

УДК 517, 538.913, 51-76
DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-8

В. М. Журавлев, В. М. Морозов

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЦЕПОЧКИ И МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДСТАНОВОК¹

Аннотация.

Актуальность и цели. В работе излагаются основные элементы теории функциональных подстановок для построения интегрируемых динамических систем в форме бесконечных и конечных дискретных цепочек уравнений, подобных цепочкам Тоды. Целью работы является построение общей схемы вывода самих интегрируемых уравнений, их решений и интегралов движения.

Материалы и методы. Методом исследования является развитый ранее в работах авторов метод функциональных подстановок, применимый к дискретным динамическим системам бесконечных и конечных цепочек уравнений, которые используются в физической и биологической кинетике.

Результаты. Разработана схема применения метода функциональных подстановок к построению и интегрированию уравнений динамики бесконечных и конечных цепочек уравнений. Рассмотрен ряд конкретных моделей и их общих решений. Важным результатом работы является построение общей схемы вычисления точных решений некоторых конечных динамических систем и их интегралов движения, играющих важную роль в физической и биологической кинетике.

Выводы. Показано, что кроме известных типов дискретных цепочек типа Тоды, интегрируемых с помощью метода обратной задачи, существует множество цепочек, интегрируемых с помощью метода функциональных подстановок. Эти дискретные цепочки также могут рассматриваться в качестве полезных моделей в различных прикладных задачах. Важным выводом является то, что метод функциональных подстановок позволяет получить решения множества моделей, интегрируемость которых ранее была неизвестна.

Ключевые слова: интегрируемые динамические системы, метод функциональных подстановок, дискретные цепочки, кинетические модели.

V. M. Zhuravlev, V. M. Morozov

INTEGRABLE DYNAMIC CHAINS AND METHOD OF FUNCTIONAL SUBSTITUTIONS

¹ Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (в рамках Государственного задания и проекта № 3.2111.2017/4.6), средств проектов РФФИ 16-42-732119 р_офи_м и 16-42-732113 р_офи_м, и за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

© Журавлев В. М., Морозов В. М., 2019. Данная статья доступна по условиям всемирной лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), которая дает разрешение на неограниченное использование, копирование на любые носители при условии указания авторства, источника и ссылки на лицензию Creative Commons, а также изменений, если таковые имеют место.

Abstract.

Background. The paper outlines the main elements of the theory of functional substitutions for constructing integrable dynamical systems in the form of infinite and finite discrete chains of elements, similar to Toda chains, but not in the general case Hamiltonian. The aim of the work is to construct a general scheme for constructing the integrable equations themselves, their solutions, and integrals of motion.

Method. The method of research is the method of functional substitutions developed earlier in the works of the authors in the form applicable to discrete dynamic systems in the form of infinite and finite chains of equations that are models of many models in physical and biological kinetics.

Results. The paper developed a general scheme for applying the method of functional substitutions to the construction and integration of the equations of dynamics of infinite and finite chains of equations. A number of specific models and their common solutions are considered. An important result of the work is the construction of exact solutions of finite dynamical systems and their integrals of motion, which play an important role in physical and biological kinetics.

Conclusions. It was shown that in addition to the known types of discrete chains of the type of Toda chains that are integrable using the method of the inverse problem, there are many chains that are integrable using the method of functional substitutions. These discrete chains can also be considered as useful models in various applications. An important conclusion is that the method of functional substitutions allows to obtain solutions of a set of models, the integrability of which was not previously known.

Keywords: integrable dynamical systems, functional substitution method, discrete chains, kinetic models.

Введение

В работе [1] было развито расширение метода функциональных подстановок (МФП) на случай уравнений с обобщенными производными, в том числе с производными, определенными на дискретных сетках, например разностных производных. Такой подход позволяет перенести ряд результатов, имеющих место для уравнений в частных производных [2], на случай дискретных динамических систем. Дискретные динамические системы играют важную роль в различных разделах механики, теории концентрационных колебаний [3] и, вообще, в физической и биологической кинетике [4, 5].

Одним из типичных примеров использования таких моделей являются хорошо известные интегрируемые с помощью метода обратной задачи (МОЗ) системы типа цепочек Тоды, Ленгмюра и т.д. [4, 6, 7]. Другой областью, где дискретные цепочки играют важную роль, являются кинетические модели формирования кластеров дефектов в кристаллических решетках [8, 9], а также модели динамики концентраций макромолекул [3, 10] и популяций в биологии [5, 11]. Однако в этой области системы уравнений отличаются от моделей колебаний молекулярных решеток в первую очередь тем, что они не обязательно являются гамильтоновскими, и поэтому процедуры интегрирования, основанные на МОЗ, к построению их решений неприменимы.

Построение интегрируемых моделей типа дискретных цепочек с помощью МФП является альтернативой МОЗ, расширяющей число примеров интегрируемых моделей такого рода. Такие модели обладают более широким набором свойств. В данной работе излагаются результаты применения МФП

к задачам построения и интегрирования уравнений типа дискретных цепочек. Общая идеология предлагаемого подхода опирается на работы [1, 2], но реализуется на более простой схеме базовых соотношений.

1. Базовые соотношения для сеточных производных

Метод функциональных подстановок опирается на систему базовых соотношений, которые в наиболее простом виде таковы:

$$\hat{D}_x \Phi = A\Phi, \quad \hat{D}_t \Phi = B\Phi, \quad (1)$$

где Φ – функция, заданная на двумерном пространстве $R^2 = X \times T$ с координатами x и t . В данной работе будем полагать, что время t является непрерывным, а координата x – дискретной. Последнее означает, что значения функции $\Phi(x, t)$ представлены значениями $\Phi_i(t)$, $i \in (-\infty, \infty)$, в узлах сетки x_i , $i \in (-\infty, \infty)$, вдоль координаты x с равноотстоящими узлами с шагом h_x . Оператор D_t в данной работе будет представлять собой обыкновенную производную по t :

$$\hat{D}_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}.$$

Оператор $\hat{D}_x$ будет представлять собой некоторую сеточную производную, определенную на сетке x_i . Рассмотрим следующие типы производных. Это сдвиговые производные (s -производные) вперед и назад:

$$\hat{D}_+ \Phi_i(t) = \Phi_{i+1}(t), \quad \hat{D}_- \Phi_i(t) = \Phi_{i-1}(t).$$

Сеточные производные в форме левой D_L и правой D_R конечных разностей (далее h -производные) выражаются через операторы сдвига с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \hat{D}_L \Phi_i(t) &= \frac{1}{h_x} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) = \frac{1}{h_x} (\hat{D}_+ - 1) \Phi_i, \\ \hat{D}_R \Phi_i(t) &= \frac{1}{h_x} (\Phi_i - \Phi_{i-1}) = -\frac{1}{h_x} (\hat{D}_- - 1) \Phi_i. \end{aligned}$$

Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением только сдвиговых производных. Для h -производных будем давать некоторые комментарии. Заметим, что центральные разности не будут рассматриваться как отдельный тип производных. Причина этого состоит в том, что для центральной разности не выполняется правило Лейбница в подходящей для дальнейших построений форме. Но центральную разность можно представить как сумму левой и правой разности или разность левой и правой s -производных:

$$\hat{D}_C \Phi_i = \frac{1}{2} (\hat{D}_L + \hat{D}_R) \Phi_i = \frac{1}{2h_x} (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) = \frac{1}{2h_x} (\hat{D}_+ \Phi_i - \hat{D}_- \Phi_i),$$

Для h - и s -производных по отдельности правила Лейбница выполняются в необходимой форме:

$$\begin{aligned}\hat{D}_+(A_i\Phi_i) &= A_{i+1}\Phi_{i+1} = A_{i+1}\hat{D}_+\Phi_i, \\ \hat{D}_-(A_i\Phi_i) &= A_{i-1}\Phi_{i-1} = A_{i-1}\hat{D}_-\Phi_i, \\ \hat{D}_L(A_i\Phi_i) &= \frac{1}{h_x}(A_{i+1}\Phi_{i+1} - A_i\Phi_i) = A_{i+1}\hat{D}_L\Phi_i + \Phi_i\hat{D}_LA_i, \\ \hat{D}_R(A_i\Phi_i) &= \frac{1}{h_x}(A_i\Phi_i - A_{i-1}\Phi_{i-1}) = A_{i-1}\hat{D}_R\Phi_i + \Phi_i\hat{D}_RA_i.\end{aligned}$$

Из этого можно сделать вывод, что левая и правая h -производные и s -производные являются независимыми сеточными производными, коммутирующими между собой.

