} & \hat{T}_2^{[0,N-1]} & \dots & \hat{T}_M^{[0,N-1]}
\end{pmatrix}, \qquad (7.34)
$$

$$
A_M = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hat{A}_{00}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{10}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{01}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{20}^{(N-1,0)} & \hat{A}_{11}^{(N-1,0)} & \cdots & \hat{A}_{0N-1}^{(N-1,0)} \\
\dots & \dots\dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hat{A}_{00}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{10}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{01}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{20}^{(1,N-2)} & \hat{A}_{11}^{(1,N-2)} & \cdots & \hat{A}_{0N-1}^{(1,N-2)}
\end{pmatrix}
$$

$$
B_M = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hat{A}_{00}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{10}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{01}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{20}^{(N-2,1)} & \hat{A}_{11}^{(N-2,1)} & \dots & \hat{A}_{0N-1}^{(N-2,1)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\hat{A}_{00}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{10}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{01}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{20}^{(0,N-1)} & \hat{A}_{11}^{(0,N-1)} & \dots & \hat{A}_{0N-1}^{(0,N-1)}
\end{pmatrix}
$$

Первые $N(N-1)/2$ строк матриц A_M и B_M соответствуют простейшим тождествам

$$
\hat{T}^{[k,m]} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{T}^{[k-1,m]},\ \hat{T}^{[k,m]} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}^{[k,m-1]} \qquad (7.35)
$$

для всех чисел k,m, удовлетворяющих неравенствам $0 \le k < N$ и $0 \le m < N$, и в каждой строке имеют все нулевые элементы, кроме одного, соответствующего (7.35). Последние N строк этих матриц соответствуют соотношениям (7.32). Поскольку система совместна по построению, то функциональные параметры $\hat{A}_{km}^{(n,N-n)}(x,t)$ общим числом $K=(N+1)\cdot M$, удовлетворяют системе нелинейных уравнений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}A_M - \frac{\partial}{\partial x}\widehat{B}_M + [A_M, \widehat{B}_M]\right)\widehat{\Psi}_M = 0. \qquad (7.36)$$

В случае невырожденности матрицы Ψ_M: $\det\Psi_M \neq 0$ число уравнений этой системы, выполняющихся тождественно, равно $N^2(N^2-1)/4$ и определяется числом первых строк матриц A_M и B_M, которые соответствуют тривиальным тождествам (7.35). Соответственно, число нетривиальных уравнений равно $N \cdot M = N^2(N+1)/2$, что меньше числа $K = (N+1)M = (N+1)^2 N/2$ функциональных параметров. Это означает, что для замыкания системы к ней можно добавить еще $M = N(N+1)/2$ соотношений, которые можно представить в виде некоторых соотношений, определяющих вид вспомогательных функций $\hat{T}_i, i = 1,\dots,M$. В качестве таких вспомогательных соотношений, как и в случае МФП первого порядка, следует выбирать интегрируемые уравнения для $\hat{T}_i$, которые определяют их вид полностью. Проще всего использовать некоторые линейные уравнения с постоянными коэффициентами конечного порядка типа (7.16). Эти дополнительные замыкающие соотношения превращаются в замкнутую систему нелинейных уравнений относительно коэффициентов $A_{p,q}^{[k,m]}$ базовых соотношений. В результате получаем метод многофункциональных подстановок для нелинейных уравнений порядка N.

Как уже отмечалось выше (для случая подстановок второго порядка), представленная общая схема по форме совпадает с матричным вариантом МФП первого порядка с тем отличием, что матрицы Ψ_M строятся из производных вспомогательных функций $\hat{T}_i$ по формуле (7.34). Это означает, что решения для коэффициентов $A_{p,q}^{[k,m]}$ при условии невырожденности матрицы Ψ_M вычисляются из соотношений

$$A_M = \Psi_{M,x}\Psi_M^{-1},\ B_M = \Psi_{M,t}\Psi_M^{-1}, \qquad (7.37)$$

которые, собственно говоря, и представляют собой функциональные подстановки.

При реализации этой процедуры для подстановок больших порядков могут возникать определенные трудности, связанные с возможной вырожденностью матрицы Ψ_M. Это связано с тем, что если в качестве замыкающих условий для каждой из функций $\hat{T}_i$ используются одинаковые линейные уравнения (7.16) порядка меньшего, чем порядок подстановок, то матрица Ψ_M оказывается вырожденной даже в случае линейной независимости самих функций $\hat{T}_i$. Действительно, если уравнения, определяющие вид каждой функции $\hat{T}_i$, представляют собой линейную комбинацию производных этих функций с одними и теми же коэффициентами, подобную (7.16), то строки матрицы Ψ_M оказываются линейно зависимыми, что прямо следует из вида строк этой матрицы. Это приводит к необходимости некоторой редукции системы уравнений (7.36), которую приходится учитывать для достаточно больших порядков функциональных подстановок. Такую процедуру редукции удобно продемонстрировать на примере уравнения КдВ.

7.6 Подстановки третьего порядка для уравнения КдВ

В качестве примера рассмотрим построение многосолитонных решений уравнения КдВ. Начнем с порядка $N=3$, что будет соответствовать 6-солитонным решениям этого уравнения. Эти решения строятся на основе базовых соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned}
T_{xxx} &= a_{00}^{30}T + a_{10}^{30}T_x + a_{01}^{30}T_t + a_{20}^{30}T_{xx} + a_{11}^{30}T_{xt} + a_{02}^{30}T_{tt},\\
T_{xxt} &= a_{00}^{21}T + a_{10}^{21}T_x + a_{01}^{21}T_t + a_{20}^{21}T_{xx} + a_{11}^{21}T_{xt} + a_{02}^{21}T_{tt},\\
T_{xtt} &= a_{00}^{12}T + a_{10}^{12}T_x + a_{01}^{12}T_t + a_{20}^{12}T_{xx} + a_{11}^{12}T_{xt} + a_{02}^{12}T_{tt},\\
T_{ttt} &= a_{00}^{03}T + a_{10}^{03}T_x + a_{01}^{03}T_t + a_{20}^{03}T_{xx} + a_{11}^{03}T_{xt} + a_{02}^{03}T_{tt}.
\end{aligned} \qquad (7.38)$$

Дополнительные соотношения для КдВ остаются такими же, как и в (7.16):

$$T_{i,xxx} = T_{i,t},\ T_{i,xx} = \lambda_i T_i,\ i = 1,\ldots,6,$$

но число их становится равным $M=6$. Поскольку в правой части соотношений (7.38) нет производных третьего порядка, то при использовании дополнительных соотношений (7.16) матрица Ψ_M не будет вырождена. При использовании первых шести соотношений из (7.38), соответствующих третьим производным T_i, находим:

$$a_{00}^{30} = a_{10}^{30} = a_{20}^{30} = a_{11}^{30} = a_{02}^{30} = 0,\ a_{01}^{30} = 1. \qquad (7.39)$$

Из второй части, соответствующей вторым производным T_i, получаем матричное уравнение

$$\hat{U}_6\hat{\Psi}_6 = \hat{\Psi}_6\hat{\Lambda}$$

где $\hat{\Lambda} = \mathrm{d}iag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6)$, а матрица U_6 вычисляется из соотношения

$$\hat{U}_6 = \hat{A}_{6,x} + \hat{A}_6^2, \qquad (7.40)$$

аналогичного (7.17), где $\hat{A}_6$ определено общими соотношениями (7.34) при $M=6$.

Как и в случае второго порядка подстановок, для того чтобы среди всех функциональных параметров выделить тот, который отвечает решению уравнения КдВ, необходимо среди всех соотношений (7.38) найти такое, которое, после исключения из него производных по времени, превратилось бы в одевающий оператор метода преобразований Дарбу. Этому условию отвечает только одно соотношение из всех базовых соотношений (7.38), соответствующее производной T_{xxt}. При замене производной по t на третью производную по x вторая производная по t заменяется по правилу $T_i^{[0,2]} = T_i^{[6,0]}$. В результате это соотношение можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial^6}{\partial x^6} - \frac{1}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^5}{\partial x^5} + \frac{a_{11}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{a_{01}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{a_{20}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{a_{10}^{21}}{a_{02}^{21}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{a_{00}^{21}}{a_{02}^{21}}\right] T_i = 0,\ i = 1,\ldots,6, \quad (7.41)$$

что представляет собой одевающий оператор метода Дарбу шестого порядка. Чтобы продемонстрировать проблему, приведем и базовые соотношения, соответствующие остальным строкам базовых соотношений:

$$\begin{gathered}\left[a_{02}^{30}\frac{\partial^6}{\partial x^6} + a_{11}^{30}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + (a_{01}^{30}-1)\frac{\partial^3}{\partial x^3} + a_{20}^{30}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{10}^{30}\frac{\partial}{\partial x} + a_{00}^{30}\right] T_i = 0,\ i = 1,\ldots,6; \\ \left[\frac{\partial^7}{\partial x^7} - a_{02}^{12}\frac{\partial^6}{\partial x^6} - a_{11}^{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - a_{01}^{12}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - a_{20}^{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{10}^{12}\frac{\partial}{\partial x} - a_{00}^{12}\right] T_i = 0, \qquad (7.42) \\ \left[\frac{\partial^9}{\partial x^9} - a_{02}^{03}\frac{\partial^6}{\partial x^6} - a_{11}^{03}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - a_{01}^{03}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - a_{20}^{03}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_{10}^{03}\frac{\partial}{\partial x} - a_{00}^{03}\right] T_i = 0.\end{gathered}$$

Первое из этих соотношений, в соответствии с (7.39), тождественно обращается в ноль. Поэтому значимыми остаются только два последних соотношения, которые имеют структуру системы линейных уравнений с шестью неизвестными в форме коэффициентов базовых соотношений, для определения которых необходимо шесть основных функций T_i.

Как видно, в этих уравнениях отсутствует производная пятого порядка, а в последнем еще две производных. Это отличает эти соотношения от уравнений на собственные функции одевающего оператора Дарбу, в котором присутствуют производные всех порядков в диапазоне от 0 до 6. Отсюда следует, что коэффициенты этих уравнений удовлетворяют уравнениям, отличным от КдВ, вид которых можно установить с помощью (7.36) либо с помощью вычисления коэффициентов операторов, соответствующих этим соотношениям в методе преобразований Дарбу [32].

Сравнивая соотношения (7.41) с соответствующими соотношениями (7.25) для $\hat{M}_6$, находим связь $\xi_5 = -(a_{02}^{21})^{-1}$, что приводит к решению:

$$u = 2\xi_{5,x} = \frac{2}{(a_{02}^{21})^2}\frac{\partial a_{02}^{21}}{\partial x}.$$

Таким образом, 6-солитонные решения уравнения КдВ могут быть получены с помощью подстановок третьего порядка. Соотношения же (7.42) и аналогичные соотношения с производными более высокого порядка будут соответствовать уравнениям для других коэффициентов базовых соотношений.

7.7 Многосолитонные решения уравнения КдВ. Редукция базовых соотношений

Рассмотрим, как строятся решения уравнения КдВ в случае подстановок большего порядка. Как и в разделах 5 и 7, для определения коэффициента базовой схемы, который удовлетворяет уравнению КдВ, воспользуемся тем же методом сравнения строк базовых соотношений с одевающим оператором преобразования Дарбу в МОЗ. Для этого необходимо проанализировать все строки базовых соотношений после замены всех производных по переменной t на производные третьего порядка по x в соответствии с формой первого вспомогательного уравнения системы (7.16).

Рассмотрим систему базовых соотношений (7.32), учитывая уравнения (7.16). Учет (7.16) позволяет явно указать значения части коэфициентов базовых соотношений. Это связано с тем, что общий вид коэффициентов базовых соотношений будет определяться именно уравнениями (7.16) по общему правилу

$$T_i^{[\alpha,\beta]} = T_i^{[\alpha-3k,\beta+k]}, i = 1,\ldots,M, \tag{7.43}$$

где k - неполное частное от деления числа α на 3. Действительно, при условии $\alpha - 3k \geq 0$ суммарный порядок производных слева всегда больше, чем справа: $\alpha+\beta > \alpha+\beta-2k$. Поэтому все базовые соотношения с производными $T_i^{[\alpha,\beta]}$ слева с $\alpha = N-n \geq 3$ будут единственным образом выражаться через одну производную меньшего порядка $T_i^{[\alpha-3k,\beta+k]}$. В результате в каждой такой строке коэффициенты базовых соотношений будут обращаться в ноль, за исключением одного: $a_{N-n-3k,h+k}^{N-n,n}$, где k - неполное частное от деления числа $N-n$ на 3. Например, поскольку $T_{xxxx} = T_{xt}$ и $T_{xxxt} = T_{tt}$, то при $N=4$ коэффициенты строк с номерами $n=0$ и $n=1$ будут нулевыми, кроме двух коэффициентов:

$$n=0:\ a_{11}^{4,0}=1,\ n=1:\ a_{02}^{3,1}=1.$$

Опираясь на данное наблюдение, можно отыскать номер строки базовых соотношений, который будет соответствовать структуре одевающего оператора Дарбу при любом N.

Для этого систему базовых соотношений после замены всех производных по t на производные третьего порядка по x в соответствии с (7.16) запишем в такой форме:

$$T_i^{[N-n,n]} = T_i^{[N+2n,0]} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} a_{km}^{(N-n,n)}(x,t) T_i^{[k+3m,0]},\quad n=0,1,\cdots,N; i=1,\ldots,P, \tag{7.44}$$

Справедливо следующее:

Утверждение 7.2. Число значимых базовых соотношений (7.44) для уравнения КдВ, не обратившихся в тождество в результате редукции, равно $p = 3$, а их номера n определяются условиями $N - 2 \le n \le N$. Номер строки n системы (7.44), в которой содержится одевающий оператор Дарбу, равен $n = N - 2$. При этом порядок одевающего оператора равен $P = 3(N - 1)$.

Доказательство. Первая часть утверждения фактически доказана выше, поскольку для любого конечного порядка N подстановок в соответствии с (7.16) редукции подвергаются все строки с номерами $N - n \ge 3$. Следовательно, не редуцируются только строки с номерами $n \ge N - 2$, что и доказывает первую часть утверждения.

Для доказательства второй части утверждения среди всех $N + 1$ соотношений (7.44) необходимо найти такое, которое будет содержать все порядки производных по x от 0 до некоторого максимального значения P после замены производных по t на производные по x. Производные в правой части базовых соотношений полезно разбить на группы с фиксированным суммарным порядком $J = \alpha + \beta$ производных $T^{[\alpha,\beta]}$ по x и t. Группа с $J = 0$ содержит единственное слагаемое с T_i, а группа с $J = 2$ содержит слагаемые с производными $T_{xx}, T_{x,t}, T_{tt}$ и т.д. Тогда при заданном порядке подстановок N максимальный номер группы справа равен $J = N - 1$, которая будет содержать ровно N слагаемых. В целом же в левой части каждой строки базовых соотношений имеются все производные $T_i^{[\alpha,\beta]}$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha + \beta = J,\ \alpha, \beta = 0, \dots, J;\ J = 0, \dots, N - 1.$$

После замены производных по t на третьи производные по x , в соответствии с (7.16), в правой части (7.32) каждая производная $T_i^{[\alpha,\beta]}$ в группе с номером J превращается в производную по x порядка:

$$P_{\alpha|J} = \alpha + 3\beta = 3J - 2\alpha,\ \alpha = 0, \dots, J, \tag{7.45}$$

где α - порядок производной по x в группе с номером J. Поскольку само J пробегает все значения от 0 до $N - 1$, то порядки $P_{\alpha|J}$ всех групп в совокупности перекрывают весь числовой диапазон порядков производных в диапазоне от 0 до $3N - 3$, за исключением одного числа. Это пропущенное число появляется в группе производных суммарного порядка $J = N - 1$ и равно $Q_{N-1} = 3(N - 1) - 1$. В группах с номерами $J < N - 1$ также есть пропущенные порядки, но они воспроизводятся в группах с большим значением J. Только в группе с максимальным порядком $J = N - 1$ пропущенное число не воспроизводится. Чтобы это увидеть, значения всех порядков $P_{\alpha|J}$ удобнее представить в виде диаграммы:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & \alpha & & & & & \\
J & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & Q_J \\
1 & 3 & 1 & & & & & & & 2 \\
2 & 6 & 4 & 2 & & & & & & 5 \\
3 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & & 8 \\
4 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 3 & & & 11 \\
5 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 14 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\qquad (7.46)
$$

В каждой строке с номером J диаграммы содержатся все порядки производных по x в группе с номером J после замены производных по t на производные третьего порядка по x. Согласно доказанной выше первой части утверждения, для анализа порядков достаточно рассмотреть только последние три строки диаграммы. В левой части в каждой строке с номерами $n = N-2, N-1, N$ находятся, соответственно, производные $T_i^{[2,N-2]}, T_i^{[1,N-1]}, T_i^{[0,N]}$. После замены эти производные превращаются в производные порядка $Q_n = N - n + 3n = N + 2n$:

$$Q_n = [3N-4, 3N-2, 3N].$$

Одевающий оператор Дарбу, будет соответствовать строке с номером n в (7.44), для которого недостающий порядок $Q_{N-1} = 3N-4$ справа будет равен порядку производной по x Q_n слева. Приравнивая Q_n порядку Q_{N-1} при заданном N:

$$N + 2n = 3N - 4,$$

находим:

$$n = N - 2,$$

что соответствует строке с производной $T^{[2,N-2]}$ слева. Поскольку суммарный порядок производной в строке с номером $n = N-2$ слева, равный $3N-4$, меньше, чем максимальный порядок $Q_{N-1} = 3(N-1) > 3N-4$ производной справа, то максимальный порядок базового соотношения, сопоставляемого одевающему оператору Дарбу будет равен $P = 3(N-1)$. Заметим, что порядок производной справа в строках с номерами $N-1$ и N будет больше, чем P: $3(N-1) < 3N-2$ и $3(N-1) < 3N$. Поэтому число свободных параметров в этих строках также равно $P = 3(N-1)$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения вытекает

Следствие 7.2.1. Число функций T_i, необходимых для определения всех неопределенных коэффициентов системы базовых соотношений, после редукции равно $P = 3(N-1)$. Число неопределенных коэффициентов базовых соотношений после редукции равно $M_r = 9(N-1)$.

До редукции общее число функций, необходимых для вычисления базовых соотношений, равнялось числу $M = N(N+1)/2$. Следовательно, число совпавших производных слева равно $Q = M - P = (N-2)(N-3)/2$. Видно, что уменьшение числа необходимых для определения всех неопределенных коэффициентов базовых соотношений начинается с порядка подстановок $N = 4$. Неопределенные коэффициенты базовых соотношений после редукции содержатся в последних трех строках. В каждой строке имеется $P = 3(N-1)$ неопределенных коэффициентов. Отсюда общее число неопределенных коэффициентов равно $M_r = 9(N-1)$.