Рассматриваемые в данной работе базовые соотношения могут быть записаны в такой форме:

$$\hat{D}_+\Phi_i = A_i(t)\Phi_i, \quad \hat{D}_-\Phi_i = B_i(t)\Phi_i, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi_i = C_i(t)\Phi_i \quad (2)$$

для значений Φ_i в поле вещественных чисел.

Далее функцию $\Phi_i(t)$ будем называть основной, а функции $A_i(t)$ и $B_i(t)$ – базовыми. При заданной функции $\Phi_i(t)$ базовые функции $A_i(t)$ и $B_i(t)$ вычисляются из базовых соотношений. При этом базовые функции оказываются связанными соотношением, которое не зависит от вида основной функции $\Phi_i(t)$. Действительно, можно проверить, что все введенные операторы сеточных производных $\hat{D}_x$ и непрерывная производная по t $\hat{D}_t$ коммутируют между собой. Например, для сдвиговой левой производной имеем

$$(\hat{D}_+\hat{D}_t - \hat{D}_t\hat{D}_+)\Phi_i = \frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial t} \equiv 0,$$

аналогично и для остальных типов производных. Исходя из этого, находим условия связи между базовыми функциями A_i и B_i для s -производных:

$$\begin{aligned}(\hat{D}_+\hat{D}_t - \hat{D}_t\hat{D}_+)\Phi_i &= \hat{D}_+(B_i\Phi_i) - \hat{D}_t(A_i\Phi_i) = \\ &= B_{i+1}\Phi_{i+1} - \frac{\partial A_i}{\partial t}\Phi_i - A_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} = \left((C_{i+1} - C_i)A_i - \frac{\partial A_i}{\partial t}\right)\Phi_i = 0.\end{aligned}$$

По аналогии отсюда находим:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = (C_{i+1} - C_i)A_i, \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} = (C_{i-1} - C_i)B_i. \quad (3)$$

Для h -производных имеем соотношения следующего вида:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = \frac{1}{h_x} (C_{i+1} - C_i)(h_x A_i + 1), \quad \frac{\partial B_i}{\partial t} = -\frac{1}{h_x} (C_i - C_{i-1})(h_x B_i - 1). \quad (4)$$

2. Рекуррентные соотношения для старших производных

Поскольку базовые соотношения и соотношения связи между функциями A_i и B_i выполняются для любой функции Φ_i , то имеется возможность установить вид ограничений, которые возникают, когда функции $\Phi_i(t)$ выбираются из множества решений некоторого конкретного интегрируемого уравнения не обязательно линейного. Такое уравнение в дальнейшем будем именовать вспомогательным. В случае, если вспомогательное уравнение после подстановки в него базовых соотношений допускает исключение из него основной функции Φ_i , полученное уравнение дает еще одну дополнительную связь между функциями A_i и B_i . Для вычисления высших производных, которые могут содержать вспомогательные уравнения по обоим переменным, полезно воспользоваться рекуррентными соотношениями, вытекающими непосредственно из базовых соотношений. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \hat{D}_x^k \Phi_i = A_i^{[k,m]}(t) \Phi_i. \quad (5)$$

Здесь $A_i^{[k,m]}(t)$ вычисляются с помощью рекуррентных соотношений:

$$A_i^{[k+1,m]} = A_{i+1}^{[k,m]} A_i, \quad A_i^{[k,m+1]} = \frac{\partial}{\partial t} A_i^{[k,m]} + A_i^{[k,m]} B_i, \quad (6)$$

$$A_i^{[1,0]} = A_i, \quad A_i^{[0,1]} = B_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$$

Аналогичные соотношения имеют место для s -производных и в матричном случае. Заметим, что и в скалярном, и в матричном случаях первое рекуррентное соотношение приводит к следующему представлению для $\hat{A}_i^{[k+1,0]}$:

$$\hat{A}_i^{[k+1,0]} = \prod_{j=0}^k \hat{A}_{i+j} = \hat{A}_{i+k} \hat{A}_{i+k-1} \cdots \hat{A}_i. \quad (7)$$

Для случая h -производных аналогичные (6) рекуррентные соотношения имеют такой вид:

$$A_i^{[k+1,m]} = A_{i+1}^{[k,m]} A_i + \frac{1}{h_x} (A_{i+1}^{[k,m]} - A_i^{[k,m]}),$$

$$A_i^{[k,m+1]} = \frac{\partial}{\partial t} A_i^{[k,m]} + A_i^{[k,m]} B_i, \quad (8)$$

$$A_i^{[1,0]} = A_i, \quad A_i^{[0,1]} = B_i, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$$

3. Вычисление уравнений нелинейных цепочек

В качестве вспомогательного уравнения для основной функции Φ_i рассмотрим линейное уравнение следующего общего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i = \sum_{k=0}^n M_k D_x^k \Phi_i, \quad (9)$$

где n – натуральное число, $M_k(t)$ – в общем случае функции времени, а под D_x понимается производная одного типа – либо левая, либо правая. Введем бесконечный вектор: $U = \{\dots, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots\}$ и бесконечную матрицу M со строками, содержащими одинаковые элементы $M_i, i = 0, \dots, n$, но сдвинутыми на 1 вправо. В результате (9) можно записать в общем виде так:

$$\frac{d}{dt} U = MU. \quad (10)$$

Используя базовые соотношения (2) и (7) для левой и правой s -производных, уравнение (9) приводится к вспомогательным уравнениям связи:

$$\begin{aligned} (D_+): \quad C_i &= M_0 + \sum_{k=1}^n M_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p}, \\ (D_-): \quad C_i &= M_0 + \sum_{k=1}^n M_k \prod_{p=0}^{k-1} B_{i-p}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя C_i из этого соотношения в уравнение связи (3), приходим к уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln A_i = \sum_{k=1}^n M_k (A_{i+k} - A_i) \prod_{p=1}^{k-1} A_{i+p} \quad (12)$$

В частности, для $n = 1, 2, 3$ имеем такое уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln A_i = M_1 (A_{i+1} - A_i) + M_2 (A_{i+2} - A_i) A_{i+1} + M_3 (A_{i+3} - A_i) A_{i+2} A_{i+1}. \quad (13)$$

В случае левой $\hbar$ -производной аналогом уравнения (11) является следующее соотношение:

$$C_i = M_0 + \sum_{k=1}^n M_k A_i^{[k,0]}. \quad (14)$$

Эти соотношения необходимо теперь подставить в (4), в результате чего получаем общее соотношение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i = (h_x A_i + 1) \sum_{k=1}^n M_k \left(A_{i+1}^{[k,0]} - A_i^{[k,0]} \right). \quad (15)$$

Ограничимся тем, что приведем явные выражения уравнения (15) для случая $n = 2$:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i = (h_x A_i + 1) (K_1 (A_{i+1} - A_i) + K_2 (A_{i+2} - A_i) (h_x A_{i+1} + 1)), \quad (16)$$

где $K_1 = M_1 - 2M_2 / h_x$ и $K_2 = M_2 / h_x$. При $n > 2$ форма уравнения вычисляется без труда с помощью рекуррентных соотношений (8), однако результат имеет громоздкую форму. Аналогичные уравнения имеют место и для правой h -производной. Как видно, уравнения для h -производных можно без труда привести к такому же виду, что и для s -производных.

Структура уравнений (12) и (15) подсказывает, что эти уравнения можно привести к форме, подобной цепочкам Тоды, с помощью экспоненциальных подстановок $A_i = e^{\Phi_i}$ для D_+ и $A_i = (e^{\Phi_i} - 1) / h_x$. В этом случае уравнения (12) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i = \sum_{k=1}^n M_k (e^{\Phi_{i+k}} - e^{\Phi_i}) \exp \left\{ \sum_{p=1}^{k-1} \Phi_{i+p} \right\} = R_{i+1} e^{\Phi_{i+1}} - R_i e^{\Phi_i}, \quad (17)$$

где

$$R_i = M_1 + \sum_{k=2}^n M_k \exp \left\{ \sum_{p=1}^{k-1} \Phi_{i+p} \right\}.$$

В частном случае (13) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i = M_1 (e^{\Phi_{i+1}} - e^{\Phi_i}) + M_2 (e^{\Phi_{i+2}} - e^{\Phi_i}) e^{\Phi_{i+1}} + M_3 (e^{\Phi_{i+3}} - e^{\Phi_i}) e^{\Phi_{i+2} + \Phi_{i+1}}. \quad (18)$$

Аналогичные уравнения возникают и в случае использования D_L . В отличие от цепочек Тоды, данные уравнения имеют первый порядок по времени и требуют отдельной интерпретации.

Отметим также одно важное обстоятельство, полезное для возможности строить решения неоднородных уравнений. Такие уравнения можно получить, если во вспомогательные уравнения включить слагаемые вида $L_i(t) \Phi_i$, где $L_i(t)$ – некоторые заданные функции. В качестве примера рассмотрим вспомогательные уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_i = \sum_{k=1}^n M_k D_x^k \Phi_i + L_i \Phi_i, \quad (19)$$

где сохранены старые обозначения. Используя базовые соотношения для случая левой производной, получаем уравнения

$$C_i = M_0 + \sum_{k=1}^n M_k \prod_{p=0}^{k-1} A_{i+p} + L_i. \quad (20)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения связи, приходим к следующей цепочке уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = R_{i+1} e^{\varphi_{i+1}} - R_i e^{\varphi_i} + I_i, \quad (21)$$

где $I_i = L_{i+1} - L_i$. Возможность строить решения уравнений такого типа связана с возможностью точно решать вспомогательные уравнения (19). Описание процедуры построения вспомогательных уравнений будет приведено далее в этой статье.

4. Уравнения с правой и левой производными первого порядка

Рассмотрим особый случай вспомогательных уравнений, содержащих левую и правую s -производные. Полная система уравнений связи между коэффициентами базовых соотношений A_i, B_i, C_i имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t} &= A_i (C_{i+1} - C_i), \\ \frac{\partial B_i}{\partial t} &= -B_i (C_i - C_{i-1}), \\ B_{i+1} A_i - A_{i-1} B_i &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Последнее соотношение является условием коммутативности левой и правой s -производных. Введем вместо A_i и B_i новые функции в соответствии с правилами:

$$A_i = e^{\Psi_i}, B_i = e^{\Phi_i}. \quad (23)$$

Тогда совокупность уравнений связи примет такой вид:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = C_{i+1} - C_i, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = -(C_i - C_{i-1}), \quad \Phi_{i+1} + \Psi_i = \Psi_{i-1} + \Phi_i. \quad (24)$$

К этим соотношениям следует добавить еще одно очевидное тождество, которое приводит к следующей дополнительной связи:

$$\begin{aligned} D_+ D_- \Phi_i &= D_- D_+ \Phi_i = \Phi_i; \\ \Psi_i + \Phi_{i+1} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение следующего общего вида:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = (M D_+ + N D_- + L_i) \Phi_i, \quad (26)$$

где M , N и L_i – некоторые независимые от t числа. Используя базовые соотношения (2) и соотношения (23) и (25), преобразуем уравнение (26) к форме связи базовых коэффициентов:

$$C_i = M A_i + N B_i = M e^{\Psi_i} + N e^{\Phi_i} + L_i. \quad (27)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы (24) и используя (25), находим:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = M(e^{\Psi_{i+1}} - e^{\Psi_i}) + N(e^{-\Psi_i} - e^{-\Psi_{i-1}}) + I_i, \quad (28)$$

где, как и раньше, $I_i = L_{i+1} - L_i$.

Рассмотрим дополнительно уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = (MD_+^2 + ND_-^2)\Phi_i = M\Phi_{i+2} + N\Phi_{i-2} + L_i\Phi_i, \quad (29)$$

где M и N – также некоторые постоянные. В этом случае для функций $C_i(t)$ получаем с учетом (25) следующие соотношения:

$$C_i = Me^{\Psi_{i+1} + \Psi_i} + Ne^{\Phi_{i-1} + \Phi_i} = Me^{\Psi_{i+1} + \Psi_i} + Ne^{-\Psi_{i-2} - \Psi_{i-1}} + L_i.$$

Введем для удобства следующие обозначения: $u_i = \Psi_{i+1} + \Psi_i$, тогда уравнения для этой функции примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = M(e^{u_{i+2}} - e^{u_i}) + N(e^{-u_{i-1}} - e^{-u_{i-2}}) + I_i. \quad (30)$$

Очевидно, что частные случаи, соответствующие только левой или правой производной во вспомогательных уравнениях, можно получить, полагая либо $M=0$, либо $N=0$. В более общем случае для вспомогательного уравнения:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \sum_{k=0}^n (M_k D_+ + N_k D_-) \Phi_i = \sum_{k=0}^n (M_k \Phi_{i+k} + N_k \Phi_{i-k}) + L_i \Phi_i. \quad (31)$$

5. Интегралы движения

Как уже отмечалось, вычисление решений рассмотренных бесконечных цепочек производится с помощью решений линейных вспомогательных уравнений. В частности, для всех типов вспомогательных уравнений, если найдены решения для Φ_i , то решения для A_i, B_i, Φ_i вычисляются по следующим формулам:

$$A_i = \Phi_{i+1}(t) / \Phi_i(t), \quad \Phi_i = \ln A_i, \quad B_i = \Phi_{i-1} / \Phi_i. \quad (32)$$

Для наглядного качественного анализа свойств рассмотренных динамических систем необходимо иметь возможность вычислять их интегралы движения. Интегралы для этих систем строятся с помощью интегралов движения системы (10). Обозначим через $v_k = (\dots, v_k^0, v_k^1, v_k^2, \dots)$, $k \in [-\infty, \infty]$, – левые собственные вектора матрицы M , соответствующие собственному числу λ_k , как в конечном, так и бесконечном случае. Тогда, умножая (10) слева на v_k , находим:

$$\dot{V}_k = \lambda_k V_k, \quad V_k(U) = (v_k, U) = \sum_{a=-\infty}^{\infty} v_k^a \Phi_a. \quad (33)$$