Следствие 7.2.2. Решение уравнения КдВ для подстановок порядка N можно записать в виде

$$u(x,t) = 2\xi_{P-1,x} = \frac{2}{(a_{0,N-1}^{2,N-2})^2} \frac{\partial}{\partial x} a_{0,N-1}^{2,N-2}. \tag{7.47}$$

При этом число солитонов, соответствующих этому решению, определяется порядком оператора, т.е. равно $P = 3(N-1)$.

Доказательство. Сопоставимое оператору одевания Дарбу дифференциальное соотношение в (7.44) можно представить в такой форме:

$$T_i^{[P,0]} - \frac{1}{a_{0,N-1}^{2,N-2}} T_i^{[P-1,0]} + \sum_{k=0}^{M_1-2} \frac{A_{N-1-k,k}^{2,N-2}}{a_{0,N-1}^{N-2,2}} T_i^{[k,0]} = 0 \tag{7.48}$$

Здесь $A_{N-1-k,k}^{2,N-2}$ - коэффициенты, вычисленные с учётом совпадающих производных в (7.44). Сопоставляя (7.48) с оператором в методе преобразований Дарбу, находим:

$$\xi_{P-1} = -\frac{1}{a_{0,N-1}^{2,N-2}},$$

где $P = 3(N-1)$. Порядок одевающего оператора Дарбу соответствует числу солитонов в решении. В соответствии с (7.26) решение уравнения КдВ для подстановок порядка N можно записать в виде (7.47). Следствие доказано.

Заметим, для того чтобы функция (7.47) действительно удовлетворяла уравнению КдВ, достаточно, чтобы функции T_i дополнительно удовлетворяли и второй части соотношений (7.16) со вторыми производными по x. Для того чтобы получить систему уравнений, которым удовлетворяют остальные нетривиальные коэффициенты базовых соотношений, можно воспользоваться методом преобразований Дарбу для каждой из трех нетривиальных строк базовых соотношений, как это описано в [32].

7.8 Подстановки для НУШ

В качестве иллюстрации работы данного метода продемонстрируем его на примере решений НУШ:

$$iu_t + u_{xx} - 2|u|^2 u = 0. \qquad (7.49)$$

Это уравнение имеет представление в виде условия коммутативности двух матричных операторов:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial x} - i\lambda\hat{\sigma} - \hat{U}, \quad \hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} - i(2\lambda^2 + |u|^2)\hat{\sigma} - 2\lambda\hat{U} + i\hat{U}_1,$$

где

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \hat{U} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ u^* & 0 \end{pmatrix}, \; \hat{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & u_x \\ -u_x^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Неодетые операторы имеют вид:

$$\hat{L}_0 = \frac{\partial}{\partial x} - i\lambda\hat{\sigma}, \quad \hat{A}_0 = \frac{\partial}{\partial t} - 2i\lambda^2\hat{\sigma},$$

Следуя этим соотношениям, рассмотрим вариант метода с базовыми соотношениями (7.1) с матричными функциями $\hat{T}_k, k = 1,\ldots,M$ размерности 2×2. В качестве дополнительных замыкающих уравнений рассмотрим для M матриц $\hat{T}_k, k = 1,\ldots,M$ уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{T}_k = i\hat{\sigma}_3\hat{T}_k\hat{\Lambda}_k, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{T}_k = 2i\hat{\sigma}_3\hat{T}_k\hat{\Lambda}_k^2, \; k = 1,\ldots,M, \qquad (7.50)$$

где κ_k, μ_k - некоторый набор комплексных чисел, i - мнимая единица,

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\Lambda}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \mu_k \end{pmatrix}, \; k = 1,\ldots,M.$$

Уравнения (7.50) эквивалентны следующим дополнительным соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Psi}_M = \hat{J}\hat{\Psi}_M\hat{L}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}_M = \hat{J}\hat{\Psi}_M\hat{L}^2, \qquad (7.51)$$

где блочные матрицы Ψ_M, $\hat{J}$ и $\hat{L}$ общей размерности $2M \times 2M$. Матрица имеет вид (7.34), а матрицы $\hat{J}$ и $\hat{L}$ являются блочно-диагональными:

$$\hat{J} = \operatorname{diag}(i\hat{\sigma}_3,\ldots,i\hat{\sigma}_3), \quad \hat{L} = \sqrt{2}\operatorname{diag}(\hat{\Lambda}_1,\ldots,\hat{\Lambda}_M), \quad \hat{J}^2 = -\hat{1}.$$

Из соотношений (7.51) следуют, в частности, уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_M = J\frac{\partial}{\partial t}\Psi_M, \; \frac{\partial^4}{\partial x^4}\Psi_M = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_M. \qquad (7.52)$$

Из последнего уравнения следует, что матрица Ψ_M будет вырожденной, начиная с порядка подстановок $N = 5$. Начиная с этого же порядка необходимо проводить редукцию матриц базовых соотношений.

Для того чтобы получить уравнения на функциональные коэффициенты базовых уравнений (7.1) - (7.4), не зависящие от спектрального параметра $\hat{\Lambda}$, необходимо исключить из всех соотношений (7.51) Ψ_M и $\hat{L}$. Дифференцируя (7.51) по x и по t и используя базовые соотношения, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x} A_M + A_M^2 = -JA_M JA_M, \; \frac{\partial}{\partial t} A_M + A_M B_M = -JB_M JA_M, \tag{7.53}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} B_M + B_M A_M = -JA_M \hat{J} B_M, \; \frac{\partial}{\partial t} B_M + B_M^2 = JB_M JB_M,$$

Кроме этого, выполняются следующие соотношения:

$$[JA_M, JB_M] = 0, \quad A_{M,x} + A_M^2 = JB_M.$$

Из последнего соотношения и (7.6) находим:

$$A_{M,t} + JA_{M,xx} + J\frac{\partial}{\partial x} A_M^2 - [A_M, JA_{M,x}] - [A_M, JA_M^2] = 0.$$

Используя (7.53), последнее уравнение можно записать в виде

$$A_{M,t} + JA_{M,xx} - JA_M(A_M^2 + JA_M JA_M) - J(A_M^2 + JA_M JA_M)A_M +$$
$$+[A_M, J(A_M^2 + JA_M JA_M)] - [A_M, JA_M^2] = 0. \tag{7.54}$$

Раскрывая скобки, находим окончательно:

$$A_{M,t} + JA_{M,xx} - 4JA_M^3 + 3A_M JA_M^2 - (JA_M)^3 - [A_M, (JA_M)^2] = 0.$$

Полученное уравнение представляет собой матричное уравнение типа НУШ. В такой форме уравнение НУШ для подстановок порядка 1 рассматривалось в разделе 3.11.

Как и в случае уравнения КдВ, получить выражения для решений НУШ можно, сравнивая модифицированные базовые соотношения с одевающими операторами Дарбу. Воспользуемся для вычисления порядков производных в правой части базовых соотношений (после их модификации) диаграммами, аналогичными диаграмме (7.46). Производная $\hat{T}_i^{[\alpha,\beta]}$ порядка $J = \alpha + \beta$ в результате замены производной по t на вторую производную по x преобразуется в производную только по x порядка $P_{j|\alpha} = \alpha + 2(J - \alpha) = 2J - \alpha$. Соответствующая диаграмма порядков производных в правой части базовых соотношений имеет такой вид:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & \alpha & & & & & & \\
J & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & Q_J \\
1 & 2 & 1 & & & & & & & & & - \\
2 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & & & & - \\
3 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & & & - \\
4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & - \\
5 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & - \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\qquad (7.55)
$$

В этой диаграмме нет пропущенных порядков. Поэтому максимальный порядок производной после замены следует искать в левой части базовых соотношений. Этот порядок должен быть на 1 больше, чем максимальный порядок справа в диаграмме (7.55). Этот порядок и будет порядком оператора одевания в методе Дарбу. Высота и структура диаграммы (7.55) та же, что и для (7.46): $J_{max} = N-1$. Максимальный порядок производной для последней строки диаграммы равен $P = 2(N-1)$. Порядок слева производной $\hat{T}_i^{[\mu,\nu]},\ \mu+\nu = N$ равен, соответственно, $P_1 = 2N-\mu$. Эта величина должна быть на единицу больше, чем порядок P. В результате находим:

$$P+1 = 2(N-1)+1 = 2N-\mu.$$

Отсюда

$$\mu = 1, \quad \nu = N-1.$$

Следовательно, базовое соотношение, соответствующее производной $\hat{T}_i^{[1,N-1]}$ слева, совпадает со структурой одевающего оператора метода Дарбу для НУШ:

$$\frac{\partial^{2N-1}}{\partial x^{2N-1}}\hat{T} - \hat{J}^{(1-N)}\sum_{j=0}^{2N}\Xi_j^{1,N-1}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\hat{T} = 0_i$$

Здесь коэффициенты $\Xi_j^{1,N-1}$ - модифицированные в результате редукции коэффициенты базовых соотношений в строке с номером *N*. Коэффициент $\Xi_{2N}^{1,N-1}$и определяет решение НУШ в соответствии с методом преобразований Дарбу [63, 65, 32].

Для примера рассмотрим базовые соотношения для порядка $N=3$. В этом случае базовые соотношения после замены производных преобразуются к следующему виду:

$$\hat{A}_{02}^{30}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i + \left[(\hat{1} - \hat{A}_{11}^{30}\hat{J})\frac{\partial^3}{\partial x^3} - (\hat{A}_{20}^{30} + \hat{A}_{01}^{30}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \hat{A}_{10}^{30}\frac{\partial}{\partial x} - \hat{A}_{00}^{30}\right]\hat{T}_i = 0,$$

$$\left(\hat{J} + \hat{A}_{02}^{21}\right)\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i - \left[\hat{A}_{11}^{21}\hat{J}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\hat{A}_{20}^{21} + \hat{A}_{01}^{21}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{A}_{10}^{21}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{A}_{00}^{21}\right]\hat{T}_i = 0,$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5}\hat{T}_i+\left[-\hat{A}_{11}^{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i+\hat{A}_{11}^{12}\hat{J}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(\hat{A}_{20}^{12}+\hat{A}_{01}^{12}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{A}_{10}^{12}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{A}_{00}^{12}\right]\hat{T}_i=0,$$
$$\frac{\partial^6}{\partial x^6}\hat{T}_i-\hat{J}\left[-\hat{A}_{11}^{03}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\hat{T}_i+\hat{A}_{11}^{03}\hat{J}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+(\hat{A}_{20}^{03}+\hat{A}_{01}^{03}\hat{J})\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\hat{A}_{10}^{03}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{A}_{00}^{03}\right]\hat{T}_i=0.$$

Базовое соотношение в строке с номером 3 соответствует одевающему оператору Дарбу максимального порядка. Этот оператор содержит пять коэффициентов, которые следует вычислять с помощью пяти заданных функций $\hat{T}_i$, вместо шести до редукции. При этом один из коэффициентов $\hat{A}_{20}^{12}$ или $\hat{A}_{01}^{12}$ остается неопределенным. Однако решение исходного уравнения НУШ определяется коэффициентом $\hat{A}_{11}^{12}$, что решает проблему не полной определенности коэффициентов базовых соотношений, возникшую вследствие ее редукции. Аналогичная ситуация возникает при анализе последнего уравнения порядка 6, имеющего также 5 коэффициентов, хотя это уравнение не является полным уравнением для коэффициентов оператора Дарбу. Коэффициенты этих уравнений, вообще говоря, не будут удовлетворять в точности уравнению НУШ. Вид уравнений для этих коэффициентов требует отдельного анализа, который пока не проведен в полном объеме.

Остальные два уравнения имеют порядок 4 с числом коэффициентов 4. Аналогичная ситуация имела место и для уравнения КдВ в соотношениях (7.46). Эти соотношения фактически эквивалентны второму соотношению в (7.52). Это означает, что коэффициенты этих уравнений должны обращаться в ноль, т.е. должны выполняться соотношения:

$$\hat{A}_{02}^{30}=\hat{A}_{10}^{30}=\hat{A}_{00}^{30}=0,\quad \hat{A}_{11}^{30}=-\hat{J},\quad \hat{A}_{20}^{30}=-\hat{A}_{01}^{30}\hat{J};$$
$$\hat{A}_{11}^{21}=\hat{A}_{10}^{21}=\hat{A}_{10}^{21}=0,\quad \hat{A}_{02}^{21}=-\hat{J},\quad \hat{A}_{20}^{21}=-\hat{A}_{01}^{21}\hat{J}.$$

Эти соотношения выполняются независимо от выбора матриц $\hat{T}_i$, при этом матрицы $\hat{A}_M$ и $\hat{B}_M$ будут невырожденными.

Из приведенных примеров видно, что развитый вариант МФП расширяет область применения МФП. Однако наиболее важным результатом является то, что этот метод пригоден и для построения многосолитонных решений интегрируемых с помощью МОЗ уравнений. Это делает многофункциональный метод функциональных подстановок универсальным методом построения решений интегрируемых уравнений, включая и уравнения типа Бюргерса, и уравнения, интегрируемые с помощью МОЗ.

8 Гидродинамические подстановки

8.1 Общая схема гидродинамических подстановок. Одномерный случай

Как было показано в разделе 2.4.6, функциональные подстановки типа Коула-Хопфа для одномерных течений неоднородной жидкости удобно представлять с помощью маркерной функции $\theta(x,t)$ (2.72)-(2.73). Следуя этой общей идее, соотношения (2.72)-(2.73) можно взять в качестве исходных для построения решений гидродинамических уравнений с помощью функциональных подстановок. Такие подстановки далее будут называться гидродинамическими подстановками, соответствующий вариант МФП - методом гидродинамических подстановок (МГП). Для этого рассмотрим с самого начала уравнение переноса гидродинамического маркера $\theta(x,t)$ полем скорости $u(x,t)$:

$$\theta_t + u(x,t)\theta_x = 0. \qquad (8.1)$$

Продифференцируем уравнение (8.1) по x. В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_x + \frac{\partial}{\partial x}(u\theta_x) = 0.$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением неразрывности среды (уравнением сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \qquad (8.2)$$

если в качестве величины плотности использовать величину

$$\rho = \theta_x. \qquad (8.3)$$

Использование величины θ_x в качестве плотности вместо $(\ln\theta)_x$ в Примере 4 предыдущего раздела по сути является лишь формальной функциональной заменой маркера $\ln\theta \to \theta$, при которой введенные в данном разделе соотношения не изменяют своей формы. Таким образом, само уравнение переноса маркера автоматически порождает важнейший закон гидродинамики - уравнение неразрывности.

Следующим шагом в построении той или иной модели динамики среды является построение подходящей формы для поля скорости $u(x,t)$, как функции θ или ее производных, при которой объемные силы, действующие на среду, приобретают нужную форму. Именно тип действующих сил и определяет характер модели. Такой подход существенно изменяет общий взгляд на возможности анализа нелинейных по своей сути уравнений гидродинамики. Интуиция подсказывает, что попытка построить решение гидродинамической задачи с помощью какой-либо суперпозиции поля заранее обречена на провал, поскольку уравнения гидродинамики нелинейны.

Однако рассматриваемый подход демонстрирует существование особого типа суперпозиции в гидродинамике, а именно возможность разложить поле скорости на отдельные аддитивные составляющие, отвечающие за различающиеся по физической сущности объемные силы, которые, как правило, обладают свойством суперпозиции в соответствии с большинством физических законов, таких как законы теории тяготения Ньютона и электродинамики.

В качестве первого варианта рассмотрим следующее формальное соотношение для поля скорости:

$$u = U(\theta). \tag{8.4}$$

Для вычисления объемной силы вычислим ее Эйлерово ускорение. Для этого подействуем на $u(x,t)$ оператором переноса:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{8.5}$$

Результат такого действия перепишем, учитывая (8.1) и (8.4). В результате получаем:

$$\hat{L}u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)u = U'(\theta)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\right)\theta = 0. \tag{8.6}$$

Обращение в ноль Эйлерова ускорения определяется самой моделью. Это означает, что течение такой жидкости является инерциальным (без внешних сил), а уравнение динамики маркера, которое теперь необходимо решать, будет иметь такой вид:

$$\theta_t + U(\theta)\theta_x = 0. \tag{8.7}$$

Это и есть уравнение простой волны, решение которого можно записать в виде

$$\theta = H\left(x - U(\theta)t\right).$$

Здесь $H(\xi)$ - функция, вид которой определяется начальным распределением плотности среды.

8.2 Одномерное течение вязкого сжимаемого газа

Основой полученного результата является идея извлечения полезной информации из дифференциальных тождеств, которые можно получить прямо из уравнения переноса маркера. Процедура конструирования моделей при этом состоит в действии оператора $\hat{L}$ (8.5) на такие функции $u(x,t)$, для которых результат такого действия определяется целиком формой представления этой функции и соответствующими тождествами. Следовательно, интерес представляют тождества, которые выглядят как действие оператора (8.5) на ту или иную функцию, связанную с маркером θ

или производными от нее.

Следуя этому правилу, рассмотрим еще одно формальное тождество, которое получается из уравнения переноса маркера. Именно имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_x + u\frac{\partial}{\partial x}\theta_x = -u_x\theta_x, \tag{8.8}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\theta_x + u\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x = -u_x. \tag{8.9}$$

Продифференцируем теперь тождество (8.9) еще раз по x. Следствием является тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x = -u_{xx} - u_x\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x), \tag{8.10}$$

где $\rho = \theta_x$. Рассмотрим теперь в качестве поля скорости следующую функцию:

$$u = U(\theta) - \nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x. \tag{8.11}$$

В этом случае уравнение для поля скорости принимает вид уравнения Навье-Стокса для инерциального течения вязкого неоднородного газа с коэффициентом кинематической вязкости ν и динамической $\mu = \nu\rho$:

$$u_t + uu_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\nu\rho u_x). \tag{8.12}$$

Решение этого уравнения строится на основе решений уравнения теплопроводности следующего вида:

$$\theta_t + U(\theta)\theta_x = \nu\theta_{xx}. \tag{8.13}$$

В этом уравнении $U(\theta)$ - произвольная дифференцируемая функция маркера. Начальное условие для θ и выбор функции $F(\theta)$ определяют решение начальной задачи с заданным начальным распределением и скорости, и плотности среды. Однако уравнение (8.13) интегрируется полностью только в случае, если

$$U(\theta) = U_0 + U_1\theta, \tag{8.14}$$

где U_0 и U_1 - произвольные вещественные постоянные. Выбор (8.14) сводит задачу в случае $F_1 \neq 0$ к уравнению Бюргерса, решение которого строится с помощью подстановки Коула-Хопфа:

$$\theta = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\phi,$$

как это было описано в разделе 3.1. В силу этого при произвольном распределении скорости и плотности задача не является полностью интегрируемой. Однако интегрируемым является достаточно обширный класс моделей инерциальных вязких течений газа, которые строятся на основе решений уравнения теплопроводности:

$$\phi_t + U_0\phi + U_1\phi_x = \nu\phi_{xx}. \qquad (8.15)$$

При этом

$$u(x,t) = U_0 - 2\nu U_1 \frac{\partial}{\partial x}\ln\phi - \nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi\right|\right),\ \rho(x,t) = -2\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\phi. \qquad (8.16)$$

Уравнение (8.12) по форме не сильно отличается от уравнения Бюргерса, но оно включено в более приемлемую с точки зрения гидродинамики систему, содержащую уравнение неразрывности (8.2). Поэтому подстановка (8.16) оказывается более сложной, чем подстановка Коула-Хопфа, сводящая уравнение Бюргерса к тому же уравнению теплопроводности.