Предположим, что среди всех собственных чисел λ_k нет кратных. Пусть далее $\lambda_0 \neq 0$ – отличное от нуля собственное число системы (10). В этом случае имеем

$$t = \frac{1}{\lambda_k} \ln V_k - H_k,$$

где H_k – постоянные интегрирования. Тогда интегралами системы (10) являются все возможные функции:

$$I_k = H_k - H_0 = \frac{1}{\mu_k} \ln V_k(U) - \frac{1}{\mu_0} \ln V_0(U), \quad k \neq 0. \quad (34)$$

Для всех k , у которых $\lambda_k = 0$, интегралами являются сами функции $V_k(U)$. Обращая соотношения (32) по отношению к Φ_i , находим:

$$\Phi_i = \Phi_0 \prod_{j=0}^{i-1} A_j, \quad i > 0, \quad \Phi_i = \Phi_0 \prod_{j=1}^i A_j^{-1}, \quad i < 0.$$

Отсюда $V_k = \Phi_0 Q_k$, где

$$Q_k = v_k^0 + \sum_{a=1}^{\infty} \left(v_k^{-a} \prod_{j=1}^a A_j^{-1} + v_k^a \prod_{j=1}^a A_j \right).$$

Подставляя эти соотношения в (34) и исключая из интегралов функцию $\ln \Phi_0(t)$, окончательно находим, что интегралами движения цепочек будут величины:

$$J_{km} = \frac{\ln Q_k / Q_0}{\lambda_0 - \lambda_k} - \frac{\ln Q_m / Q_0}{\lambda_0 - \lambda_m}, \quad (35)$$

где $k \neq m \neq 0$. В эту схему аналогичным образом включаются и интегралы, соответствующие нулевым собственным числам.

Если среди собственных чисел имеются кратные собственные числа, то вычисление интегралов для этой группы проводится по несколько другой схеме. Пусть, как и раньше, $\lambda_0 \neq 0$ – некоторое некратное собственное число, и $\lambda_p = \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_q$, где $q > p$. В этом случае часть уравнений (10) с соответствующими номерами после умножения слева на v_k преобразуются к форме Жордана [12]. Исходя из этого, уравнения для функций V_k , $k = p, \dots, q$, в общем случае можно записать в такой форме:

$$\dot{V}_k = \lambda_p V_k + V_{k+1}, \quad k = p, \dots, q-1, \quad \dot{V}_q = \lambda_p V_q.$$

Заметим, что если матрица M является верхнетреугольной или нижнетреугольной, то матрицу не обязательно приводить к форме Жордана,

а уравнения для V_k можно получать непосредственно из решения самой исходной системы (10). В случае представления Жордана находим, что решения для функций V_k в соответствующем диапазоне номеров имеет такой вид:

$$V_{p+k} = \sum_{\alpha=0}^k \frac{C_{s-\alpha}}{(k-\alpha)!} t^{k-\alpha} e^{\lambda_p t}; \quad k = p, \dots, s,$$

где $s = q - p$, а C_α – постоянные интегрирования. Для функций $V_q = Q_q \Phi_0$ и $V_0 = Q_0 \Phi_0$ имеем два соотношения:

$$t = \frac{1}{\lambda_p} (\ln Q_q + \ln \Phi_0 - \ln C_s); \quad t = \frac{1}{\lambda_0} (\ln Q_0 + \ln \Phi_0 - H_0),$$

Исключая из них Φ_0 , находим:

$$t = \frac{1}{\Delta} Z_p, \quad Z_p = \ln(Q_p / Q_0) - H_{p0},$$

где $H_{p0} = \ln C_s - H_0$ и $\Delta = \lambda_p - \lambda_0$. Используя последнее соотношение, находим интегралы движения в следующей форме:

$$J_{kp} = \ln(C_{s-k} / C_s) = \ln(Q_{p+k} / Q_q) - \sum_{\alpha=0}^k \frac{C_{s-\alpha}}{\Delta^{k-\alpha} (k-\alpha)!} Z_p^{k-\alpha}, \quad k = 1, \dots, s-1. \quad (36)$$

Эти интегралы с заданным k вычисляются рекуррентно через значения интегралов с $(k-1)$.

6. Циклические цепочки

Отдельный класс цепочек, связанных со сдвигowymi производными, возникает, если дополнительно потребовать, что после конечного числа сдвигов базовые уравнения переходят сами в себя. Это условие можно выразить следующим соотношением:

$$D_+ \Phi_i = \Phi_{i+1}, \quad D_+ \Phi_{i+1} = \Phi_{i+2}, \dots, \quad D_+^q \Phi_i = D_+ \Phi_{i+q-1} = \Phi_{i+q} = \Phi_i,$$

где q – некоторое натуральное число, большее 1: $q > 1$. В этом случае на коэффициенты базовых соотношений накладываются дополнительные условия, сводящиеся к двум соотношениям:

$$\prod_{k=0}^{q-1} A_{i+k} = 1, \quad A_{i+q} = A_i, \quad C_{i+q} = C_i. \quad (37)$$

В результате подстановки $\Phi_i = \ln A_i$ первое и второе из этих соотношений сводятся к формулам:

$$\sum_{k=0}^{q-1} \varphi_{i+k} = 0, \quad \varphi_q = \varphi_0. \quad (38)$$

Условия цикличности приводят к некоторым модификациям цепочек. Цепочки (17) в случае $n = q$ приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_i = \sum_{k=1}^{q-1} M_k \left(e^{\varphi_{i+k}} - e^{\varphi_i} \right) \exp \left\{ \sum_{p=1}^{k-1} \varphi_{i+p} \right\}, \quad i = 1, \dots, q, \quad (39)$$

где q функций φ_i , $i = 1, \dots, q-1$, связаны соотношением (38). В силу цикличности цепочки только $(q-2)$ функций являются независимыми. Поэтому индекс i пробегает конечный интервал значений $i = 0, 1, \dots, q-2$.

В частном случае $q = 2$ соотношение (38) имеет такой вид:

$$\varphi_i + \varphi_{i+1} = 0,$$

что эквивалентно:

$$\varphi_1 = -\varphi_0.$$

В этом случае, поскольку $B_2 = B_0$, уравнение (39) примет вид одного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_0 = M_1 \left(e^{-\varphi_0} - e^{\varphi_0} \right) = -2M_1(\varphi_0) \quad (39a)$$

для функции φ_0 . В случае же $q = 3$ уравнение (39) имеет такой вид:

$$\varphi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2} = 0,$$

что приводит к двум независимым уравнениям для φ_0 и φ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_0 &= (M_1 - M_2 e^{\varphi_0}) e^{\varphi_1} - M_1 e^{\varphi_0} + M_2 e^{-\varphi_0}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1 &= (M_1 e^{-\varphi_1} - M_2) e^{-\varphi_0} - M_1 e^{\varphi_1} + M_2 e^{-\varphi_1}. \end{aligned} \quad (39b)$$

Если ввести обозначения $x = e^{\varphi_0}$ и $y = e^{\varphi_1}$, то уравнение (39a) сводится к уравнению Ферхюльста:

$$\dot{x} = 2M_1(1 - x^2).$$

Система же (39b) превращается в систему следующего вида:

$$\dot{x} = (M_1 - M_2 x)xy - M_1 x^2 + M_2, \quad \dot{y} = (M_1 - M_2 y)x^{-1} - M_1 y^2 + M_2, \quad (40)$$

которая, как и уравнение Ферхюльста, может иметь приложение в задачах популяционной динамики или теории химических реакций.

7. Ограниченные цепочки

Еще одним классом интегрируемых моделей рассмотренного типа являются ограниченные цепочки, длина которых определяется условием обращения в ноль функций φ_i , начиная с некоторого номера $q > 0$ для цепочек со сдвигом вперед (или $q < 0$ для цепочек со сдвигом назад). В качестве примера приведем цепочки типа (12). Потребуем, чтобы начиная с некоторого конечного номера $q \leq n$ выполнялись условия:

$$\Phi_{q+i} = \Phi_q, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда все уравнения для функций Φ_{q+i} , $i > 1$, превращаются в одно и то же уравнение вида

$$\dot{\Phi}_q = \Phi_q \sum_{i=0}^n M_i.$$

Уравнения с номерами, меньшими q , будут отличаться от этого исходного уравнения. В результате все функции $A_{q+i} = \Phi_{i+q+1} / \Phi_{i+q} = 1$, $i > 0$, будут равны 1, а функции $\varphi_{q+i} = \ln A_{q+i} = 0$, $i > 0$, – нулю. В результате совокупность уравнений для всех функций φ_i с номерами $-p < i < q$, где $p \leq 0$ – любое неотрицательное число, является замкнутой и описывает конечную цепочку уравнений вида (12). В качестве примера приведем уравнения с $n = 2, q = 3, p = 0$:

$$\dot{\Phi}_0 = M_1(e^{\varphi_1} - e^{\varphi_0}) + M_2(e^{\varphi_2} - e^{\varphi_0})e^{\varphi_1},$$

$$\dot{\Phi}_1 = M_1(e^{\varphi_2} - e^{\varphi_1}) + M_2(1 - e^{\varphi_1})e^{\varphi_2}, \quad \dot{\Phi}_2 = (M_1 + M_2)(1 - e^{\varphi_2}),$$

Если перейти к переменным $x = e^{\varphi_0}$, $y = e^{\varphi_1}$, $z = e^{\varphi_2}$, то последние уравнения примут такой вид:

$$\dot{x} = M_1(y - x)x + M_2(z - x)xy,$$

$$\dot{y} = M_1(z - y)y + M_2y^2 - M_2zy^2, \quad (41)$$

$$\dot{z} = (M_1 + M_2)(1 - z)z.$$

Эта система также может использоваться в моделях химических реакций и математическом моделировании динамики популяций в биологии. Аналогичные уравнения имеют место и для конечных цепочек с правым сдвигом. Однако цепочки со сдвигами обоих типов требуют отдельного рассмотрения, что выходит за рамки данной работы.

8. Цепочки с условиями отражения

Рассмотренные способы ограничения длины цепочек с помощью условия цикличности и условия обрезания неприменимы к цепочкам,

содержащим одновременно и правые, и левые производные. В этом случае для ограничения длины цепочек можно воспользоваться условием отражения. Условие отражения продемонстрируем на следующем примере. Рассмотрим цепочку вида (28) со вспомогательными уравнениями (26) при условии $I_i = 0$. Потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\varphi_i = -\varphi_{-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Из этих условий следует, что $\varphi_0 = 0$, это автоматически приводит к требованию $M = N$. Можно видеть, что в этом случае уравнения (28) для $i < 0$ переходят в уравнения для $i > 0$. Действительно, при $i < 0$ уравнения

$$\frac{\partial \Psi_{-|i|}}{\partial t} = M \left(e^{\Psi_{-|i|+1}} - e^{\Psi_{-|i|}} \right) + M \left(e^{-\Psi_{-|i|}} - e^{-\Psi_{-|i|-1}} \right)$$

в силу условий отражения переходят в уравнения

$$\frac{\partial \Psi_{|i|}}{\partial t} = M \left(e^{\Psi_{-|i|+1}} - e^{-\Psi_{|i|}} \right) + M \left(e^{\Psi_{-|i|}} - e^{\Psi_{-|i|-1}} \right),$$

что в точности совпадает с уравнениями при $i > 0$. Таким образом, можно получить полубесконечную цепочку. Условием отражения (42) соответствует следующее условие для функций Φ_i :

$$\Phi_0 = \Phi_1, \quad \Phi_i = \Phi_{-i}, \quad i = 1, \dots$$

Для того чтобы получить конечную цепочку, необходимо поставить условие отражения с другого конца цепочки на некотором шаге q , полагая:

$$\varphi_{q-i} = -\varphi_{q+1+i}, \quad i = 0, 1, \dots, q. \quad (43)$$

При $i = q$ имеем соотношение $\varphi_0 = \varphi_{2q+1} = 0$. Можно видеть, что в этом случае уравнения с номерами $q+1+i$ переходят в уравнения с номерами $q-i$ для указанных значений индекса i . В результате получаем замкнутую конечную цепочку уравнений с номерами $i = 1, \dots, q$. В частности, при $q = 3$ имеем систему уравнений следующего вида:

$$\dot{\varphi}_1 = M \left(e^{\varphi_2} - e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1} - 1 \right), \quad \dot{\varphi}_2 = M \left(e^{\varphi_3} - e^{\varphi_2} + e^{-\varphi_2} - e^{-\varphi_2} \right),$$

$$\dot{\varphi}_3 = M \left(2e^{-\varphi_3} - e^{\varphi_3} - e^{-\varphi_2} \right).$$

Вновь, переходя к переменным x, y, z , запишем эту систему в полиномиальном виде:

$$\dot{x} = M(y - x)x + M(1 - x), \quad \dot{y} = M(z - y)y + M(1 - y/x), \quad \dot{z} = M(2 - z^2 - z/y).$$

Условия отражения можно распространить и на другие типы цепочек, построенных на вспомогательных уравнениях одновременно и с правыми, и левыми сдвигами.

9. Системы конечной длины общего вида

Результаты, полученные для цепочек конечной длины, формально можно обобщить, не прибегая к той или иной процедуре ограничения длины бесконечных цепочек. Рассмотрим систему (10) относительно вектора $U = \{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ с произвольной вещественной матрицей M . Введем следующее представление для функций Φ_i , полагая

$$\Phi_i = Q_i(t)\Phi_0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (44)$$

Подставляя эти соотношения в систему (10), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi_0} \frac{d\Phi_0}{dt} &= M_{00} + \sum_{k=1}^n M_{0k} Q_k(t), \\ \frac{dQ_i}{dt} &= -Q_i \frac{1}{\Phi_0} \frac{d\Phi_0}{dt} + M_{i0} + \sum_{k=1}^n M_{ik} Q_k, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Исключая из последних уравнений Φ_0 с помощью первого уравнения, приходим к нелинейной системе уравнений относительно n функций Q_i следующего вида:

$$\frac{dQ_i}{dt} = M_{i0} - Q_i M_{00} + \sum_{k=1}^n (M_{ik} - Q_i M_{0k}) Q_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (45)$$

В матричном виде эту систему можно записать в следующей форме:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{m} + (\mathbf{M}_1 - M_{00})\mathbf{Q} - (\mathbf{n}, \mathbf{Q})\mathbf{Q}, \quad (46)$$

где $\mathbf{Q} = \{Q_1, \dots, Q_n\}$, $\mathbf{m} = \{M_{10}, \dots, M_{n0}\}$, $\mathbf{r} = \{M_{01}, \dots, M_{0n}\}$, $(\mathbf{r}, \mathbf{Q}) = \sum_{k=1}^n r_k Q_k$ и