8.3 Расширение газа с пространственно однородным распределением температуры

Для демонстрации дополнительных возможностей данного подхода укажем на следующий вариант подстановки для поля скорости:

$$u = H(t)x + c(t)\ln\theta_x + u_0(t), \qquad (8.17)$$

который далее будет частично использован для построения и анализа космологических моделей. В (8.17) $H(t), c(t), u_0(t)$ - некоторые неизвестные пока функции t. При использовании подстановки (8.17) уравнение Эйлера будет иметь следующий вид:

$$u_t + uu_x = \dot{H}x + Hu + \dot{c}\ln\rho - cu_x + \dot{u}_0,$$

В этом уравнении сделаем формальную замену $v = u - q(t)$, где $q(t)$ - некоторая вспомогательная функция времени. В результате такой замены приходим к следующему уравнению для v:

$$v_t + vv_x = \dot{H}x + Hu + \dot{c}\ln\rho - (c+q)u_x - \dot{q} + \dot{u}_0.$$

Вновь используя (8.17) для вычисления правой части последнего соотношения, приходим к следующему уравнению:

$$v_t + vv_x = (\dot{H} + H^2)x + (Hc + \dot{c})\ln\rho + ((u_0 - c)H + \dot{u}_0) - c(c+q)\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}.$$

Потребуем выполнения следующих трех равенств:

$$\dot{H} + H^2 = 0,\ \dot{c} + Hc = 0,\ \dot{u}_0 + u_0H - (c+q)H = \dot{q}. \qquad (8.18)$$

Тогда уравнение для v примет форму уравнения Эйлера:

$$v_t + vv_x = -c(c+q)\frac{\partial\ln\rho}{\partial x}, \qquad (8.19)$$

с объемной силой Архимеда в идеальном газе с температурой, одинаковой во всех точках пространства, которая изменяется со временем по закону

$$T = \frac{\mu c(t)(c(t)+q(t))}{R}.$$

с произвольной функцией $q(t)$. R - универсальная газовая постоянная, а μ - молярная масса газа. Интегрируя уравнения (8.18), находим:

$$H = \frac{1}{t-t_0},\ c = \frac{c_0}{t-t_0},\ u_0 = q(t) + \frac{c_0 \ln(|t-t_0|)}{t-t_0} + \frac{U_0}{t-t_0}. \qquad (8.20)$$

Здесь t_0, c_0, U_0 - постоянные интегрирования. Изменение температуры со временем задается целиком функцией $q(t)$, вид которой, как уже упоминалось, может быть выбран произвольно.

Уравнение для маркерной функции θ имеет теперь такой вид:

$$\theta_t + (H(t)x + c(t)\ln\theta_x + v_0(t))\theta_x = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по x, находим:

$$\rho_t + (H(t)x + c(t)\ln\theta_x + u_0(t) + c(t))\rho_x + H(t)\rho = 0.$$

Введем новую переменную: $\chi = \ln\rho$. Тогда последнее уравнение приводим к форме уравнения Хопфа относительно функции χ:

$$\chi_t + (H(t)x + c(t)\chi + u_0(t) + c(t))\chi_x + H(t) = 0. \qquad (8.21)$$

С учетом вида функций u_0 и c_0 последнее уравнение эквивалентно паре уравнений на характеристиках:

$$(t-t_0)\frac{dx}{dt} = x + c_0 \ln|t-t_0|\,\chi + 2c_0 \ln|t-t_0| + U_0 + q(t)(t-t_0),\ (t-t_0)\frac{d\chi}{dt} + 1 = 0. \quad (8.22)$$

Здесь учтено (8.20). Интегрируя последнее из этих уравнений, находим первый интеграл системы на характеристиках:

$$I_0 = \chi + \ln|t-t_0|.$$

Подставляя выражение для χ из этого решения в первое уравнение системы (8.22) и вводя новую переменную $\tau = \ln|t-t_0|$, получаем следующее уравнение для характеристик:

$$\frac{dx}{d\tau} = x + c_0\tau(I_0 - \tau) + 2c_0\tau + U_0 + q(\tau)e^{\tau}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$e^{-\tau}x = I_1 + I_0 f(\tau) + g(\tau),$$

где I_1 - второй интеграл системы

$$f(\tau) = c_0\int_{-\infty}^{\tau} \tau e^{-\tau} d\tau,\ g(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau(2-\tau) + U_0)e^{-\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\tau} q(\tau)d\tau.$$

Интегралы I_1 и I_0 могут быть связаны произвольной функцией F:

$$I_0 = F(I_1). \qquad (8.23)$$

Вид этой функции определяется начальным распределением плотности. Решая неявное уравнение (8.23) относительно функции $\ln\rho$, можно найти динамику расширения газа в неограниченном пространстве при произвольном изменении его температуры со временем при условии, что температура не изменяется в пространстве. Распределение поля скорости потока может быть найдено с помощью исходной подстановки. Поскольку уравнение (8.23) неявное, то оно описывает возникновение ударных волн в рассматриваемой среде.

Хотя данный пример описывает не очень реалистичную с точки зрения физики ситуацию и приведен здесь для иллюстрации некоторых возможностей построения точных решений с помощью метода гидродинамических подстановок, тем не менее он будет полезен для дальнейших построений.

Во-первых, при построении решения было показано, что с помощью вторичного использования подстановки часто можно получить точное решение задачи в достаточно сложных ситуациях. Во-вторых, можно видеть, что наличие слагаемого в подстановке (8.17), линейно зависящего от x, не обязательно. Решение может быть получено в более простом виде и без него. Но в космологии наличие такого слагаемого носит название потока Хаббла и играет важную роль в современных представлениях о динамике Вселенной. Далее воспользуемся некоторыми идеями данного примера, чтобы построить космологические модели.

8.4 Адиабатическое течение газа

Рассмотрим задачу об адиабатическом течении идеальной сжимаемой среды. Как известно [56, 60, 61], в одномерном случае такие течения описываются уравнениями

$$u_t + uu_x = -\frac{1}{\rho} p_x, \ \ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \ \ s_t + us_x = 0, \ \ p = p(\rho, s), \tag{8.24}$$

где $p = p(\rho, s)$ - давление, а s - плотность энтропии течения. При адиабатическом течении энтропия элементарного объема жидкости, переносимого течением, сохраняется, что отражено в предпоследнем уравнении данной системы.

В силу этого энтропия s должна быть связана с маркером θ общей функциональной зависимостью: $s = S(\theta)$. Отсюда следует, что давление p можно записать как функцию вида $p = p(\rho, \theta)$. В частном случае распределение энтропии среды может быть однородным: $s = s_0 = const$. В этом случае уравнение состояния выглядит наиболее просто: $p = p(\rho)$.

Для случая однородного распределения энтропии по пространству решение для поля скорости можно искать в следующей форме:

$$u = W(\theta_x) = W(\rho), \tag{8.25}$$

где $W(\rho)$ - некоторая дифференцируемая функция своего аргумента. Применяя к такому полю скорости оператор переноса $\hat{L}$ и учитывая (8.8), приходим к следующему общему соотношению:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = -u_x W'(\theta_x)\theta_x = -\rho_x [W'(\rho)]^2 \rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}P(\rho),$$

где, как и раньше, $\rho = \theta_x$ и

$$P(\rho) = \int [W'(\rho)]^2 \rho^2 d\rho. \tag{8.26}$$

В частности, в случае идеального газа $p = K\rho^\gamma$, где γ - показатель адиабаты. Отсюда может быть вычислена функция $W(\rho)$. Имеем:

$$W'(\rho) = \sqrt{K\frac{\gamma}{\gamma-2}\rho^{\gamma/2-1}}$$

и окончательно:

$$W = \sqrt{\frac{4K}{\gamma(\gamma-2)}}\rho^{\gamma/2} + W_0. \tag{8.27}$$

Для маркера уравнение примет такой вид:

$$\theta_t + W(\rho)\theta_x = 0. \tag{8.28}$$

После дифференцирования по x это уравнение принимает вид уравнения Хопфа:

$$\rho_t + (\alpha\rho^{\gamma/2} + W_0)\rho_x = 0,\ \alpha = (\frac{\gamma}{2}+1)\sqrt{\frac{4K}{\gamma(\gamma-2)}}. \tag{8.29}$$

Решение этого уравнения вычисляется из решения алгебраического (или трансцендентного) уравнения:

$$\rho = H(x - (\alpha\rho^{\gamma/2} + W_0)t), \tag{8.30}$$

где $H(\xi)$ - функция, задаваемая начальным распределением плотности:

$$\rho(x,0) = H(x).$$

Это известное решение имеет тот недостаток, что существует только для таких типов начальных распределений поля скорости и плотности, которые заранее связаны соотношением (8.25). Решение общей задачи будет рассмотрено далее, но предварительно приведем решения нескольких других задач течения сжимаемой среды.

8.5 Течения самогравитирующей пыли. Общая формулировка задачи

Развитый метод можно использовать для решения более широкого круга задач, в частности, для решения задач динамики самогравитирующей пыли. Метод был предложен в работах [40, 44]. В этом случае к уравнениям гидродинамики необходимо добавить уравнение Пуассона для потенциала поля тяготения, созданного самой пылью. Самосогласованная система уравнений имеет следующий вид:

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad \rho_t + \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n u\rho) = 0, \tag{8.31}$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\phi_x) = 4\pi G\rho. \tag{8.32}$$

Уравнения (8.31) - уравнения Эйлера, уравнение (8.32) - уравнение Пуассона. Уравнение состояния пыли эквивалентно требованию равенству давления нулю, поэтому силы Архимеда в данной системе нет. Здесь $\phi(x,t)$ - потенциал гравитационного поля, G - постоянная тяготения Ньютона, а целое число $n = 0,1,2$ соответствует координатной размерности задачи $d = n+1$. В случае $n = 1$ - задача с цилиндрической симметрией, а в случае с $n = 2$ - сферической.

Физическая постановка задач, связанных с системой (8.31)-(8.32), состоит в описании процесса формирования плотных компактных объектов из рассеянных скоплений пыли под действием собственного поля тяготения. Поскольку процесс формирования плотных объектов из пыли происходит без силы Архимеда, то он практически всегда [14] заканчивается образованием сингулярности в распределении плотности. Одним из важных параметров этого процесса является время образования сингулярности из начального состояния. В таких процессах могут возникать и ударные волны при ненулевых начальных распределениях поля скорости. Для описания таких процессов воспользуемся методом гидродинамических подстановок.

8.6 Задача с плоской симметрией

8.6.1 Подстановки для плоской задачи

Построение решения начнем со случая $n = 0$. Для вычисления вида гидродинамической подстановки для задачи с самогравитирующей пылью необходимо вначале проинтегрировать уравнение Пуассона (8.32). Полагая, что плотность среды связана с маркерной функцией $\theta(x,t)$ соотношением (8.3), приходим к следующей модификации уравнения Пуассона (8.32):

$$\phi_{xx} = 4\pi G\theta_x.$$

Интегрируя это уравнение по x, получаем следующее выражение для ускорения свободного падения в гравитационном поле среды:

$$\phi_x = g_0(t) + 4\pi G\theta. \tag{8.33}$$

Здесь $g_0(t)$ - постоянная интегрирования по x, характеризующая фактически ускорение системы отсчета. Суть этого соотношения состоит в том, что гидродинамическим маркером одномерного самогравитирующего течения пыли является ускорение свободного падения $g=\phi_x$ (при $g_0(t)=0$). Это означает, что все точки пыли сохраняют при своем движении то значение ускорения свободного падения, которое существовало в начальный момент времени. Этот результат, кажущийся достаточно случайным, является, на самом деле, общим свойством самогравитирующих структур без давления. Обобщение этого вывода рассмотрим далее.

Подставим теперь соотношение (8.33) в уравнение (8.31). В результате уравнение Эйлера течения пыли примет следующий вид:

$$u_t+uu_x=-4\pi G\theta-g_0(t). \qquad (8.34)$$

Форма этого уравнения определяет и вид гидродинамической подстановки:

$$u(x,t)=U(\theta)+h(t)\theta+v_0(t). \qquad (8.35)$$

Действуя на эту функцию оператором переноса $\hat{L}$, находим:

$$\hat{L}u=\theta\dot{h}+\dot{v}_0(t).$$

Сравнивая это соотношение с (8.34), получаем:

$$h(t)=-4\pi Gt+h_0,\ \dot{v}_0=-g_0(t). \qquad (8.36)$$

Таким образом, решения исходной системы уравнений строятся исходя из решений квазилинейного уравнения для маркера:

$$\theta_t+(U(\theta)+(-4\pi Gt+h_0)\theta+v_0(t))\theta_x=0. \qquad (8.37)$$

Это уравнение имеет неявное решение:

$$\theta=H(x-U(\theta)t+(2\pi Gt^2-h_0t)\theta-x_0(t)). \qquad (8.38)$$

Здесь $H(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция аргумента:

$$\xi=x-U(\theta)t+(2\pi Gt^2-h_0t)\theta-x_0(t),\quad x_0(t)=\int v_0(t)dt.$$

Функция $H(\xi)$ определяется начальным распределением маркера в пространстве:

$$\theta(x,0)=H(x-x_0(0)).$$

которое связано с начальным распределением массы:

$$\rho(x,0)=\theta_x\big|_{t=0}=H'(x-x_0(0)).$$

Начальное распределение скорости задается функцией $U(\theta)$:

$$u(x,0)=U(\theta(x,0))+h_0\theta(x,0)+v_0(0).$$

8.6.2 Общие свойства одномерного течения пыли

Заметим, что масса среды, сосредоточенная в интервале координат $[x_1,x_2]$, определяется разностью значений маркера:

$$M_{[x_1,x_2]}(t)=\int_{x_1}^{x_2}\theta_x dx=\theta(x_2,t)-\theta(x_1,t) \qquad (8.39)$$

Важной характеристикой распределения масс является полная масса среды:

$$M_0 = \theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t).$$

Для астрофизических приложений необходимо рассматривать такие распределения массы в пространстве, для которых полная масса пыли должна оставаться конечной и постоянной во времени в случае бесконечного интервала $[-\infty, \infty]$. Последнее условие означает, что нет самопроизвольного притока или оттока массы в систему, что обеспечивается в силу выполнения уравнения неразрывности нулевыми значениями скорости потока на бесконечности: $u(\infty,t) = u(-\infty,t) = 0$. Отсутствие среднего перемещения центра масс всей системы в пространстве должно соответствовать условию:

$$V_0 = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} x\rho dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_t dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial}{\partial x}(u\rho)dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\rho dx = 0. \qquad (8.40)$$

Решение для θ (8.38) допускает возникновение сингулярностей в распределении массы за конечное время. Момент образования сингулярности определяется, как и в случае определения момента опрокидывания простой волны, первым моментом появления точки (x_*, t_*), в которой плотность обращается в бесконечность: $\rho(x_*, t_*) = \infty$. Этот момент определяется с помощью вычисления производной θ_x из общего решения (8.38). Имеем:

$$\theta_x = H'(\xi)(1 - U'(\theta)\theta_x + (2\pi G t^2 - h_0 t)\theta_x),$$

Отсюда находим:

$$\rho = \theta_x = \frac{H'(\xi)}{1 + H'(\xi)[U'(\theta) - (2\pi G t^2 - h_0 t)]}. \qquad (8.41)$$

Первый момент образования сингулярности определяется из условия, что знаменатель этого соотношения обращается в ноль. Для иллюстрации выводов общего анализа приведем несколько примеров (частично приведенных в [44, 48, 49]).

8.6.3 Примеры построения решений для плоского течения пыли

Наиболее простой случай соответствует классической задаче Джинса, когда начальное распределение плотности и скорости однородно: $\rho(x,0) = \rho_0 = const, \quad u(x,0) = 0$. Выбор однородного значения скорости, равного нулю, лишь фиксирует выбор определенной системы отсчета. Однородное же распределение массы соответствует бесконечной суммарной массе на бесконечном пространственном интервале. При таких начальных условиях имеем:

$$U(\theta) \equiv 0, \; \theta(x,0) = \alpha x + \theta_0, \; H(\xi) = \alpha\xi + \theta_0 + x_0(0),$$

где α и θ_0 - вещественные постоянные. В этом случае решение имеет следующий вид:

$$\theta = \alpha(x + (2\pi G t^2 - h_0 t)\theta - x_0(t)) + \theta_0 + x_0(0).$$

Отсюда находим:

$$\theta = \frac{\alpha(x - x_0(t)) + x_0(0) + \theta_0}{1 - 2\pi G t^2 + h_0 t}.$$

Это решение демонстрирует конечный результат эволюции однородного распределения плотности. Оставаясь со временем однородным распределением, плотность за конечное время $t_* = 1/\sqrt{2\pi G}$ в каждой точке пространства одновременно обращается в бесконечность. Этот результат можно рассматривать как вариант парадокса Зеелигера для плоско симметричного распределения материи.