матрица $\mathbf{M}_1$ представляет собой часть матрицы M без первой строки и первого столбца. Пусть теперь функции Q_i являются дифференцируемыми функциями компонентов другого вектора $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Будем полагать, что зависимость $Q_i = Q_i(\mathbf{x})$ такова, что матрица $\mathbf{J}$ с компонентами

$$J_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_m}, \quad k, m = 1, \dots, n,$$

является невырожденной. Тогда система (46) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{m} + (\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{M}_1\mathbf{J}(\mathbf{x}) - M_{00})\mathbf{x} - (\mathbf{r}\mathbf{J}(\mathbf{x}), \mathbf{x})\mathbf{x}. \quad (47)$$

Последняя система нелинейных уравнений относительно $\mathbf{x}$ представляет наиболее общий тип уравнений, который можно связать с конечной

вспомогательной системой с помощью подстановки (44). В частности, в эту схему попадают все редукции бесконечных цепочек к конечным, рассмотренные ранее. Каждая из рассмотренных редукций (циклическая, ограниченная или отражательная) фиксируют матрицу M и, следовательно, M_1 . Связь же Q_i с функциями $x_i = A_{i-1}$ (или $x_i = B_{i+1}$) определяется рекуррентными соотношениями (7), что дает:

$$Q_k = \prod_{j=0}^{k-1} A_j = x_k x_{k-1} \cdots x_1. \quad (48)$$

Отсюда:

$$J_{km} = \frac{\partial Q_k}{\partial x_m} = \begin{cases} 0, & k > m+1, \\ Q_k / x_m, & k \leq m+1. \end{cases}$$

Очевидно, что подстановку (44) можно рассматривать независимо от подстановок для бесконечных цепочек.

В качестве примера рассмотрим модель в размерности $n=2$, которая соответствует простейшему выбору функций $Q_1(t) = x, Q_2(t) = y$. Уравнения этой модели при произвольной матрице M размерности 3×3 имеют в этом случае такой вид:

$$\dot{x} = R_{10}x + R_{01}y + R_{20}x^2 + R_{11}xy + R_{00}, \quad (49)$$

$$\dot{y} = Q_{10}x + Q_{01}y + Q_{02}y^2 + Q_{11}xy + Q_{00},$$

где

$$R_{10} = M_{11} - M_{00}, \quad R_{01} = M_{12}, \quad R_{20} = -M_{01},$$

$$R_{11} = -M_{02}, \quad R_{00} = M_{10}, \quad Q_{01} = M_{22} - M_{00},$$

$$Q_{10} = M_{21}, \quad Q_{02} = -M_{02}, \quad Q_{11} = -M_{01}, \quad Q_{00} = M_{20}.$$

Количество независимых коэффициентов этой модели равно 10, а число независимых параметров равно 11, т.е. на 1 больше. Коэффициенты линейной части этой модели могут быть выбраны произвольно, а коэффициенты квадратичной части в каждом из уравнений модели определяются только двумя независимыми параметрами M_{01} и M_{02} . Это указывает на некоторую выделенность интегрируемых с помощью рассматриваемых подстановок моделей среди всех типов моделей с квадратичной нелинейностью.

10. Интегралы движения цепочек конечной длины

Для случая цепочек конечной длины вычисление формально производится по общим схемам, рассмотренным ранее для бесконечных цепочек. Поскольку динамические системы для цепочек конечной длины играют важную роль в прикладных задачах, здесь будут рассмотрены некоторые важные примеры построения интегралов движения.

10.1. Циклические цепочки

Для циклических цепочек матрица M размерности $q \times q$ представляет собой циклическую матрицу (или циркулянт) [12] и может быть записана в следующем общем виде:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_q \\ M_q & M_0 & M_1 & \dots & M_{q-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_1 & M_2 & M_3 & \dots & M_0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Собственные числа этой матрицы являются некратными и имеют следующий вид:

$$\lambda_k = p(r_k), \quad k = 1, \dots, q,$$

где $p(x) = M_0 + M_1x + \dots + M_qx^{q-1}$ и $r_k = e^{2\pi i/k}$. Правые собственные вектора циклической матрицы имеют следующий вид:

$$u_k = \text{column} \{1, r_k, r_k^2, \dots, r_k^{q-1}\}, \quad k = 1, \dots, q.$$

Матрица левых собственных векторов вычисляется как обратная к матрице правых собственных векторов с теми же собственными числами.

В частности, для случая $q = 3$, соответствующего модели (46), необходимо решать систему из трех уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0 &= M_0\Phi_0 + M_1\Phi_1 + M_2\Phi_2, \\ \dot{\Phi}_1 &= M_0\Phi_1 + M_1\Phi_2 + M_2\Phi_0, \\ \dot{\Phi}_2 &= M_0\Phi_2 + M_1\Phi_0 + M_2\Phi_1. \end{aligned} \quad (51)$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет такой вид:

$$(M_0 - \lambda)^3 + M_1^3 + M_2^3 - 3(M_0 - \lambda)M_1M_2 = 0,$$

а соответствующие его корни такие:

$$\lambda_1 = M_0 + M_1 + M_2, \lambda_{2,3} = M_0 - (M_1 + M_2) / 2 \pm i(M_1 - M_2)\sqrt{3} / 2.$$

Левые собственные вектора циклической матрицы

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 \\ M_2 & M_0 & M_1 \\ M_1 & M_2 & M_0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

имеют такой вид:

$$v_1 = \left(\frac{M_1 - M_2 - i\sqrt{3}(M_1 + M_2)}{M_1 + 2M_2 + i\sqrt{3}M_1}, 1, -\frac{2M_1 + M_2 - i\sqrt{3}M_2}{M_1 + 2M_2 + i\sqrt{3}M_1} \right),$$

$$v_2 = \left(-\frac{M_1 - M_2 + i\sqrt{3}(M_1 + M_2)}{2M_1 + 2M_2 + i\sqrt{3}M_2}, -\frac{M_1 + 2M_2 - i\sqrt{3}M_2}{2M_1 + M_2 + i\sqrt{3}M_1}, 1 \right),$$

$$v_3 = (1, 1, 1).$$

Используя для модели (46) схему вычисления интегралов движения для случая некратных собственных чисел, приходим к одному интегралу движения следующего вида:

$$J_{12} = -\frac{1}{2} \ln(F(x, y)) + \frac{k_1 - k_2}{k_3} \operatorname{arctg}(H(x, y)),$$

где

$$k_1 = M_0 + M_1 + M_2, k_2 = M_0 - \frac{M_1 + M_2}{2}, k_3 = \sqrt{3}(M_1 - M_2)/2,$$

$$F(x, y) = \frac{(y + x + 1)^2}{(y + x + 1)^2 - 3(yx + x + y)}, H(x, y) = \frac{\sqrt{3}(y - 1)}{2x - y - 1}.$$

Фазовый портрет этой системы для $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ представлен на рис. 1. Динамическая система (46) имеет одну особую точку $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ типа фокус. Кроме этого, имеется особенность вдоль прямой $x + y + 1 = 0$, на которой значение интеграла обращается в бесконечность. Три дополнительных отрезка прямых, проходящих через особую точку, указывают на положение точек, где арктангенс скачком изменяется на π . Эти особенности устранимы. Видно, что фазовые кривые на рис. 1, *a* переходят через линии скачков непрерывно.

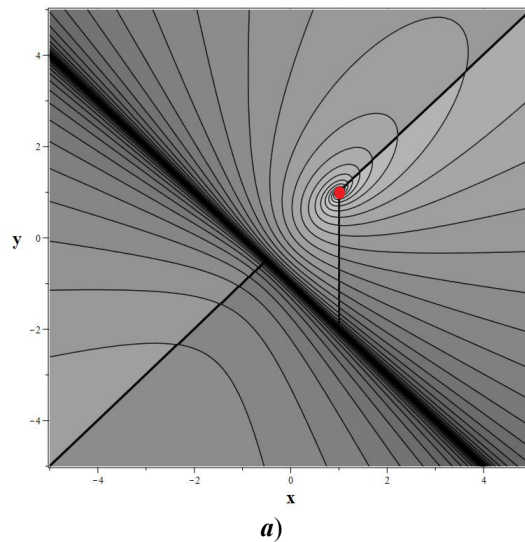


Рис. 1. Фазовый портрет циклической цепочки (46):
a – фазовый портрет, *b* – функция интеграла: $J = J(x, y)$

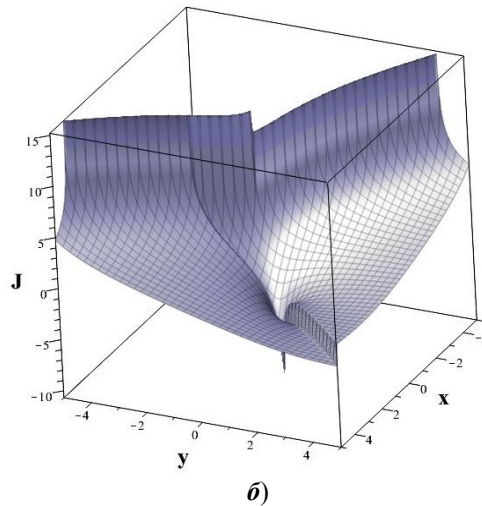


Рис. 1. Окончание

10.2. Ограниченные цепочки

В случае ограниченных цепочек типа (41) вспомогательные уравнения имеют вид системы уравнений (10), в которой $U = \text{column}\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_q\}$, а матрица M имеет размерность $(q+1) \times (q+1)$ и такой вид:

$$M = \begin{pmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & \dots & M_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_0 & M_1 & \dots & M_{n-1} & M_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_0 & M_1 & \dots & M_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_0 & \dots & M_{n-1} + M_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & M_0 + \dots + M_n \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Без ограничения общности мы полагаем $p=0$. Данная матрица имеет два различных собственных числа: $\lambda_1 = M_0 + \dots + M_n$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_q = M_0$, одно из которых q раз вырождено. Это означает, что для вычисления интегралов следует использовать соотношения (36). Для случая $q=3$ интегралы движения имеют следующий вид:

$$J_{yz} = M_1 \tau(z) + \frac{zy-1}{y(z-1)}, \quad J_{xyz} = \frac{M_1^2}{2} \tau^2(z) - \left[\frac{M_1(1-yz)}{y(1-z)} + M_2 \right] \tau(z) + \frac{1-xyz}{xy(1-z)},$$

где

$$\tau(z) = \frac{1}{M_1 + M_2} \ln \frac{z}{z-1}.$$

Модель имеет четыре неподвижные точки с координатами: $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (0, 0, 1)$, $P_3 = (0, 1, 1)$, $P_4 = (1, 1, 1)$.

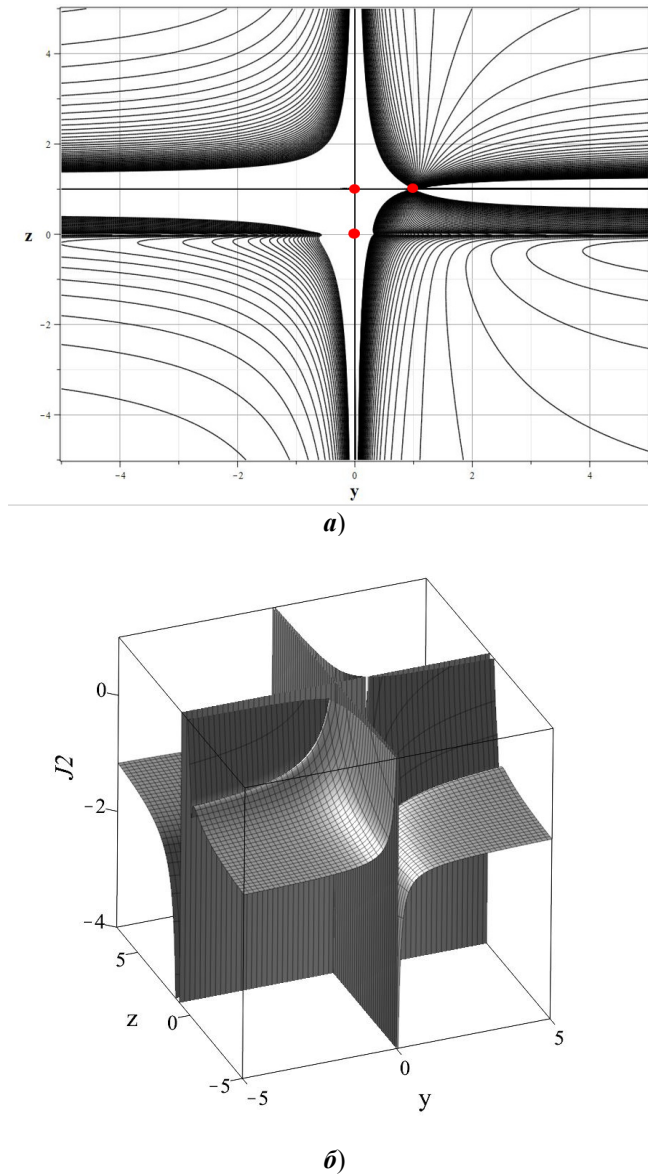


Рис. 2. Фазовый портрет циклической цепочки (46):
a – фазовый портрет; **б** – функция интеграла: $J = J(x, y)$

10.3. Модель конечной размерности

Интегралы движения для моделей конечной размерности вычисляются по общей схеме, изложенной в разд. 6. Для модели (51), имеющей размерность $n = 2$, имеется один интеграл движения, который в случае, когда все три собственных числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ матрицы $\mathbf{M}$ различны, имеет такой вид:

$$J_{12} = \frac{\ln \frac{Q_1}{Q_0}}{\lambda_0 - \lambda_1} - \frac{\ln \frac{Q_2}{Q_0}}{\lambda_0 - \lambda_2},$$

где $Q_k = v_k^0 + v_k^1 x + v_k^2 y, k = 0, 1, 2$, а v_k – левые собственные вектора матрицы M размерности 3 общего вида. Поскольку частным случаем матрицы M являются варианты циклической матрицы и ограниченной матрицы, рассмотренные выше, то интерес представляет только случай симметричной матрицы. Поскольку для симметричной матрицы собственные числа и собственные вектора вещественные, и, кроме того, собственные вектора ортогональны, то удобно вместо самой матрицы задавать сами собственные числа и собственные вектора.

Выберем в качестве собственных векторов матрицы M следующие три вектора:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta), 1),$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\cos(\vartheta), -\sin(\vartheta), 1),$$

$$v_3 = (-\sin(\vartheta), \sin(\vartheta), 0),$$

а в качестве собственных чисел, им соответствующих, три вещественных числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.