Более физически значимый пример можно получить, рассматривая следующее начальное распределение плотности типа распределения Лоренца:

$$\rho(x,0) = \frac{\rho_0}{1 + x^2 / a^2}, \qquad (8.42)$$

где $a = const$ - параметр, характеризующий ширину начального распределения Лоренца. Масса такого распределения конечна:

$$M_0 = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2 / a^2} = \pi \rho_0 a.$$

Функция $H(\xi)$ при таком начальном распределении имеет вид:

$$\theta(x,0) = H(x - x_0(0)) = \int_0^x \rho(y,0) dy = \rho_0 a(x / a).$$

Начальное распределение скорости выберем, как и в простейшем случае, однородным с нулевым значением во всем пространстве. В силу этого $U(\theta) = 0$. Решение для θ теперь находится из решения уравнения

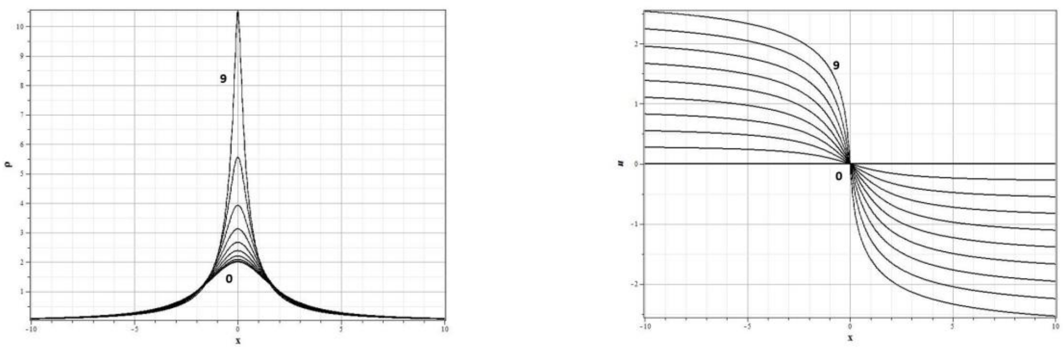
$$\theta = \rho_0 a(x / a + 2\pi G t^2 \theta / a).$$

Здесь полагалось $x_0(t) = 0$ и $h_0 = 0$. После отыскания решения для θ, решения для $rho(x,t)$ и $u(x,t)$ вычисляются с помощью соотношений

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{1 + (x + 2\pi G t^2 \theta) / a^2 - \rho_0 2\pi G t^2},$$

$$u(x,t) = -t\theta(x,t) = -t\rho_0 a \cdot (x / a + 2\pi G t^2 \theta / a).$$

Графики эволюции плотности и скорости для случая нулевого начального распределения скорости $u(x,0) = 0$ приведены на рис. 8.1 a, b



a b

Рис. 8.1. Эволюция плотности (a) и скорости потока (b) для начальных распределений (8.42), 0 - $t=0$, 9 - $t=0.9$ (с шагом $\Delta t=0.1$)

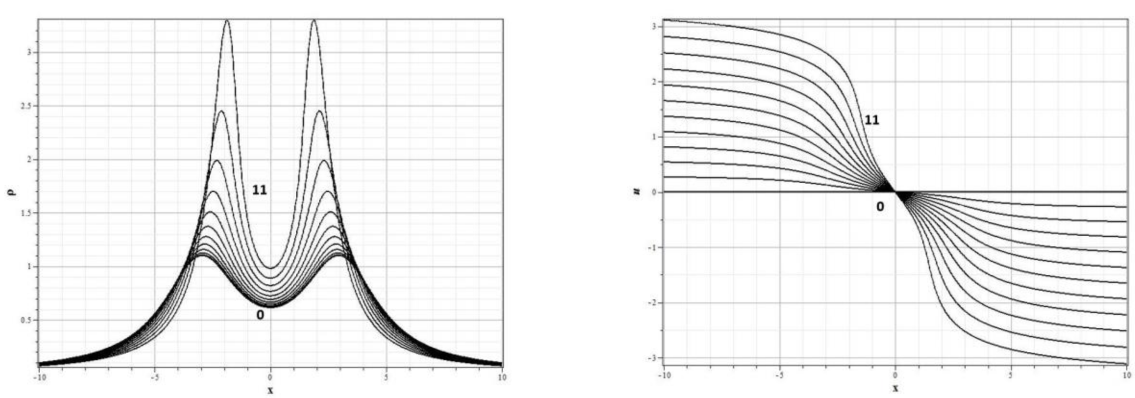
Еще один пример построения решения для системы с плоской симметрией для $u(x,0)=0$ приведен на рис. 8.2 a,b. Этот пример соответствует начальному распределению плотности в виде двух локальных флуктуаций:

$$\rho(x,0)=\frac{\rho_0}{1+(x-b)^2/a^2}+\frac{\rho_0}{1+(x+b)^2/a^2},\ u(x,0)=0. \qquad (8.43)$$

для следующих значений параметров: $a=1, b=1, \rho_0\pi=1$. Соответствующее выражение для начального распределения маркера имеет следующий вид:

$$\theta(x,0)=H(x-x_0(0))=\rho_0 a(((x-b)/a)+((x+b)/a)).$$

Графики демонстрируют сближение на изображенном начальном отрезке времени двух флуктуаций за счет их гравитационного притяжения. При этом в максимуме каждой из флуктуаций формируются сингулярности (в конце изображенного отрезка времени), возникающие до момента их слияния.



a b

Рис. 8.2. Эволюция плотности (a) и скорости потока (b) для начальных распределений (8.43) , 0 - $t=0$, 11 - $t=1.1$ (с шагом $\Delta t=0.1$)

Рассмотрим теперь вариант эволюции распределения для начального распределения скорости:

$$u(x,0) = -8\theta_0(x)(\theta_0^2(x) - \pi/2) \qquad (8.44)$$

и начальном распределении плотности (8.42). Такой выбор начального распределения скорости соответствует выбору функции $U(\theta) = -\theta(\theta^2 - \pi/2)$. На рис. 8.3 a,b приведены графики эволюции распределения плотности, а на рис. 8.3 c - скорости для указанных начальных распределений скорости и плотности. Рисунок 8.3 b представляет увеличенное изображение графиков на 8.3 a для более детального представления о формировании ударной волны плотности. В начальный момент времени вблизи начала координат, где находится максимум плотности, имеются максимумы поля скорости с направлением от начала координат. На изображенном начальном отрезке времени масса уносится потоком от максимума плотности, так что значение плотности в начале координат убывает. При этом на некотором расстоянии от начала координат формируются две ударные волны. При дальнейшей эволюции (за пределами изображенного отрезка времени) ударные волны останавливаются, а затем начинают двигаться симметрично к началу координат, так что через конечный отрезок времени в центре формируется единственная сингулярность.

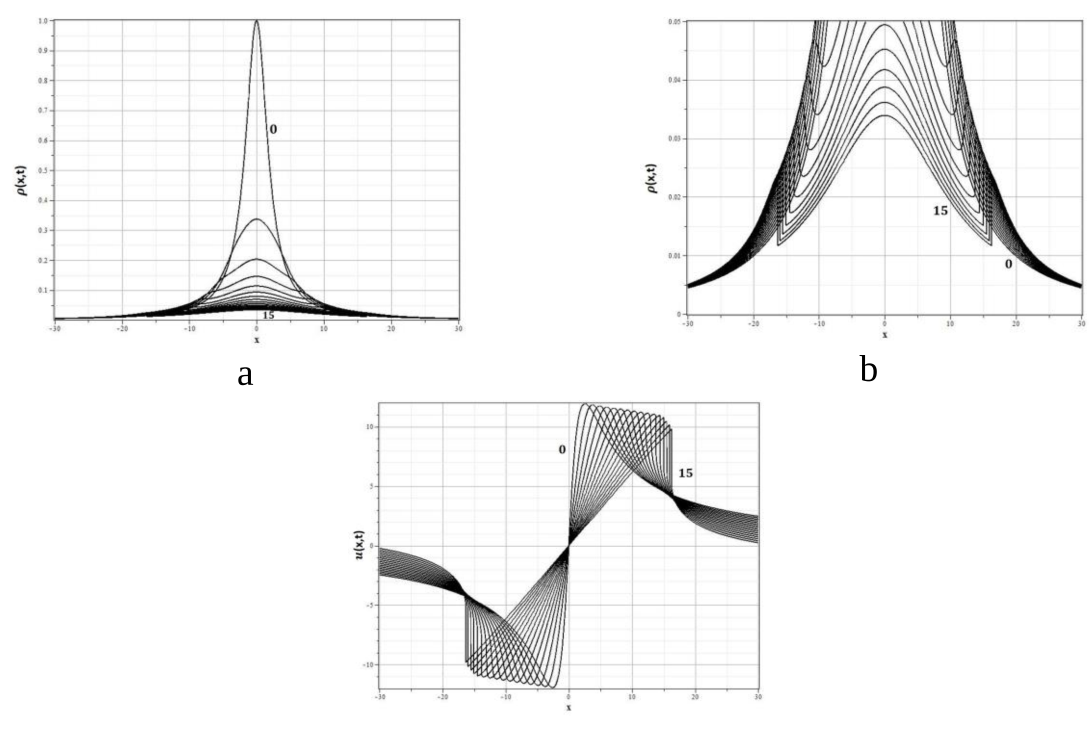


Рис. 8.3. Эволюция плотности (a, b) и скорости потока (c) для начальных распределений (8.44), 0 - $t = 0$, 15 - $t = 1.5$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

8.6.4 Одномерное течение самогравитирующей вязкой пыли

Одним из простых расширений модели динамики пыли с плоским фронтом является дополнение ее вязким слагаемым, что делает модель более интересной с точки зрения некоторых прикладных задач. Данное расширение относится к модели (8.31) с $n = 0$, которая модифицируется следующим образом:

$$u_t + uu_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\nu\rho u_x) - \phi_x, \quad \rho_t + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0, \tag{8.45}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi = 4\pi G\rho. \tag{8.46}$$

Соответствующая модификация подстановки для скорости течения записывается в этом случае так:

$$u(x,t) = U(\theta) + (4\pi Gt + h_0)\theta + v_0(t) - \nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x. \tag{8.47}$$

Действуя на эту функцию оператором $\hat{L}$, приходим к первому уравнению системы (8.45). Уравнение же для маркера будет теперь иметь следующий вид:

$$\theta_t + (U(\theta) + (4\pi Gt + h_0)\theta + v_0(t))\theta_x - \nu\theta_{xx} = 0. \tag{8.48}$$

В случае $U(\theta) = U_0 + U_1\theta$ это уравнение представляет собой уравнение Бюргерса с коэффициентами, зависящими от t. С помощью замены переменных

$$\chi = [(4\pi G + U_1)t + h_0 + U_0]\theta, \; z = x - x_0(t), \; \dot{x}_0 = v_0(t) + U_0 + h_0,$$

уравнение сводится к уравнению следующего вида:

$$\chi_t + \chi\chi_z - \nu\chi_{zz} - \frac{4\pi G}{(F_1 + 4\pi G)t}\chi = 0.$$

К сожалению, это уравнение не сводится к линейному уравнению с помощью подстановки Коула-Хопфа. Если сделать подстановку Коула-Хопфа

$$\chi = -2\nu\frac{\eta_z}{\eta},$$

то уравнение примет такой вид:

$$\eta_t - \nu\eta_{zz} + \nu\frac{4\pi G}{F_1 + 4\pi Gt}\ln\eta = 0.$$

8.7 Течения с цилиндрической и сферической симметриями

8.7.1 Вычисление подстановок

Для реализации развитого подхода к интегрированию системы (8.31) в случае цилиндрической $n=1$ и сферической симметрий $n=2$ необходимо ввести замену переменных и несколько преобразовать уравнения. Одновременно получим и другое решение задачи с плоским фронтом на полупрямой. Вместо плотности введем новую функцию $R = x^n \rho$. В этом случае уравнения с функцией R будут иметь вид:

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad R_t + \frac{\partial}{\partial x}(Ru) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^n \phi_x) = 4\pi GR.$$

Для системы такого вида связь маркера θ с плотностью будет определяться следующим соотношением:

$$R = \theta_x = x^n \rho.$$

При этом уравнение неразрывности получается автоматически, как и в одномерном случае. Интегрируя уравнение Пуассона, находим:

$$\phi_x = \frac{1}{x^n}(4\pi G\theta + g_0(t)). \tag{8.49}$$

Подставляя это выражение в уравнение для радиальной скорости $u(x,t)$, приводим его к следующему виду:

$$u_t + uu_x = -\frac{1}{x^n}(4\pi G\theta + g_0(t)). \tag{8.50}$$

Для простоты будем полагать, что $g_0(t) = g_0 = const$.

Соотношение (8.49) представляет собой обобщение соотношения (8.33) и показывает, что в случае цилиндрической и сферической симметрий маркером является ускорение свободного падения, умноженное на якобиан преобразования от декартовых координат, соответственно, к цилиндрическим ($n=1$) и сферическим ($n=2$). Это указывает на то, что данный факт не является случайным и отражает общее свойство гравитационного поля.

Гидродинамическую подстановку для u будем искать в следующем виде:

$$u = f(x)F(\theta). \tag{8.51}$$

Действуя на это соотношение оператором $\hat{L}$, получаем:

$$\hat{L}u = uf'(x)F(\theta) = f(x)f'(x)F^2(\theta) = -\frac{4\pi G}{x^n}(4\pi G\theta + g_0).$$

Сравнивая правую часть этого выражения с (8.50), находим условия, при которых они будут совпадать. Полагаем:

$$f(x)f'(x) = -\frac{\lambda^2}{x^n}. \tag{8.52}$$

В этом случае для функции $F(\theta)$ должно выполняться алгебраическое уравнение

$$F^2 = (4\pi G\theta + g_0)/\lambda^2. \tag{8.53}$$

Для функции $f(x)$ получаем следующие решения:

$$f_n(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{2}\sqrt{a-x}, & n=0 \\ \lambda\sqrt{2}\sqrt{\ln(a/x)}, & n=1 \\ \lambda\sqrt{2}\sqrt{a^{-1}+x^{-1}}, & n=2. \end{cases} \tag{8.54}$$

Здесь a - постоянная интегрирования. Соответственно, вычисляем решение для функции $F(\theta)$:

$$F(\theta) = \sqrt{4\pi G\theta + g_0}/\lambda. \tag{8.55}$$

После того как определены все функции подстановки (8.51), можем выписать уравнение для θ, которое теперь будет иметь следующий вид:

$$\theta_t + F(\theta) f_n(x)\theta_x = 0. \tag{8.56}$$

8.7.2 Построение решений и их анализ

Построение решений в случае цилиндрической и сферической симметрий опирается теперь на решения квазилинейного уравнения первого порядка (8.56). Как можно видеть, это уравнение приводится к уравнению простой волны с помощью замены координаты $x \to z_n(x)$, где

$$dz_n = \frac{dx}{f_n(x)},$$

откуда находим:

$$z_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{a-x}}, & n=0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\ln(a/x)}}, & n=1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{a^{-1}+x^{-1}}}, & n=2 \end{cases}$$

или

$$z_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a-x}, & n=0, \\ -a\sqrt{2}\int e^{-y^2}dy + z_0, & n=1, \\ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2}}(-a\ln\left(x+\sqrt{x^2+ax}+a/2\right)+2\sqrt{x^2+ax}), & n=2. \end{cases}$$

В этом случае уравнение примет вид уравнения Хопфа

$$\theta_t + F(\theta)\theta_{z_n} = 0 \tag{8.57}$$

и имеет интеграл движения

$$\theta = H(z_n(x) - F(\theta)t). \tag{8.58}$$

Распределение поля скорости u (8.51) имеет теперь вид

$$u(x,t) = f_n(x)F(\theta). \tag{8.59}$$

Распределение массы вычисляется из соотношения

$$R = \frac{\theta_x}{x^n} = \frac{z_n'(x)}{x^n}\frac{H'(\xi)}{1 + H'(\xi)F'(\theta)t}. \tag{8.60}$$

Здесь $\xi = z_n(x) - F(\theta)t$. Расчет массы в пространстве производится теперь с помощью следующих соотношений:

$$M_{x_1,x_2} = 2^n\pi\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)x^n dx = 2^n\pi\int_{x_1}^{x_2}\theta_x(x)dx = 2^n\pi(\theta(x_2,t) - \theta(x_1,t)). \tag{8.61}$$

Отсюда следует, что и в двумерном, и в трехмерном варианте модели масса, содержащаяся в интервале радиальных координат $[x_1, x_2]$, определяется разностью значений маркеров.

Начальное распределение маркера связано с функцией $H(\xi)$, которая вычисляется из соотношения

$$\theta(x,0) = H(z_n(x)). \tag{8.62}$$

Соответственно, начальное распределение плотности массы и скорости можно вычислить из соотношений

$$R(x,0) = \frac{z_n'(x)}{x^n}H'(z_n(x)),\ u(x,0) = f_n(x)F(H(z_n(x))). \tag{8.63}$$

Поскольку функция $F(\theta)$ является фиксированной, то данное решение не является полным, поскольку начальное распределение скорости задается начальным распределением массы. Как получить общее решение, рассмотрим далее, а здесь рассмотрим пример решения задачи о динамике пыли и образования сингулярности в распределении массы. Такая задача важна для астрофизики (см. [14] и библиографию там).

Случай плоского фронта $n = 0$ допускает вещественное решение лишь на полупрямой при $x \le a$. Это предполагает очень специфическую постановку физической задачи с наличием некоторого барьера в пространстве, за который пыль не проникает. Анализ такой достаточно экзотической задачи опустим и далее будем анализировать случай $n = 1, 2$.

Поскольку случай сферической симметрии играет в астрофизике более важную роль, чем с цилиндрической симметрией, рассмотрим примеры решения задачи именно для случая $n = 2$. В качестве примера рассмотрим функцию $H(\xi)$ в (8.58) следующего вида:

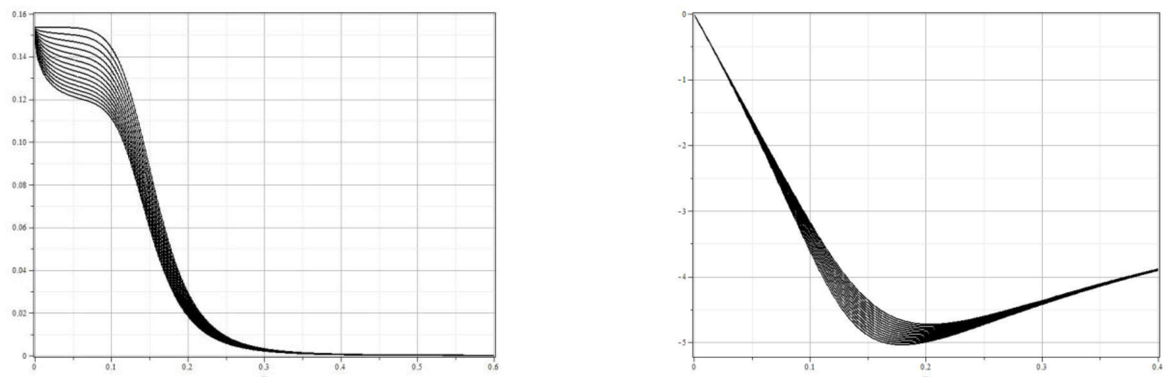
$$H(\xi) = \rho_0(\xi^6 / k),$$

где k и ρ_0 - постоянные параметры. В начальный момент времени для случая $a = \infty, \rho_0 = 2, k = 2$ имеем:

$$z_2(x) = 2\sqrt{2}\sqrt{x},\; z_2(x) = \sqrt{2} / \sqrt{x}, \quad \theta(x,0) = 2(z_0^6(x)) = 2(256x^3),$$

$$\rho(x,0) = 1536 / (65536x^2 + 1), \quad u(x,0) = -\frac{2}{\sqrt{x}}((256x^3))^{1/2}. \tag{8.64}$$

Выбор начального распределения маркеров в таком виде необходим для того, чтобы распределение плотности в начале координат в начальный момент времени не имело бы сингулярности. Скорость потока в начальный момент времени в начале координат и при $x \to \infty$ равна нулю. Графики эволюции профилей распределения плотности и скорости потока представлены на рис. 8.4.



a b

Рис. 8.4. Эволюция плотности (a) и скорости потока (b) для начальных распределений (8.42), 0 - $t = 0$*, 15 -* $t = 0.75$ *(с шагом* $\Delta t = 0.05$*)*

Как видно из графиков, в начале координат формируется сингулярность из пыли, лежащей в непосредственной близости от начала координат. Скорость потока до образования сингулярности в начале координат остается конечной.

8.7.3 Неоднородный координатный сдвиг

Как следует из приведенных примеров, чаще всего гидродинамические подстановки позволяют найти лишь определенный класс решений исследуемой гидродинамической системы, относящийся к некоторому классу начальных распределений параметров системы. Однако, как будет показано в настоящем разделе, существуют специальные преобразования координат и времени системы, которые позволяют расширить общий класс решений и получить полное решение задачи.

Рассмотрим вначале преобразование системы уравнений баротропного течения газа в случае использования новой пространственной координаты $\xi = x + X(\theta)$ вместо x . В этом соотношении $X(\theta)$ - некоторая дифференцируемая функция маркера θ. Тогда имеем:

$$\theta(x,t) = \Theta(\xi,t),\ u(x,t) = v(\xi,t).$$

Вычисляя производные полей $\Theta(\xi,t)$, $v(\xi,t)$ и $\rho(\xi,t)$ по x и t, имеем:

$$\frac{\partial\Theta(\xi,t)}{\partial t} = \frac{\partial\Theta}{\partial\xi}X'(\theta)\theta_t + \frac{\partial\Theta}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,t)}{\partial x} = \frac{\partial\Theta}{\partial\xi}(1 + X'(\theta)\theta_x),$$

$$\frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial\xi}X'(\theta)\theta_t + \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial\xi}(1 + X'(\theta)\theta_x),$$

$$\rho = \theta_x = \frac{\partial\Theta}{\partial\xi}(1 + X'(\theta)\theta_x) = \rho(1 + X'(\theta)\rho).$$

В результате уравнения для Θ, $v(\xi,t)$ и выражение для $\rho = \theta_x$ будут такими:

$$\Theta_t + v\Theta_\xi = 0,\ \rho = \Theta_\xi = \frac{\rho}{1 + X'(\theta)\rho},$$

$$v_t + vv_\xi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\xi}(1 + X'(\theta)\theta_x) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\xi}. \qquad (8.65)$$

Можно видеть, что в новых координатах система выглядит идентично предыдущей, т.е. преобразование

$$x \to \xi = x + X(\theta),\ \rho \to \rho = \rho/(1 + X'(\theta)\rho),$$

где $X(\theta)$ - произвольная функция маркера, оставляет систему инвариантной. В частности, если $P(\xi,t) = F(\rho)$, то полученные решения (8.30) для баротропного уравнения состояния приводят к решениям для уравнения состояния следующего вида:

$$P = F(\rho) = F(\rho/(1 + X'(\theta)\rho)),$$

с произвольной $X(\theta)$. При этом новые решения получаются с помощью преобразования координат и вычисления θ из решений для ρ (8.30) и уравнения

$$\theta = \Theta(x + X(\theta),t). \qquad (8.66)$$

Это есть уравнение отображения маркера в себя, оставляющее уравнения инвариантными.

Заметим, что система (8.65) может быть преобразована с помощью аналогичного преобразования $\xi \to \eta = \xi + Y(\Theta)$ к тому же виду. Плотность $\rho^{[1]}$ после второго преобразования будет связана с исходной соотношением

$$\rho^{[1]}(\eta,t) = \frac{\rho(\xi,t)}{Y(\Theta(\xi,t)) + \rho(\xi,t)} = \frac{\rho(x,t)}{(Y(\Theta) + 1)\rho(x,t) + Y(\Theta)X(\theta)}. \qquad (8.67)$$

Это преобразование оказывается более общим в том смысле, что приводит к более общей зависимости давления в системе, чем до преобразования, от плотности и маркера.

8.7.4 Неоднородное координатное масштабирование

Рассмотрим теперь еще одно координатное преобразование уравнений, полагая, что зависимость поля скорости и плотности от координат выглядит следующим образом:

$$u(x,t) = v(\tau,\xi),\ \rho(x,t) = \rho(\tau,\xi),$$

где

$$\tau = T(\theta)t,\ \xi = X(\theta)x, \tag{8.68}$$

где $T(\theta)$ и $X(\theta)$ - некоторые заданные функции маркера θ. Вид этих функций будет вычислен позже. Эти преобразования будем называть неоднородным координатным масштабированием.

Вычисляя, как и раньше, производные от функции $v(\xi,\tau)$, находим:

$$\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} xX'(\theta)\theta_t + \frac{\partial v}{\partial \tau}(T(\theta) + tT'(\theta)\theta_t),$$

$$\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}(X(\theta) + xX'(\theta)\theta_x) + \frac{\partial v}{\partial \tau} tT'(\theta)\theta_x.$$

Эйлерова производная в результате будет иметь следующий вид:

$$u_t + uu_x = \frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial t} + v(\xi,\tau)\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \tau}T(\theta) + v(\xi,\tau)\frac{\partial v}{\partial \xi}X(\theta).$$

Проводя аналогичные вычисления, находим, что функция

$$\Theta(\xi,\tau) = \theta(x,t),$$

удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Theta_\tau T(\theta) + v(\xi,\tau)\Theta_\xi X(\theta) = 0,$$

которое в точности совпадает с уравнением переноса маркера Θ со скоростью $v(\xi,\tau)$ в случае $T(\theta) = X(\theta)$.

Подставляя полученные соотношения в уравнение (8.50), преобразуем его к следующему виду:

$$v_\tau T(\theta) + vv_\xi X(\theta) = -\frac{X^n(\theta)}{\xi^n}(4\pi G\theta + g_0). \tag{8.69}$$

Здесь полагается $g_0(t) = const$.

Выберем теперь функцию $T(\theta)$ так: $T(\theta) = X(\theta)$. Тогда уравнение для v принимает такой вид:

$$v_\tau + vv_\xi = -\frac{X^{n-1}(\Theta)}{\xi^n}(4\pi G\Theta + g_0). \qquad (8.70)$$

Поскольку функция $\Theta(\xi,\tau)$ удовлетворяет уравнению для маркера в переменных ξ и τ, то для построения решения уравнения (8.70) можно воспользоваться теми же соотношениями, которые были получены выше, с той разницей, что функция $F(\Theta)$ теперь вычисляется из соотношения

$$F^2(\Theta) = (4\pi G\Theta + g_0)X^{n-1}(\Theta). \qquad (8.71)$$

Соответственно, для $v(\xi,\eta)$ будем иметь:

$$v(\xi,\tau) = \pm f_n(\xi)\sqrt{4\pi G\Theta + g_0}\sqrt{X(\Theta)}. \qquad (8.72)$$

Решение для функции $\Theta(\xi,\tau)$ строится из уравнения Хопфа (8.57) с функцией $F(\Theta)$ (8.71):

$$\Theta(\xi,\tau) = H(\xi - F(\Theta)\tau) \qquad (8.73)$$

Функции $H(y)$ и $X(\theta)$ вычисляются из начальных условий:

$$H(xX(\theta_0(x))) = \theta_0(x), \qquad (8.74)$$

$$u_0(x) = u(x,0) = f_n(xX(\theta_0(x)))\sqrt{4\pi G\Theta + g_0}\sqrt{X(\theta_0)}, \qquad (8.75)$$

при заданных начальных распределениях плотности $\rho(x,0) = \rho_0(x) = \theta_{0,x}x^{-2}$ и скорости потока $u(x,0) = u_0(x)$.

8.7.5 Решения с произвольным распределением скорости

Общий алгоритм построения решения для сферически симметричного случая $n = 2$ с помощью преобразования неоднородного координатного масштабирования в общем случае состоит в совместном решении уравнений (8.74) и уравнения (8.75), которое можно записать в виде

$$u(x,0) = u_0(x) = \sqrt{\frac{X(\theta_0)}{a} + \frac{1}{x}}\sqrt{8\pi G\theta_0(x) + 2g_0}. \qquad (8.78)$$

Отсюда находим выражение для функции $X(\theta_0)$:

$$X(\theta_0(x)) = \frac{au_0^2(x)}{8\pi G\theta_0(x) + g_0} - \frac{a}{x}. \qquad (8.79)$$

Отметим, что в частном случае нулевой начальной скорости среды $u_0 = 0$ это соотношение принимает наиболее простой вид:

$$X(\theta_0(x)) = -\frac{a}{x}.$$

После вычисления $X(\theta)$ из соотношения (8.74) затем вычисляется функция $H(y)$, знание которой необходимо для вычисления решений $\theta(x,t)$ в любой момент времени из уравнения

$$\theta = H\left(z_2(xX(\theta)) - tX^{3/2}(\theta)\sqrt{4\pi G\theta + g_0}\right). \qquad (8.80)$$

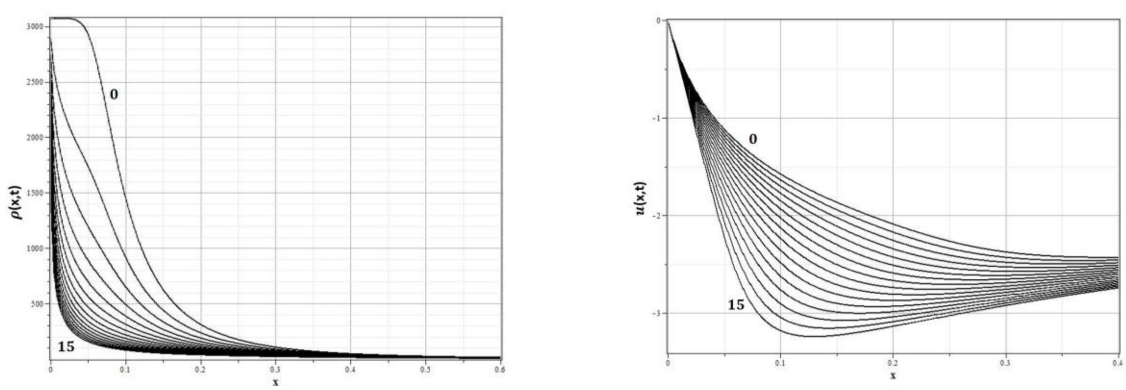
Отметим важное обстоятельство, состоящее в том, что в специальном случае $a = \infty$ соотношение (8.79) не выполняется, и распределение скорости и плотности в начальный момент времени $t = 0$ определяются одновременно распределением $\theta_0(x)$:

$$u(x,0) = u_0(x) = \sqrt{\frac{8\pi G\theta_0(x) + 2g_0}{x}}, \; \rho(x,0) = x^{-2}\theta_{0,x}.$$

В этом случае $X(\theta)$ и $H(y)$ будут задавать другие характеристики потока, например, скорость изменения одного из параметров $u(x,t)$ и $\rho(x,t)$ со временем при $t = 0$.

Основной трудностью при построении решений для заданных начальных распределений $\rho(x,0)$ и $u(x,0)$ является совместное решение уравнений (8.74), (8.79) и (8.80). Поскольку из этих уравнений функции $X(\theta)$ и $H(y)$ вычисляются неявно, то при вычислении $\theta(x,t)$ из (8.80) их необходимо решать заново для каждого значения переменных x и t. Это существенно осложняет численное решение задачи. Но так как решение (8.80) справедливо при любом выборе $X(\theta)$, то для построения решений можно задавать саму функцию $X(\theta)$ подходящим образом, а начальное поле скорости вычислять уже из соотношения (8.72).

В качестве примера рассмотрим $X(\theta) = 1/(\theta^2 + 1)$. Этот выбор определяется тем, что в начальный момент времени распределения плотности и скорости не сильно отличаются от рассмотренных ранее для $X(\theta) \equiv 1$. Соответствующие графики эволюции плотности и скорости приведены на рис. 8.5.



a b

Рис. 8.5. Эволюция плотности (a) и скорости потока (b) для начальных распределений (8.64), 0 - $t = 0$, 15 - $t = 0.75$ (с шагом $\Delta t = 0.05$)

8.8 Космологические модели

8.8.1 Однородный поток Хаббла

Среди интегрируемых с помощью развитого метода моделей интерес представляет задача о космологическом расширении в случае пространственно-плоской Вселенной в рамках классической механики [115, 67]. Для построения соответствующего решения рассмотрим в сферическом случае подстановку для поля скорости следующего вида:

$$u(x,t) = H(t)x, \tag{8.81}$$

где $H(t)$ - некоторая функция времени. Соотношение (8.81) представляет собой закон Хаббла космологического расширения [67, 7], в котором функция $H(t)$ называется параметром Хаббла. Вычисляя действие оператора $\hat{L}$ на $u(x,t)$, находим:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t)u = (\dot{H} + H^2)x. \tag{8.82}$$

Используя (8.81), для функции маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t)x\theta_x = 0. \tag{8.83}$$

Решение этого уравнения имеет следующий общий вид:

$$\theta = T(x/a(t)), \tag{8.84}$$

где $T(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция, $a(t)$ - функция, называемая в космологии масштабным фактором:

$$H(t) = \dot{a}/a.$$

Отсюда находим распределение плотности среды в пространстве:

$$\rho = \frac{1}{x^2}\theta_x = \frac{1}{x^2 a(t)}T'(x/a). \tag{8.85}$$

С другой стороны, ускорение свободного падения имеет следующий вид:

$$\phi_x = 4\pi G\frac{1}{x^2}T(x/a) \tag{8.86}$$

Для того чтобы это выражение совпадало с правой частью уравнения Эйлера (8.82), достаточно выбрать функцию $T(x/a)$ в следующем виде:

$$T(\xi) = \alpha\xi^3.$$

В результате находим:

$$u_t + uu_x = (\dot{H} + H^2)x = -4\pi G\frac{x}{a^3}\alpha.$$

Из этого соотношения находим уравнение для масштабного фактора:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\alpha}{a^3}. \tag{8.87}$$

Распределение плотности в пространстве теперь однородно и имеет вид

$$\rho = \frac{3\alpha}{a^3(t)}. \tag{8.88}$$

Отсюда видно, что постоянная $4\pi\alpha$ представляет собой массу материи внутри сферы радиуса $a(t)$, которая остается постоянной в процессе расширения ($H > 0$) или сжатия $H < 0$ пыли.

Уравнение (8.87) можно переписать в стандартной форме относительно масштабного фактора:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G\alpha}{a^2}, \tag{8.89}$$

что соответствует классической модели космологического расширения [7]. Это уравнение интегрируется в квадратурах. Именно первый интеграл движения для (8.89) имеет такой вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = E + \frac{4\pi G\alpha}{a}, \tag{8.90}$$

здесь E - постоянная интегрирования. В результате решение можно записать в виде неявной функции:

$$\begin{aligned} &4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea+\mu)} + \ln(4\sqrt{E}) - \sqrt{2}\mu\ln(4\sqrt{2}Ea + \sqrt{2}\mu + 4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea+\mu)}) = \\ &\quad = 8E^{3/2}(t-T), \end{aligned} \tag{8.91}$$

где T - вторая постоянная интегрирования, а $\mu = 8\pi G\alpha$. Построенное решение по своей сути эквивалентно классическим решениям, рассмотренным в
[115, 67], но с тем отличием, что оно сформулировано в терминах гидродинамики, а не в терминах динамики сферы конечного радиуса. Это дает преимущества по отношению к возможности сформулировать и решить данную задачу в более общем виде.

8.8.2 Неоднородный поток Хаббла

Рассмотрим теперь обобщение задачи Хаббла, предполагая, что параметр Хаббла может зависеть от точки среды, т.е. для каждой отдельной галактики он может иметь в текущий момент времени свое собственное значение. Это означает, что в момент начального космологического “взрыва” каждая из материальных точек (по сути – галактик) могла получить свой собственный импульс в зависимости, например, от ее массы. Такое предположение представляется более правдоподобным, чем предположение для случая однородного потока Хаббла, в котором начальные скорости определяются исключительно расстоянием от центра “взрыва” сразу после выхода Вселенной из космологической сингулярности.

Для реализации такой идеи вместо (8.81) рассмотрим поток следующего вида:

$$u(x,t) = H(t,\theta)x, \tag{8.92}$$

где $H(t,\theta)$ - параметр Хаббла, зависящий от значения маркера θ неопределенным пока способом. Вычисляя действие оператора $\hat{L}$ на $u(x,t)$, находим:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t)u = (\dot{H} + H^2)x, \tag{8.93}$$

здесь и далее $\dot{H}$ - частная производная по t. Используя (8.92), для маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t,\theta)x\theta_x = 0. \tag{8.94}$$

Это уравнение, как и раньше, преобразуется к уравнению Хопфа и, следовательно, его общее решение можно записать в виде

$$\theta = \Theta(\chi),\ \chi = \frac{x}{A(t,\theta)}, \tag{8.95}$$

с произвольной функцией $\Theta(\chi)$, где

$$A(t,\theta) = A_0(\theta)\exp\left(\int_C H(t,\theta)dt\right), \tag{8.96}$$

и интеграл берется по времени t вдоль характеристик C, на которых θ постоянно, а $A_0(\theta)$ - постоянная интегрирования по t.

Для соответствия неоднородного потока Хаббла потенциалу поля тяготения должно выполняться соотношение

$$\phi_x = \frac{4\pi G}{x^2}\theta(x,t) = -(\dot{H} + H^2)x. \tag{8.97}$$

Как и в случае однородного потока Хаббла, для того чтобы это уравнение разрешалось, достаточно произвольную пока функцию $\Theta(\chi)$ выбрать следующим образом:

$$\Theta = \alpha\chi^3.$$

В результате для функции $H(t,\theta)$ получаем следующее уравнение:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\alpha}{A^3}. \tag{8.98}$$

Поскольку в это уравнение функция θ не входит явно, то это уравнение можно решать так же, как и в случае однородного потока, но постоянные интегрирования по времени при этом могут быть произвольными функциями θ. Следовательно, решение для $A(t,\theta)$ будет иметь тот же вид, что и (8.91), но с тем отличием, что в нем следует считать постоянные E и T произвольными функциями θ: $E = E(\theta)$ и $T = T(\theta)$.

В отличие от однородного потока теперь распределение плотности материи (галактик) в пространстве и времени будет неоднородным и его следует вычислять исходя из уравнения

$$\rho = \frac{\theta_x}{x^2} = \frac{3\alpha A}{A^4 + 3\alpha x^3 A_\theta}, \; A_\theta = \frac{\partial A(t,\theta)}{\partial \theta}. \qquad (8.99)$$

Это распределение зависит от выбранной зависимости решения $A(t,\theta)$ уравнения (8.98) от θ. В это соотношение следует подставлять решение из (8.91) с заданными из начальных условий значениями функций $E(\theta)$ и $T(\theta)$. Смысл полученного решения состоит в том, что в случае неоднородного закона Хаббла в некоторый момент времени можно каждой отдельной галактике приписать определенную скорость космологического “разбегания” относительно наблюдателя. После этого можно построить модель того, как Вселенная будет расширяться далее.

Полный анализ возможных космологических решений, соответствующих (8.99), требует специального обсуждения. Сделаем лишь некоторые общие замечания, вытекающие из общих свойств функции ρ. Если $A(t,\theta)$, как функция x, ограничена при $x \to \infty$, то в этом пределе плотность стремится к нулю. Отсюда следует, что плотность на больших масштабах может быть нулевой, т.е. распределение материи в такой модели носит островной характер. Плотность же на малых расстояниях от наблюдателя, когда $x \simeq 0$, будет примерно такой же, что и в случае однородного потока Хаббла.

8.9 Гидродинамические подстановки в многомерном случае

До сих пор метод функциональных подстановок применялся в основном к одномерным по сути задачам. В предыдущих разделах было показано, что метод гидродинамических подстановок (МГП) может быть применен и в двумерном, и в трехмерном случае. Однако такие случаи его использования ограничивались в основном ситуациями, когда симметрия задачи позволяла свести уравнения к одной сферической координате. Следует обратить внимание на то, что основой МГП является уравнение переноса маркеров. Но уравнение переноса маркеров лежит в основе всей гидродинамики. Поэтому можно ожидать, что существует возможность построить вариант МГП, подходящий для решения двух и трехмерных задач динамики жидкости. В данном разделе приведены результаты работы [40], в которой были получены некоторые важные результаты применения МГП к трехмерным уравнениям динамики жидкости.

8.9.1 Маркеры в многомерном случае

В соответствии с общей идей работы [40] с каждой точкой среды можно формально связать набор маркерных функций $e^a = e^a(x,t), a = 1,2,3$, значения которой привязаны к этим точкам. Это означает, что уравнение переноса маркеров можно записать в следующем виде:

$$\hat{L}e^a = \frac{\partial e^a}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = 0, \quad a = 1,2,3, \quad \alpha = 1,2,3. \tag{8.100}$$

где введено обозначение

$$\hat{L}e^a = \frac{\partial e^a}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \tag{8.101}$$

для оператора $\hat{L}$ переноса потоком с полем скорости $u(x,t)$. Заметим, что здесь и далее используется соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу. Как и в одномерном случае, следствием этого соотношения является дифференциальный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}(u\rho) = 0. \tag{8.102}$$

где

$$\rho = \det\left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right). \tag{8.103}$$

Соотношение (8.102) получается дифференцированием (8.100) по x^α и сверткой получающихся соотношений с матрицей $G = \partial x^\alpha / \partial e^a$ по всем индексам:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} + u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}\right) = 0.$$

Здесь использованы известные тождества:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \ln\det G}{\partial t}, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \ln\det G}{\partial x^\beta}.$$

Появление в качестве тождества уравнения сохранения массы непосредственно из формального уравнения переноса маркеров (8.100), позволяет получить эффективный метод построения точно решаемых моделей течения жидкости не только для задач с плоской, цилиндрической и сферической симметриями [48, 49], но и для более общего типа течений в трехмерном пространстве.

8.10 Гидродинамические подстановки для непотенциальных полей

В обобщенном варианте метод гидродинамических подстановок дает результаты и для непотенциальных течений жидкости. Рассмотрим вместе с полем скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ уравнение переноса маркеров $e^a(x,t),\ a=1,2,\dots,n$, имеющее следующий общий вид:

$$\hat{L}_n e^a = 0, \tag{8.104}$$

где $\hat{L}_n$ - n-мерный оператор переноса:

$$\hat{L}_n = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}. \tag{8.105}$$

Основным тождеством, которое вытекает из данного формального уравнения, является дифференциальный закон сохранения плотности $|J|$:

$$J = \det(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha}), \tag{8.106}$$

который имеет следующий вид:

$$\frac{\partial |J|}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\beta}(u^\beta |J|) = 0. \tag{8.107}$$

Вывод этого закона производится с помощью следующих соотношений:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{a=1}^{n}\left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta}\right] =$$

$$= \frac{\partial \ln |J|}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} u^\beta \frac{\partial \ln |J|}{\partial x^\beta} + \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = 0.$$

Из этого тождества и следует уравнение (8.107). При его выводе учитывалось, что матрица G с компонентами $G_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial e^a$ является обратной матрице J с компонентами $J_\alpha^a = \partial e^a / \partial x^\alpha$:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} G_a^\alpha J_\alpha^b = \delta_a^b, \quad \sum_{b=1}^{n} G_b^\beta J_\alpha^b = \delta_\alpha^\beta.$$

Как и в одномерном случае, соотношение (8.107) можно рассматривать как закон сохранения массы с плотностью $\rho = |J|$. Следовательно, используя другие дифференциальные тождества, которые можно получить непосредственно из уравнения переноса (8.104), в свою очередь можно получать интегрируемые модели течений.

Кроме тождества (8.107), из (8.104) можно получить следующее тождество:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \ln |J|}{\partial x^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{n} u^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \ln |J|}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \ln |J|}{\partial x^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} = -\frac{1}{|J|}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(|J|\frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha}\right). \tag{8.108}$$

Это тождество дает возможность рассмотреть подстановку следующего вида:

$$u^{\alpha} = -\nu \frac{\partial \ln |J|}{\partial x^{\alpha}} + U^{\alpha}(e). \tag{8.109}$$

Здесь $U^{\alpha}(e)$ - векторное поле, зависящее только от маркеров. Интерпретируя (8.107) как уравнение неразрывности (закон сохранения массы), представим плотность массы в виде

$$\rho = m_0 |J|, \tag{8.110}$$

где m_0 - некоторая размерная постоянная. Действуя оператором $\hat{L}_n$ на векторное поле u с компонентами (8.109), находим:

$$\hat{L}_n u^{\alpha} \equiv \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{n} u^{\beta} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \left(\rho \frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

Рассмотрим уравнение переноса гидродинамическим потоком со скоростью $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ среды со свойствами, связанными с векторным полем $\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{\beta}(x,t) \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \right) A_{\alpha} = f_{\alpha}, \ \alpha, \beta = 1, 2, 3, \tag{8.111}$$

при наличии источников, которые описываются векторным полем $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ с компонентами $f_{\alpha}(x,t), \alpha = 1,2,3$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющемуся индексу. Дифференцируя уравнение (8.111) по координатам x^{γ}, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} G_{\alpha\beta} + u^{\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} G_{\alpha\beta} + \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} G_{\alpha\gamma} = F_{\alpha\beta}, \tag{8.112}$$

где введены обозначения

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \quad F_{\alpha\beta} = \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}.$$

Обозначим также через Q матрицу с элементами $Q^{\alpha\beta}$, обратную матрице G с элементами $G_{\alpha\beta}$:

$$Q^{\alpha\beta} G_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Умножая соотношение (8.112) на матрицу Q и сворачивая полученное соотношение по свободным индексам, находим:

$$Q^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\beta\gamma} + Q^{\alpha\beta} u^{\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} G_{\beta\alpha} + \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} Q^{\alpha\beta} G_{\beta\nu} = Q^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{8.113}$$

Матрицы Q и G взаимно обратны. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \det \hat{G} = Q^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial t} G_{\beta\alpha}, \ \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} \ln \det \hat{G} = Q^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} G_{\beta\alpha}.$$

В результате из (8.113) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\det G + u^{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\ln\det G + \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}} = \det GQ^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\det G + \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}(u^{\gamma}\det G) = \det GQ^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \qquad (8.114)$$

Рассмотрим отдельно правую часть (8.114). Заметим, что матрицу Q размерности 3×3 можно представить в следующем общем виде:

$$Q\alpha\lambda = \frac{1}{\det G}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\nu}}, \qquad (8.115)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - полностью антисимметричный символ Леви-Чевитта. Исходя из этого соотношения, находим:

$$\det GQ^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}.$$

Предполагая непрерывность полей A и f, т.е.

$$\frac{\partial^2 A^{\gamma}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 A^{\gamma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}},\ \frac{\partial^2 f_{\gamma}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 f_{\gamma}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\nu}},$$

получаем следующие тождества:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\nu}}f_{\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}A_{\beta}\frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}\right) \qquad (8.116)$$

Используя эти тождества, (8.114) можно представить в форме дифференциального закона сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\det G + \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(U^{\gamma}_{(a)}\det G\right) = 0,\ a = 1, 2; \qquad (8.117)$$

двумя способами:

$$U^{\gamma}_{(1)} = u^{\gamma} - Q^{\gamma\beta}f_{\beta}, \qquad (8.118)$$

(здесь использовано (8.115)), либо

$$U^{\gamma}_{(2)} = u^{\gamma} - \frac{1}{\det G}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}\varepsilon_{\lambda\gamma\nu}A_{\beta}\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}. \qquad (8.119)$$

Следовательно, уравнения (8.111) допускают дифференциальный закон сохранения (8.117). В частности, если в уравнениях (8.111) положить $\mathbf{A} = \mathbf{u}$, то они преобразуются к уравнениям Эйлера:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}. \qquad (8.120)$$

При этом соотношение (8.117) дает два закона сохранения, имеющих вид (8.118) или (8.119) с заменой $\mathbf{A}$ на $\mathbf{u}$:

$$U^{\gamma}_{(1)} = u^{\gamma} - q^{\gamma\beta}f_{\beta},$$

$$U^{\gamma}_{(2)} = u^{\gamma} - \frac{1}{\det g}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}\varepsilon_{\lambda\gamma\nu}u_{\beta}\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}.$$

Здесь

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\beta}},\ q^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}.$$

Сам принцип вывода этого уравнения указывает на возможность получения бесконечной серии таких законов сохранения. Действительно, пусть решение $\mathbf{A}$ уравнения (8.111) зависит от некоторого параметра ζ : $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t, \varsigma)$. В частности, таким параметром может быть любая координата или время. Тогда, дифференцируя (8.111) по ζ , получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u^{\beta}(x,t)\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{\partial}{\partial \zeta}A_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \zeta}f_{\alpha} - \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \zeta}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}. \tag{8.121}$$

Это уравнение в случае формальной замены

$$\mathbf{A} \to \tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial}{\partial \varsigma}\mathbf{A},\quad \mathbf{f} \to \tilde{\mathbf{f}} = \frac{\partial}{\partial \varsigma}\mathbf{f} - \frac{\partial u^{\beta}}{\partial \varsigma}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\mathbf{A}$$

преобразуется к виду исходного уравнения (8.111) для функций $(\tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{f}})$. Делая соответствующую замену в (8.117), (8.118) и (8.119), приходим к новому дифференциальному закону сохранения, имеющему тот же вид (8.117), с функциями

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial \zeta},\quad Q^{\alpha\beta}G_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma},$$

$$U^{\gamma}_{(1)} = u^{\gamma} - Q^{\gamma\beta}f_{\beta},$$

$$U^{\gamma}_{(2)} = u^{\gamma} - \frac{1}{\det G}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}\varepsilon_{\lambda\gamma\nu}\frac{\partial A_{\beta}}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 A_{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial \zeta}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}$$

Повторяя эту процедуру многократно, получаем бесконечную цепочку дифференциальных законов сохранения, как для (8.111), так и для (8.120).

8.11 Инерционный поток

Воспользуемся тем, что любое векторное поле $\mathbf{U}(\mathbf{A})$ удовлетворяет тождественно уравнению (8.111). В частности, если само поле $\mathbf{u}$ будет иметь такой вид, то его компоненты будут удовлетворять уравнениям Эйлера течения сжимаемой идеальной жидкости:

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u} = 0,\quad \rho_t + div(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{8.122}$$

с нулевыми внешними силами и градиентом давления и плотностью массы $\rho = \det\hat{G}$. Единственным условием этого является соотношение

$$u^{\alpha} = -Q^{\alpha\beta} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial t} = U^{\alpha}(\mathbf{A}), \tag{8.123}$$

Это условие следует рассматривать как систему уравнений, которым должно удовлетворять поле $\mathbf{A}$ для того, чтобы поле $\mathbf{u}$, заданное с помощью (8.109), удовлетворяло (8.123). Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial A_{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} U^{\alpha}(\mathbf{A}) = 0. \tag{8.124}$$

Каждое решение уравнения (8.124) будет давать в соответствии с (8.123) решение уравнения (8.122) и наоборот.

В частности, для случая

$$A_{\alpha} = T_{,\alpha} = \frac{\partial T}{\partial x^{\alpha}} \tag{8.125}$$

уравнение (8.124) упрощается. Для того чтобы в этом случае система была совместна, поле $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3)$ должно иметь определенные свойства, которые допускали бы общий интеграл для всех трех уравнений. Это возможно, если существует такая функция $H(T_x, T_y, T_z)$, что

$$U^{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial T_{,\alpha}}. \tag{8.126}$$

В этом случае функция T должна удовлетворять одному уравнению следующего вида:

$$T_t = H(T_x, T_y, T_z) + C(t), \tag{8.127}$$

где $C(t)$ - произвольная функция времени.

Заметим далее, что в силу (8.111) уравнению неразрывности удовлетворяет более общая функция, чем ρ. Прямой проверкой устанавливается, что любая функция

$$\rho = R(A)\det(\hat{G}). \tag{8.128}$$

удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\rho_t + div(\rho\mathbf{u}) = 0. \tag{8.129}$$

Окончательно, собирая все полученные результаты, находим, что трехмерные уравнения Эйлера сжимаемой жидкости имеют общий класс решений в случае нулевых внешних сил и градиента давления, который описывается полем течения (8.126) с плотностью массы ρ (8.128) при условии, что поле A удовлетворяет уравнению (8.127). Вся совокупность решений этих уравнений определяется произвольным выбором векторного поля $\mathbf{U}(\mathbf{A})$ и функции $H(\mathbf{A})$, которые зависят только от компонент вспомогательного векторного поля $\mathbf{A}$.

Проведенные построения дают общее представление о структуре решений уравнений Эйлера и частично о структуре решений уравнений Навье-

Стокса. В уравнения для вспомогательных полей T_x в одномерном случае и $\mathbf{A}$ в трехмерном (двумерный случай рассматривается аналогично) входят произвольные функции ($\mathbf{U}(\mathbf{A})$, $R(\mathbf{A})$ и т.д.), что позволяет, в частности, получать новые точные решения этих уравнений, подбирая подходящим образом эти произвольные функции.

8.12 Динамика плазмы

Разработанная общая схема гидродинамических подстановок может быть применена и к задачам динамики плазмы. Задачи такого типа имеют ряд подобных друг другу формулировок, которые схожи с формулировкой задачи о самогравитирующей пыли с той разницей, что сила тяготения в этих задачах заменяется на электростатическое поле. При этом в уравнения течения плазмы входит плотность заряда, которая в отличие от плотности массы может иметь два знака, соответствующих знакам зарядов частиц, если идет речь о двухжидкостной плазме. В данном разделе рассмотрим несколько примеров построения точно интегрируемых моделей такого типа.

8.12.1 Зарядовые волны в вакууме

Первым примером применения метода гидродинамических подстановок является задача о движении потока заряженных частиц в вакууме между двумя электродами. Системы такого типа исторически носят название “диод”. Задача о токе в диоде, возникающем под действием разности потенциалов на электродах (между анодом и катодом), является классической задачей теории волн зарядовой плотности и электронных пучков. Эта задача возникла еще на раннем этапе создания электровакуумных приборов [100, 113, 8] при описании тока в вакуумных электронно-лучевых приборах, например лампах, но имеет гораздо большую область применения. Основной проблемой, связанной с описанием тока в диоде, является учет самовоздействия распределенного заряда, движущегося между электродами. Наличие областей с максимумом концентрации распределенного заряда в области движения заряженных частиц называют часто виртуальным катодом. Появление виртуального катода ограничивает ток в диоде (предел Чайлда-Ленгмюра), что приводит к специфическому изменению вольт-амперной характеристики диода. Одним из способов описания явлений, происходящих в таких приборах, является подход, основанный на гидродинамической модели движения заряженной жидкости, находящейся во внешнем и собственном электрическом поле [20, 58, 59]. Обычно такая система уравнений решается с помощью различных приближенных или численных методов.

Для анализа всех особенностей явлений образования виртуального катода желательно иметь точные решения самосогласованной задачи, которая проанализирована в настоящее время лишь в стационарном случае [20, 58, 59]. В настоящем разделе для решения системы уравнений динамики волн зарядовой плотности в диоде воспользуемся методом гидродинамических подстановок, общие идеи которого были изложены в предыдущих разделах.

8.12.2 Поток заряженных частиц в вакууме

Рассмотрим одномерную модель диода, в котором под действием разности потенциалов ϕ_1 на двух ограничивающих электродах существует ток с плотностью $j = qnv$, где $v(x,t)$ – скорость частиц, $n(x,t)$ – концентрация частиц, имеющих заряд q и массу m, так что $\rho_e = qn(x,t)$ – плотность заряда, а $\rho_m = mn(x,t)$ – плотность массы. Потенциал $\phi = \phi(x,t)$ изменяется непрерывно между электродами от значения $\phi(0,t) = 0$ на одном электроде до значения $\phi(d,t) = \phi_1(t)$ на другом, где d – расстояние между электродами. Систему уравнений, которая описывает динамику возникающего токопереноса, можно представить в виде трех уравнений (см. [20]):

$$n_t + (nv)_x = 0, \tag{8.130}$$

$$v_t + vv_x = -\frac{q}{m}\phi_x, \tag{8.131}$$

$$\phi_{xx} = -4\pi qn. \tag{8.132}$$

Первое уравнение представляет собой закон сохранения заряда, второе – уравнение Эйлера течения идеальной заряженной жидкости, третье – уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, созданного распределенным в пространстве зарядом. Граничные условия для тока в области переноса имеют следующий вид:

$$\phi(0,t) = 0,\ \phi(d,t) = \phi_1(t), \quad v(0,t) = v_0(t),\ n(0,t) = n_0(t).$$

В качестве начальных условий следует задавать начальные распределения в пространстве плотности заряда $n(x,0) = N_0(x)$ и скорости $v(x,0) = U_0(x)$.

Для построения решений (8.130)-(8.132) вновь воспользуемся методом гидродинамических подстановок, опираясь на уравнение переноса маркера (8.1), а также на следствия из него (8.2) и (8.8). Как и в случае самогравитирующей пыли, следующий шаг построения решения состоит в интегрировании уравнения Пуассона (8.132). Используя подстановку $n = \theta_x$ и интегрируя (8.132), находим:

$$\phi_x = -4\pi q\theta - e_0(t), \tag{8.133}$$

где $e_0(t)$ – функция t, связанная с начальными условиями. Используя последнее соотношение, для скорости потока v получаем уравнение:

$$v_t + vv_x = \gamma\theta + g_0(t). \tag{8.134}$$

Здесь $\gamma = 4\pi q^2 / m$ и $g_0(t) = (q/m)e_0(t)$. Будем искать решение для v в виде

$$v(x,t) = V(\theta) + \gamma t\theta + u_0(t). \tag{8.135}$$

Подставляя это соотношение в левую часть (8.134) и учитывая то, что функция θ по определению связана с v соотношением (8.1), находим:

$$v_t + vv_x = (V'(\theta) + \gamma t)(\theta_t + v\theta_x) + \gamma\theta + \dot{u}_0 = \gamma\theta + \dot{u}_0.$$

При этом уравнение (8.134) обращается в тождество при условии $g_0(t) = \dot{u}_0$. Используя теперь связь (8.1), приходим к квазилинейному уравнению для функции θ:

$$\theta_t + (V(\theta) + \gamma t\theta + u_0(t))\theta_x = 0. \tag{8.136}$$

8.12.3 Анализ решений

Уравнение (8.136), как и в случае с самогравитирующей пылью, представляет собой вариант уравнения Хопфа, общий интеграл которого задается с помощью следующего алгебраического уравнения:

$$\theta = H(x - V(\theta)t - \gamma t^2\theta/2 - x_0(t)). \tag{8.137}$$

где $H(\eta)$ – произвольная дифференцируемая функция аргумента $\eta = x - V(\theta)t - \gamma t^2\theta/2 - x_0(t)$ и $\dot{x}_0(t) = u_0(t)$. Вид функции $H(\eta)$ задается начальным распределением функции θ:

$$\theta(x,0) = H(x - x_0(0)),$$

что, в свою очередь, определяется начальным распределением концентрации частиц:

$$n(x,0) = \theta_x\big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}H(x - x_0(0)).$$

При этом начальное распределение скорости определяет вид функции $V(\theta)$, исходя из соотношения

$$v(x,0) = V(\theta(x,0)) + \dot{x}_0(0).$$

Распределение потенциала в начальный момент времени определяется распределением плотности заряда:

$$\phi(x,0) = -4\pi q\int_0^x \theta(x,0)dx - \frac{m}{q}\ddot{x}_0(0)x + \phi_0(0). \tag{8.138}$$

8.12.4 Свойства решений начальной задачи

Вычислим теперь значение потенциала на границах области, т.е. в точках $x = 0$ и $x = d$. Имеем:

$$\phi(0,t) = 0 = \phi_0(t),$$

$$\phi(d,t) = -4\pi q\int_0^d \theta(x,t)dx - \frac{m}{q}\ddot{x}_0(t)d = \phi_1(t).$$

Из последнего соотношения находим:

$$\ddot{x}_0(t) = -\frac{q}{md}\phi_1(t) - \frac{\gamma}{d}\int_0^d \theta(x,t)dx. \tag{8.139}$$

и в конечном итоге это уравнение определяет ток в точке $x = d$:

$$j_1(t) = qn(d,t)v(d,t) = q\theta_x(d,t)(V(\theta(d,t)) + \gamma t\theta(d,t) + \dot{x}_0(t)).$$

Зависимость $j_1 = j_1(\phi_1)$ определяет вид вольт-амперной характеристики диода, что является наиболее важным приложением модели, описываемой уравнениями (8.131) - (8.132).

Анализ уравнения (8.139) требует вычисления интеграла в правой части. Этот интеграл можно вычислить, предполагая выполнение некоторых упрощающих условий. В качестве такого условия рассмотрим требование, что в начальный момент все заряженные частицы обладают во всем пространстве одинаковой скоростью, т.е.

$$v_0(x,0) = W_0 = const.$$

Из этого условия следует: $V(\theta) = 0$. Тогда начальное распределение θ , определяемое плотностью заряда, задается одной функцией $\theta(x,0) = H(x - x_0(0))$. В этом случае удобно интеграл движения (8.137) переписать в следующем виде:

$$x - x_0(t) - \gamma t^2\theta / 2 = F(\theta),$$

где $F(\theta)$ – функция, обратная $H(\eta)$. Дифференцируя это соотношение по x , после несложных преобразований находим:

$$n = \theta_x = \frac{1}{F'(\theta) + \gamma t^2 / 2}. \tag{8.140}$$

Из этого соотношения сразу следует, что для начальных распределений параметров в рассматриваемой системе не происходит опрокидывания фронта волны зарядовой плотности. Момент опрокидывания t_* и координата x_* возникновения разрыва фронта определяются как первый момент времени и координата, в которых происходит обращение в ноль знаменателя соотношения (8.140). Если $F'(\theta) > 0$ при всех допустимых θ , то опрокидывания фронта не возникает. Учитывая, что концентрация частиц является всюду неотрицательной функцией, находим, что знаменатель в (8.140) также является неотрицательным и, следовательно: $F'(\theta(x,t)) \geq -\gamma t_*^2 / 2$. Возникновение же многозначности решения обязательно связано с изменением знака знаменателя в (8.140), что не имеет в рамках данной задачи физического смысла.

Используя решение (8.140), получаем представление для интересующего нас интеграла в правой части (8.139):

$$\int_0^d \theta(x,t)dx = \int_0^d (F'(\theta)+\gamma t^2/2)\theta(x,t)\theta_x dx = \int_{\theta(0,t)}^{\theta(d,t)} (F'(\theta)+\gamma t^2/2)\theta(x,t)d\theta =$$
$$= Q(\theta(d,t)) - Q(\theta(0,t)) + \gamma t^2(\theta^2(d,0)-\theta^2(0,t))/4.$$

Здесь

$$Q(\theta) = \int F'(\theta)\theta d\theta = F(\theta)\theta - \int F(\theta)d\theta.$$

Таким образом, уравнение для $x_0(t)$ теперь можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{x}_0(t) = -\frac{q}{md}\phi_1(t) - \frac{\gamma}{d}[Q(\theta(d,t)) - Q(\theta(0,t)) + t^2\frac{\gamma}{4}(\theta^2(d,t)-\theta^2(0,t))]. \quad (8.141)$$

8.12.5 Примеры решений

Рассмотрим решение граничной задачи для простых начальных распределений плотности и скорости зарядов. В качестве таких распределений выберем следующие:

$$n(x,0) = n_0 = const,\ v_0(x,0) = U_0 = const.$$

Из этих условий находим:

$$H(x - x_0(0)) = n_0(x - x_0(0)) + H_0,\ V(\theta) = 0.$$

В результате решение для функции θ имеет вид:

$$\theta(x,t) = \frac{n_0(x - x_0(t) + H_0/n_0)}{1 + n_0\gamma t^2/2}.$$

Отсюда следует, что плотность заряда при таком начальном распределении остается и далее постоянной в пространстве, но зависящей от времени величиной:

$$n(x,t) = \frac{n_0}{1 + n_0\gamma t^2/2}.$$

Скорость потока при этом оказывается линейно зависящей от расстояния и имеет вид:

$$v(x,t) = \frac{n_0 t(x - x_0(t) + H_0/n_0)}{1 + n_0\gamma t^2/2} + \dot{x}_0.$$

Соответствующее решение для потенциала находим из (8.138):

$$\phi(x,t) = -4\pi q\frac{n_0(x^2/2 - x[x_0(t) - H_0/n_0])}{1 + n_0\gamma t^2/2} - \frac{m}{q}\ddot{x}_0.$$

Для получения окончательной формы зависимости всех параметров задачи от времени необходимо вычислить функцию $x_0(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_0 + \frac{n_0(d/2 - x_0(t) + H_0/n_0)}{1 + \gamma n_0 t^2/2} = \frac{q}{md}\phi_1(t).$$

Вводя переменные $z = x_0(t) - d/2 - H_0/n_0$ и $\tau = t\nu_0$, где $\nu_0 = \sqrt{\gamma n_0}$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} - \frac{z}{1+\tau^2/2} = -\frac{q}{m\nu_0^2 d}\phi_1(\tau/\nu_0). \qquad (8.142)$$

Решение однородного уравнения можно записать в следующем виде:

$$Z_0(\tau) = (1+\tau^2/2)[A + B\frac{\sqrt{2}}{2}(\tau/\sqrt{2})] + B\tau.$$

В случае $\phi_1 = const$ общее решение неоднородного уравнения имеет такой вид:

$$z(\tau) = Z_0(\tau) - \frac{q}{m\nu_0^2 d}\phi_1\left[(1+\tau^2/2)\ln(1+\tau^2/2) - 2\right].$$

Начальными условиями для решений (8.142) являются соотношения $x_0(0) = X_0$ и $\dot{x}_0(0) = V_0$.

Рассмотренный пример имеет скорее теоретическое значение, поскольку начальное распределение с постоянной плотностью частиц трудно реализовать на практике. Поэтому интерес представляют более естественные распределения. В качестве такого начального распределения рассмотрим ситуацию, когда частицы сосредоточены вблизи одного из электродов с координатой $x = 0$ с начальным распределением концентрации

$$n(x,0) = n_0 \operatorname{ch}^{-2}(k(x - x_0(0))). \qquad (8.143)$$

При рассмотрении таких распределений анализ уравнения для функции $x_0(t)$ становится сложным, поскольку приходится решать уравнение (8.141), вид правой части которого определяется неявно заданной функцией θ. Поэтому рассмотрим эволюцию начального распределения без граничного условия $\phi(d,t) = \phi_1(t)$, получая данные о функции $\phi_1(t)$ непосредственно из решения начальной задачи. Это позволяет полагать $x_0(t) = 0$. В этом случае потенциал $\phi(d,t) = \phi_1(t)$ на втором электроде вычисляется из уравнения (8.141), которое при этом принимает следующий вид:

$$\phi_1(t) = -\frac{m\gamma}{q}[Q(\theta(d,t)) - Q(\theta(0,t)) + t^2\frac{\gamma}{4}(\theta^2(d,t) - \theta^2(0,t))]$$

Для простоты рассмотрим начальное распределение для скорости в том же виде, что и в предыдущей задаче, т.е. $v(x,0) = v_0 = const$, что соответствует $V(\theta) = 0$, и, согласно (8.135):

$$v(x,t) = \gamma t\theta + v_0,$$

В этом случае для функции θ получаем уравнение:

$$\theta = \frac{n_0}{k}\,\mathrm{th}\left(k(x - x_0(t) - \gamma t^2\theta/2)\right).$$

Решение для концентрации частиц в этом случае имеет следующий вид:

$$n(x,t) = \frac{n_0}{\mathrm{ch}^2(k(x - x_0(t) - \gamma t^2\theta/2)) + n_0\gamma t^2/2}.$$

На рис. 8.6 a,b,c приведены графики, описывающие поведение волны зарядовой плотности для начального условия (8.143) для параметров модели $q=-1, n_0=1, k=1, \gamma=1, v_0(0)=0, x_0(t)=0$. Графики концентрации на рис. 8.6 a построены для последовательности моментов времени: кривая 1 - для $t=0$, кривые 2-11 - для t, начиная с $t=1$ через $\Delta t = 0{,}25$, а графики изменения скорости и потенциала (рис. 8.6 b и 8.6 c) - через $\Delta t = 0{,}5$ (кривые с номерами 2-8).

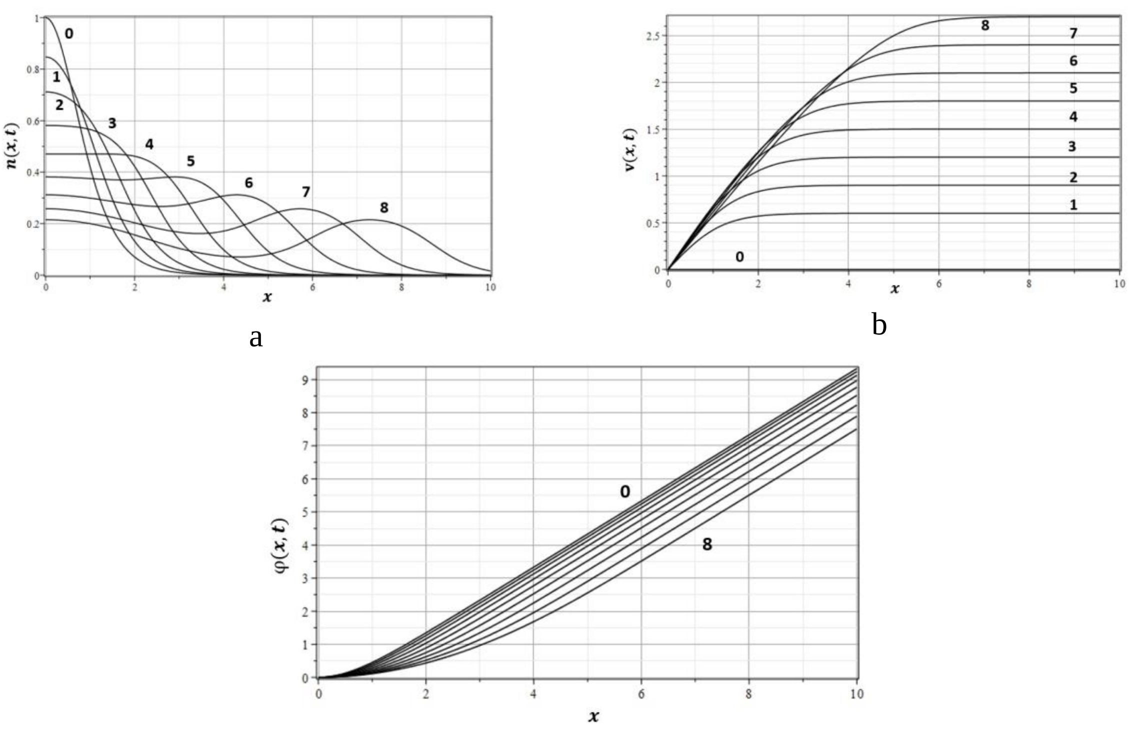


Рис. 8.6. Графики функций $n(x,t)$ *(a),* $v(x,t)$ *(b) и* $\phi(x,t)$ *(c)*

8.13 Самогравитирующая плазма

Другим важным объектом исследования в теории плазмы является пылевая ионно-электронная плазма, встречающаяся предположительно в различных астрофизических объектах, в частности, в межзвездных газопылевых облаках [20]. К таким задачам, в частности, относится задача о динамике плазмы в собственном поле тяготения, которая имеет очень важное значение с точки зрения теории формирования различных астрофизических объектов из рассеянных газопылевых облаков при их частичной или полной ионизации. В заключительном разделе данной главы будет рассмотрена одна из задач такого типа. С помощью метода гидродинамических подстановок построим решение динамики плазмы, расширив построенное в предыдущем разделе решение о динамике облака заряженных частиц в вакууме. В модель включается, кроме гравитационного взаимодействия, и электрическое взаимодействие противоположно заряженных частиц, из которых состоит плазма. Наличие таких частиц моделируется плотностью суммарного электрического заряда в каждом элементе пространства.

8.13.1 Уравнения двухжидкостной плазмы

Рассмотрим одномерную модель плазмы в форме совокупности заряженных частиц двух сортов и нейтральных атомов. Два сорта заряженных частиц представляют собой электроны (с зарядом $-e$) и однозарядные ионы (с зарядом $q=+e$). Течение плазмы будем описывать в рамках гидродинамического приближения. В таком подходе плотность тока j описывается формулой $j=\rho_e v$, где $\rho_e(x,t)$ - плотность заряда, а $v(x,t)$ - скорость элементарного объема плазмы. Обозначим через ρ_m плотность массы, через ϕ и ψ соответственно потенциалы электрического и гравитационного полей.

Для сравнения используемой модели с уже имеющимися введем представление зарядовой и массовой плотностей через концентрации частиц. Обозначим через n^+, n^-, соответственно, концентрации положительно и отрицательно заряженных частиц, а через n_0 - концентрации молекул нейтрального газа. Тогда плотность пространственного заряда можно записать в таком виде:

$$\rho_e = \sum_{a=1} e(n^+ - n^-),$$

а плотность массы в виде

$$\rho_m = m^+ n^+ + m^- n^- + n_0,$$

где m^+, m^-, m_0 - массы соответствующих частиц.

Систему уравнений, описывающую динамику возникающего в плазме течения, можно записать в виде системы из пяти уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_e + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e v) = 0, \tag{8.144}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_m + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_m v) = 0, \tag{8.145}$$

$$v_t + v v_x = -\frac{\rho_e}{\rho_m}\phi_{e,x} - \phi_{m,x}, \tag{8.146}$$

$$\phi_{xx} = -4\pi\rho_e, \;\; \psi_{xx} = 4\pi G\rho_m, \tag{8.147}$$

Первое уравнение представляет собой закон сохранения заряда, второе - закон сохранения массы, третье - уравнение Эйлера течения идеальной плазмы, четвертое и пятое уравнения - это уравнения Пуассона для потенциалов электрического и гравитационного полей. В последнем уравнении G - гравитационная постоянная. В отличие от стандартного подхода к описанию ионно-звуковых волн, в данной системе уравнений движение среды описывается не раздельно для каждого сорта частиц, а движения всей среды как целого. Поэтому такой подход можно рассматривать как некоторый предельный вариант описания взаимодействия частиц в элементарном объеме среды.

Построение решений системы уравнений (8.144) - (8.147) в рамках МГП опирается на уравнение динамики маркера (8.1) и тождества, следующие из него. В частности, воспользуемся тем, что для плотности массы можно использовать соотношение

$$\theta_x = \rho_m. \tag{8.148}$$

В силу очевидного подобия уравнений (8.144) и (8.145) без ограничения общности имеем:

$$\rho_e = \frac{\partial}{\partial x}Q(\theta) = Q'(\theta)\theta_x. \tag{8.149}$$

В этом можно убедиться из тождества, следующего из уравнений (8.144) и (8.145):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_m}{\rho_e}\right) + v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_m}{\rho_e}\right) = 0$$

и еще одного тождества:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(\theta) + v\frac{\partial}{\partial x}Q(\theta) = Q'(\theta)(\theta_t + v\theta_x) = 0.$$

Параметризация плотности массы и заряда с помощью соотношений (8.148) и (8.149) приводит к следующим важным соотношениям:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\theta_x dx = \theta(\infty,t) - \theta(-\infty,t) > 0, \tag{8.150}$$

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{\infty}Q'(\theta)\theta_x dx = Q(\theta(\infty,t)) - Q(\theta(-\infty,t)). \tag{8.151}$$

Здесь $M(t)$ - полная масса в системе в момент времени t, $Q(t)$ - полный заряд в системе, который в предположении электронейтральности системы в целом должен быть равен нулю: $Q(t)=0$. Поскольку исходная система уравнений содержит в себе законы сохранения массы и заряда, то при условии, что нет потока массы и заряда на краях исследуемой области, величины $M(t)$ и $Q(t)$ будут не зависящими от времени величинами, которые задаются начальными распределениями соответствующих плотностей.

8.13.2 Вывод гидродинамической подстановки

Как и в случае зарядовых волн, следующий шаг в построении решения состоит в интегрировании уравнений Пуассона (8.147). Используя подстановки $\rho_m = \theta_x$ и $\rho_e = Q'(\theta)\theta_x$ и интегрируя (8.147), находим:

$$\phi_x = -4\pi Q(\theta) - e(t),\ \psi_x = 4\pi G\theta - g(t), \tag{8.152}$$

где $e(t)$ и $g(t)$ - функции t, связанные с начальными условиями. Используя последние соотношения, уравнение для скорости потока v можно привести к виду:

$$v_t + vv_x = A(\theta) + Q'(\theta)e(t) + g(t), \tag{8.153}$$

где $A(\theta) = 4\pi[Q'(\theta)Q(\theta) - G\theta]$.

Будем искать решение для v в следующем виде:

$$v(x,t) = V(\theta) + tA(\theta) + u_0(t)Q'(\theta) + v_0(t). \tag{8.154}$$

Подставляя это соотношение в левую часть (8.153) и учитывая то, что функция θ связана по определению с v соотношением (8.1), получаем:

$$\begin{aligned} v_t + vv_x &= [V'(\theta) + tA'(\theta) + u_0 Q''(\theta)](\theta_t + v\theta_x) + \\ &+ A(\theta) + \dot{u}_0 Q'(\theta) + \dot{v}_0 = 4\pi Q'(\theta)\theta + \dot{u}_0 Q'(\theta) + \dot{v}_0. \end{aligned}$$

В результате уравнение (8.153) обращается в тождество при условии $e(t) = \dot{u}_0$ и $\dot{v}_0 = g(t)$. Используя теперь связь (8.1) , приходим к уравнению Хопфа для функции θ:

$$\theta_t + (V(\theta) + tA(\theta) + u_0(t)Q'(\theta) + v_0)\theta_x = 0. \tag{8.155}$$

Таким образом, решения системы уравнений (8.144)-(8.147) можно получить исходя из решений одного уравнения (8.155).

Уравнение (8.155) представляет собой вариант гиперболического уравнения Хопфа, общий интеграл которого задается с помощью следующего алгебраического уравнения:

$$h(\theta, x - V(\theta)t - \frac{t^2}{2}A(\theta) - r(t)Q'(\theta) - s(t)) = 0, \tag{8.156}$$

где $\dot{s}(t) = v_0(t)$, $\dot{r}(t) = u_0(t)$ и $h(\xi,\eta)$ - произвольная дифференцируемая функция двух аргументов: $\xi = \theta(x,t)$ и $\eta = x - V(\theta)t - t^2 A(\theta)/2 - r(t)Q'(\theta) - s(t)$. Доказательство этого факта строится стандартным методом. Дифференцируя

(8.137) по x и t, приходим к двум уравнениям:

$$h_\xi \theta_x + h_\eta (1-\theta_x [V'(\theta)t + t^2 A'(\theta)/2 + r(t)Q''(\theta)]) = 0,$$

$$h_\xi \theta_t - h_\eta (\theta_t [V'(\theta)t + t^2 A'(\theta)/2 + r(t)Q''(\theta)] + V(\theta) + tA(\theta) + \dot{r}_0 Q'(\theta) + \dot{s}(t)) = 0.$$

Исключая из этих уравнений производные h_ξ и h_η, приходим к уравнению (8.155).

8.13.3 Построение решений

Уравнение (8.156) без ограничения общности удобно представить в следующем виде:

$$\theta = H(x - V(\theta)t - \frac{t^2}{2}A(\theta) - r(t)Q'(\theta) - s(t)). \tag{8.157}$$

В такой форме вид функции $H(\eta)$ задается начальным распределением функции θ:

$$\theta(x,0) = H(x - x_0(0)),$$

которая, в свою очередь, определяется начальным распределением плотности масс $\rho_m(x,0)$:

$$\rho_m(x,0) = \theta_x\big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x}H(x - s(0)).$$

При этом начальное распределение плотности заряда определяет вид функции $Q(\theta)$ и, следовательно, $A(\theta)$, а начальное распределение скорости определяет вид функции $V(\theta)$ исходя из соотношения

$$\rho_e(x,0) = Q'(\theta(x,0))\frac{\partial}{\partial x}H(x - s(0)) \qquad v(x,0) = V(\theta(x,0)) + u_0(0)Q'(\theta(x,0)) + v_0(0).$$

Распределение потенциалов в начальный момент времени определяется распределением плотности заряда и массы:

$$\psi(x,0) = 4\pi G\int_0^x \theta(x,0)dx + \ddot{s}(0)x + \Psi(0), \tag{8.158}$$

$$\phi(x,0) = -4\pi\int_0^x Q(\theta(x,0))dx + \ddot{r}(0)x + \Phi(0), \tag{8.159}$$

Таким образом, получаем полное решение задачи с начальными условиями на всей оси (задача Коши).

Построенные решения задачи о динамике двухжидкостной плазмы в собственном поле тяготения дают общее представление о характере процессов, происходящих в бездисперсионном пределе вблизи астрофизических объектов. Поскольку рассматриваемая задача является одномерной, то полученные решения могут быть использованы в задаче о распространении плоских ударных волн в ионизированной плазме.

Заключение

Как указано во Введении, основная цель данной работы - систематическое изложение метода функциональных подстановок в различных его вариантах, который развивался с самого начала как некоторая альтернатива методу обратной задачи. В свою очередь, МОЗ является на сегодняшний день одним из основных подходов к анализу нелинейных физических процессов в распределенных недиссипативных системах.

В монографии показано, что МФП может применяться ко всем системам и процессам в них, которые являются типичными для использования МОЗ. Это относится к задачам гидродинамики, нелинейной оптики и квантовой теории.

Наиболее важным преимуществом МФП является то, что он может применяться даже в тех ситуациях, когда МОЗ не применим. Это, в частности, относится к диффузионным и гидродинамическим процессам, динамика которых описывается квазилинейными уравнениями первого порядка. Примером могут служить результаты, относящиеся к гидродинамическим подстановкам. Еще более важным результатом данной работы является то, что МФП включает в себя и МОЗ. Хотя в представленной работе было приведено всего несколько примеров, демонстрирующих новый вариант МФП – метод многофункциональных подстановок, тем не менее заложенные в нем основы нового подхода доказывают универсальность самого МФП.

Можно надеяться, что дальнейшее развитие этого подхода к построению интегрируемых моделей теоретической физики и их точных решений позволит получить новые результаты, полезные для прикладных задач.

Литература

[1] Адлер В. Э., Шабат А. Б. // ТМФ, **111**, N 3, с. 323 (1997).

[2] Адлер В. Э., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметрийный подход к проблеме интегрируемости, ТМФ, 2000, 125:3, 355-424.

[3] Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов.* М.: Наука, (1988), 310 с.

[4] Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[5] Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Мир, 1969. 367 с.

[6] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Гамильтоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.* Изд. дом "Удмуртский университет", 1999.

[7] Бронников К. А., Рубин С. Г. Лекции по гравитации и космологии. М.: Изд-во МИФИ, 2008.

[8] Бурсиан В., Павлов В. // Журнал Русского физ. общества, **55**, N 1-3, 71 (1923).

[9] Бурцев С. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В. // ТМФ, **70**, N 3, 323 (1987).

[10] Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. М.: Мир, 1983. 135 с.

[11] Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.

[12] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

[13] Выслоух В. А., Чередник И. В. // ТМФ, **77**, 32 (1988).

[14] Гуревич А. В., Зыбин. К. П. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория // УФН, **165**, 723-758 (1995).

[15] Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973. 592 с.

[16] Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1984. 464 с.

[17] Давыдов В. А., Зыков В. С., Михайлов А. С. // УФН, **161**, 45 (1991).

[18] Давыдов В. А., Морозов В. Г. // УФН, **166**, N 3, 327 (1996).

[19] Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррио Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* М.: Мир, 1988. С. 694.

[20] Дубинов А. Е., Ефимова И. А., Корнилова И. Ю., Сайков С. К., Селемир В. Д. // ФЭЧАЯ, 35, N 2, 462 (2004).

[21] Дубинов А. Е. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теор. и прикл. физ. **2**, N 3, (2001).

[22] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., Чугайнова А. П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М.: МИАН, 2011.

[23] Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В. Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983. 150 с.

[24] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1990. 432 с.

[25] Журавлев В. М. // ПММ, **58**, N 6, 61 (1994).

[26] Журавлев В. М. // Письма в ЖЭТФ. **61**, вып. 4, 254 (1995).

[27] Журавлев В. М. // ЖЭТФ, т. 110, N 6, с. 910-929 (1996).

[28] Журавлев В. М. // Ученые записки УлГУ, сер. физическая, N 2(9), с. 3-11 (2000).

[29] Журавлев В. М. // ТМФ, т. 124, N 2, с. 265-278 (2000).

[30] Журавлев В. М. Модели автоволновых процессов в средах с диффузией и уравнения типа Лиувилля // Известия вузов, сер. Прикладная нелинейная динамика, **9**, N 6, с. 115-128 (2001).

[31] Журавлев В. М. Точные решения уравнений Лиувилля в многомерных пространствах // ТМФ. 1999. Т. 120, N 1. С. 3-19.

[32] Журавлев В. М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Ульяновск: УлГУ, 2001. 252 с.

[33] Журавлев В. М., Корнилов Д. А. // Математические методы теоретической физики. Ульяновск: УлГУ, 2007. С. 129-147.

[34] Журавлев В. М., Никитин А. В. // Нелинейный мир. 2007. Т. 5, N 9. С. 603-611.

[35] Журавлев В. М., Зиновьев Д. А. // Письма ЖЭТФ, 2008, Т. 87, N 5.

[36] Журавлев В. М., Зиновьев Д. А. // Письма ЖЭТФ, 2008, Т. 88, N 3.

[37] Журавлев В. М., Журавлев А. В. // Нелинейный мир, 2009, N 10. С.763-771

[38] Журавлев В. М., Журавлев А. В., Корнилов Д. А., Никитин А. В., Самойлов В. В. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории нелинейных дискретных систем // Прикладная математика и механика. Ульяновск: УлГТУ, 2009. С. 89-103.

[39] Журавлев В. М. // ТМФ. **158**, N 1, 58 (2009).

[40] Журавлев В. М. // Инновационные технологии / под ред. проф. С. В. Булярского. Ульяновск: УлГУ, 77 (2010).

[41] Журавлев В. М. Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау-Лифшица // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, N 1. С. 35-48.

[42] Zhuravlev V. M., Zinov’ev D. A. Nonlinear Waves in Self-Gravitating Compressible Fluid and Generalized Cole-Hopf Substitutions. Physics of Wave Phenomena, **19**, No. 4, 313-317 (2011).

[43] Журавлев В. М., Обрубов К. С. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории конечномерных нелинейных динамических систем // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. N 1. С. 83-89.

[44] Журавлев В. М., Зиновьев Д. А. Интегрируемые модели динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Метод подстановок Коула-Хопфа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки, N 4, с. 174-190, 2012.

[45] Бызыкчи А. Н., Журавлев В. М. Солитоны и метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа // Вестн. Сам. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2013, N 2 (31). С. 193-199.

[46] Журавлев В. М. Принцип суперпозиции и точные решения уравнения нелинейной диффузии // ТМФ, 2015. Т. 183, N 1. С. 36-50.

[47] Журавлев В. М. О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками // Известия вузов. Поволжский регион. Серия физико-математическая. 2016. N 4. С. 84-101.

[48] Журавлев В. М. Модели динамики пылевидной материи в собственном поле

тяготения // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. Казань: КГУ, 2017. N 1. С. 5-19.

[49] Журавлев В. М. Модели динамики пылевидной материи в собственном гравитационном поле. Метод гидродинамических подстановок // ЖЭТФ, 2017, т. 152, вып. 3(9), с. 495-510.

[50] Журавлев В. М. Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и функциональные подстановки // Известия вузов. Поволжский регион. Сер. физико-математическая. 2018. N 1. С. 147-163.

[51] Журавлев В. М., Морозов В.М. Интегрируемые динамические цепочки и метод функциональных подстановок // Известия вузов. Поволжский регион. Сер. физико-математическая. 2019. N 1.

[52] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М.: Наука, (1980). 319 с.

[53] Захаров В. Е., Шабат А. Б. // ЖЭТФ, **61**, 119 (1971).

[54] Захаров В. Е. *Солитоны* / под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. М.: Мир, 270 (1983).

[55] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1984. 280 с.

[56] Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.: Наука, (1963).

[57] Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей популяций // Проблемы кибернетики, вып. 25. М.: Наука, 1972, с. 101-106.

[58] Кузнецов В. И., Эндер А. Я. Физика плазмы, **36**, N 3, 248-272 (2010.

[59] Кузнецов В. И., Соловьев А. В., Эндер А. Я., ЖТФ, **64**. Вып. 12, 9 (1994).

[60] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теория поля.* М.: Наука, (1988).

[61] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, (1950).

[62] Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

[63] Matveev V. B. Lett. Math. Phys., 3 (1979), 216; 222; 425; 503.

[64] Matveev V. B., Salle M. A., Darboux Transformations and Solitons, Springer, Berlin – Heidelberg, 1991.

[65] Физика на пороге новых открытий / под. ред. Л. Н. Лабзовского. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. С. 246-278.

[66] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // УМН, 1987, 42:4 (256), 3-53.

[67] Озерной Л. М., Прилуцкий О. Ф., Розенталь И. Л. Астрофизика высоких энергий. М.: Атомиздат, 1973.

[68] Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа-Ампера. М.: Наука, 1988.

[69] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

[70] Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И., Казенин Д. А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса.* М.: Факториал, (1998), 367 с.

[71] Раджараман Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.

[72] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их

приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
[73] Рыбников А. К. Отображения Бэклунда и преобразования Ли-Бэклунда как дифференциально-геометрические структуры // Фундаментальная и прикладная математика, 2010, т. 16, N 1, с. 135-150.
[74] Рыбников А. К. Об аффинной интерпретации преобразований Бэклунда // Известия вузов. Математика, 2013, N 7, с. 31-44.
[75] Рыбаков Ю. П., Санюк В. И. Многомерные солитоны. М.: Изд-во РУДН, 2001.
[76] Свинолупов С. И., Соколов В. В. Факторизация эволюционных уравнений // УМН, 1992, 47:3 (285), 115-146.
[77] Свинолупов С. И., Соколов В. В. Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений // ТМФ, 1994, 100:2, 214-218.
[78] Свинолупов С. И., Ямилов Р. И. Явные автопреобразования для многополевых уравнений Шредингера и Йордоновы обобщения цепочки Тоды // ТМФ, **98**, N 2, 207 (1994).
[79] Семенов Э. И. О новых точных решениях неавтономного уравнения Лиувилля // Сибирский математический журнал, **48**, N 1, 207-217, (2008).
[80] Семенов Э. И. Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения // Сибирский математический журнал, **44**, N 4, 863-869, (2003).
[81] Семенцов Д. И., Шутый А. М. Нелинейная регулярная динамика и стохастическая динамика в тонкопленочных структурах // УФН, 2007, т. 177, N 8, с. 831-857.
[82] Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио, 1977.
[83] Соколов В. В. О симметриях эволюционных уравнений // УМН, 1988, 43:5 (263), 133-163.
[84] *Солитоны* : сб. / под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. М.: Мир, (1983).
[85] Сохоцкий Г. В. Еще раз об уравнении Ландау-Лифшица // УФН, 1984, т. 144, N 4, с. 681-686.
[86] Старцев С. Я. О дифференциальных подстановках типа преобразований Миуры // ТМФ, 1999, 116:3, 336-348.
[87] Старцев С. Я. О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки // ТМФ, 2001, 127:1, 63-74.
[88] Сухоруков А. П. *Нелинейные волновые процессы взаимодействия в оптике и радиофизике.* М.: Наука, (1988).
[89] Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, (1974).
[90] Тода М. *Теория нелинейных решеток.* М.: Мир, 1984.
[91] *Физика на пороге новых открытий* / под ред. Л. Н. Лабзовского. Л.: Изд-во ЛГУ, (1990), с. 246-278.
[92] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1974.
[93] Урюков Б. А. // Теплофизика и аэромеханика, 1999, Т. 6, N 3, С. 421-424.
[94] Шамсутдинов М. А., Калякин Л. А., Харисов А. Т. Авторезонанс в ферромагнитной пленке // ЖТФ, 2010, т. 80, N 6, с. 106-111.
[95] Эйген М., Шустер П. Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. М.: Мир, 1982, 270 с.

[96] Backlund A. V. Zur Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung, Clebsch Ann. 17, 285-328 (1880).

[97] Bianchi L. Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 2, 285-341 (1879).

[98] Burgers J. M. The nonlinear diffusion equation. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974.

[99] Caflisch1 R. E. and Rosin M. S. arXiv:1110.2840v1 (2011).

[100] Child C. Discharge from hot cao, Physical Review (Series I), **32**, no. 5, 492 (1911).

[101] Cole J. D. On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, Quart. Appl. Math. **9**, No. 3, 225236 (1951).

[102] F. Calogero, "Why are certain nonlinear PDEs both widely applicable and integrable?",What is Integrability?, Springer Ser. Nonlinear Dynam., ed. V. E. Zhakharov, Springer,Berlin, 1991, 1–62

[103] Darboux G. Sur la representations spherique des surfaces // Compt. Rend. **94**, 1343-1345 (1882).

[104] Hirota R. // J. Math. Phys., **14**, 805 (1973).

[105] Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Phys. Rev. Lett, 1967, T. 19, 1095.

[106] Hopf E. The partial differential equation ut + uux = мuxx, Comm. Pure and Appl. Math. **3**, 201230 (1950).

[107] Field R. J., Noyes R. M. Oscillations in chemical systems. IV. Limit cicle behavior in a model of real chemical reaction // J. Chem. Phys., **60**, N 5, 1877-1884 (1974).

[108] Gurevich A. V., Zybin K. P., Medvedev Yu. V. Nonlinear theory of the Jeans instability in a cold nondissipative medium // JETP, Vol. 77, No. 4, 1993. P. 593-801.

[109] E. D' Hoker, J. Estes, M. Gutperle, D. Krym. Exact Half-BPS Flux Solutions in M-theory. I Local Solutions. arXiv:0806.0605v3 [hep-th].

[110] E. D' Hoker, J. Estes. Integrable systems from supergravity BPS equations. arXiv:0807.3728v1 [hep-th].

[111] Lie S. Zur Theorie der Flachen konstanter Krummung, III, IV, Arch. Math. Naturvidensk. 5 (3), 282-306, 328-358 (1880).

[112] Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. // Comm. Pure and Appl. Math. bf 21, N 5, 467-490 (1968).

[113] Langmuir I. The eject of space charge and residual gases on thermionic currents in high vacuum, Physical Review, **2**, no. 6, 450 (1913).

[114] Liouville J. Sur l' equation aux differences partielles: $\partial^2 \log uv \pm /2a^2 = 0$. // J. Math., Vol. 18, pp. 71-72, 1853.

[115] McCrea W., Milne E. // Quart. J. Math., 1934. N. 5. p. 73.

[116] Matveev V. B. Darboux transformation and the explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation depending on functional parameters // Lett. in Math. Phys., **3**, (1979).

[117] Mi G. // Ann. der Physik., **37**, 511 (1912); **39**, 1 (1912); **40**, 1 (1912).

[118] Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. // J. Math. Phys, **9**, 1204 (1968).

[119] Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

[120] Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential

Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011.

[121] Polyanin A. D. and Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

[122] Rosin M. S., Sun H. arXiv:1211.6794v1 (2012).

[123] Santini P. M. Inverse Problem, 1992, **8**, 285-301.

[124] Zakharov V. E. In: Procceedings of Int. Congress on Mathematical Physics. Berlin: Springer-Verlag, (1982).

[125] Zenchuk A. I., Santini P. M. On the remarkabel relations among PDEs integrable by the inverse spectral transformation method, by the method of charac teristics and by the Hopf-Cole transformation. arXiv:0801.3945v1[nlin.SI] pp. 1-36.

[126] Учайкин В. В. Механика. Основы механики сплошных сред. СПб.: Изд-во "Лань"; М.; Краснодар, 2016. 857 с.

Содержание

Научное издание

Журавлев Виктор Михайлович

Нелинейные интегрируемые модели физических процессов

Метод функциональных подстановок

Директор Издательского центра *Т. В. Максимова*
Редактирование и подготовка оригинал-макета *Г. И. Петровой*
Оформление обложки *Н. В. Пеньковой*

Подписано в печать 2019.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. ,. Тираж 500 экз. Заказ № /

Оригинал-макет подготовлен в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

Отпечатано с оригинал-макета в Издательском центре
Ульяновского государственного университета
432017, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42