В этом случае интеграл движения примет следующий вид:

$$J_{12} = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_1} \ln \frac{\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)x + y}{x \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)} - \\ - \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_2} \ln \frac{-\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)x + y}{x \cos(\vartheta) - \sin(\vartheta)}.$$

Для случая $\vartheta = \pi/3$ и $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ матрица M будет иметь такой вид:

$$M = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 21 & -3\sqrt{3} & -2 \\ -3\sqrt{3} & 15 & -2\sqrt{3} \\ -2 & -2\sqrt{3} & 12 \end{pmatrix},$$

а сама динамическая система – такой:

$$\dot{x} = \frac{1}{8} (6x + 2\sqrt{3}y - 3\sqrt{3}x^2 + 2xy + 3\sqrt{3}),$$

$$\dot{y} = \frac{1}{8} (2\sqrt{3}x + 9y - 2y^2 - 3\sqrt{3}xy + 2).$$

Фазовый портрет данной системы приведен на рис. 3. Три особые точки системы лежат на пересечении трех особых прямых интеграла $J_{12}(x, y)$, соответствующих трем собственным векторам матрицы M . Одна из точек – седловая, а две другие – узлы. Один из узлов устойчивый, другой – неустойчивый.

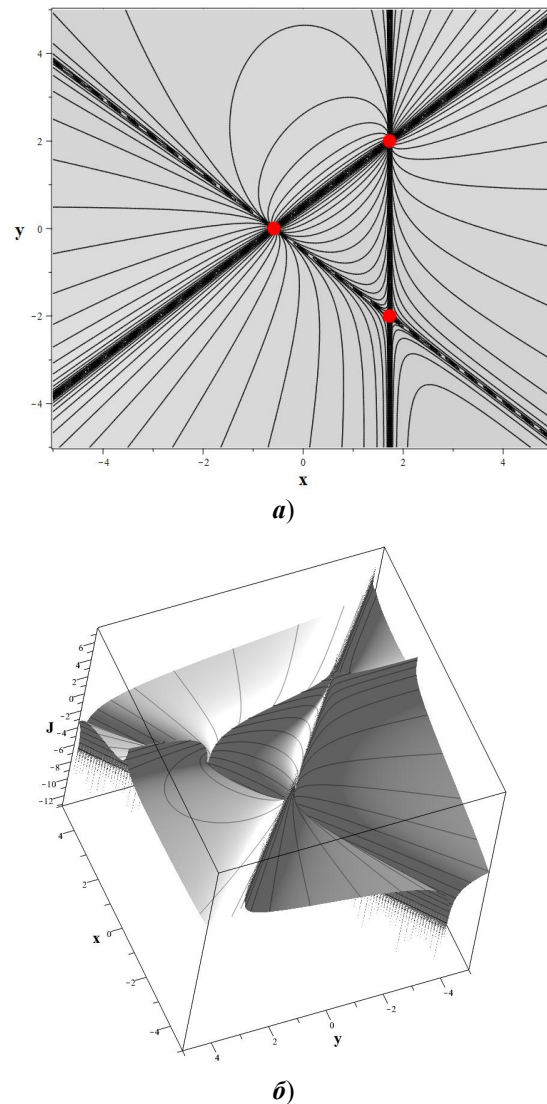


Рис. 3. Фазовый портрет системы (49):

a – фазовый портрет, b – функция интеграла $J_{12} = J_{12}(x, y)$

11. Физическая интерпретация бесконечных цепочек

Рассмотрим теперь общие свойства построенных цепочек, которые важны с точки зрения их прикладного использования. Наиболее естественной областью использования уравнений типа (17), (28) и (30) является динамика колебаний цепочек атомов в кристаллах. К этой области обычно относят цепочки Тоды и их некоторые модификации [4, 6, 7]. Но для использования построенных цепочек в теории нелинейных колебаний кристаллических решеток необходимо эти уравнения привести к форме уравнений второго порядка по t , например, с помощью дифференцирования по t . Это также подразумевает, что рассматриваемые бесконечные цепочки должны являться гамильтоновскими. С формальной точки зрения, поскольку данные цепочки имеют бесконечный набор интегралов движения, их можно после некоторых преоб-

разований привести к гамильтоновскому виду. Однако новые переменные будут выражаться через бесконечные суммы от исходных переменных типа A_i или B_i . В этом случае достаточно трудно интерпретировать такие модели с точки зрения моделей взаимодействия лишь небольшого числа соседних атомов решетки.

В связи с этим область применения рассматриваемых цепочек может быть физическая кинетика, химия или биологическая кинетика (динамика популяций) [5, 10, 11]. В этом случае не требуется проверка негамильтоновости цепочек. В случае моделей биологических популяций более приемлемыми являются цепочки конечной длины, например циклические цепочки. Бесконечные же цепочки могут рассматриваться как модели полимерных цепей или очень длинных молекулярных цепочек или генов [10]. Они могут рассматриваться также как модели роста кластеров дефектов в кристаллической среде. Если предположить, что функции A_i с номерами $i > 0$ рассматриваются как концентрация дефектов с i вакансиями, с номерами $i < 0$ – как концентрация дефектов с $|i|$ междоузлий, а A_0 – как концентрация атомов среды, то рассматриваемые модели можно интерпретировать как сосредоточенные модели образования кластеров из любого возможного числа дефектов. Например, модель

$$\frac{\partial}{\partial t} A_i = N_1 (A_{i+1} - A_i) A_i$$

может интерпретироваться как модель роста концентрации кластеров дефектов с i вакансиями (междоузлиями) с коэффициентом роста $\alpha_i = N_1 (A_{i+1} - A_i)$. Такой коэффициент соответствует рождению кластеров с i вакансиями при «столкновении» с кластерами с $i+1$ вакансиями и распаду кластеров с i вакансиями при их взаимодействии друг с другом (эффект тесноты). Такие модели подобны моделям Вольтерра – Лотки [11, 12]. В случае более сложных моделей типа (12) при $n > 1$ коэффициенты роста и сами условия роста числа элементов с номером i усложняются и определяются не только кластерами объема $i+1$ и $i-1$, но кластерами с числом дефектов, отличающихся от i на большее число элементов.

12. Построение решений вспомогательных уравнений и уравнений цепочек

Решения полученных уравнений строятся с помощью подстановок, связанных с базовыми соотношениями (2). Функции $A_i(t)$ и $\hat{A}_i$ вычисляются следующим образом:

$$A_i(t) = \frac{\Phi_{i+1}(t)}{\Phi_i(t)}, \quad \hat{A}_i(t) = \hat{\Phi}_{i+1} \hat{\Phi}_i^{-1}.$$

Сами функции Φ_i и $\hat{\Phi}_i$ вычисляются как решения соответствующих вспомогательных уравнений.

Рассмотрим вначале скалярные уравнения (9). Искать частные решения этих уравнений с постоянными коэффициентами будем в следующей форме:

$$\Phi_i = P(z) z^i e^{\lambda t}.$$

В результате уравнения (9) приводятся к виду

$$\lambda = \sum_{k=0}^n C_k z^k.$$

Это последнее соотношение является характеристическим уравнением, из которого вычисляется параметр λ как функция комплексного параметра z . В результате общее решение уравнения (9) можно представить в следующей форме:

$$\Phi_i = \int_C P(z) z^i e^{\lambda(z)t} dz,$$

где C – контур в комплексной плоскости изменения параметра z .

В случае матричных уравнений решения строятся по аналогичной схеме. Частные решения ищутся в виде

$$\hat{\Phi}_i = z^i e^{\lambda_a t} p_a(z),$$

где $P_a(z)$ – собственный вектор с номером a матрицы $\hat{Q}$:

$$\hat{Q}(z) = \sum_{k=0}^n \hat{C}_k z^k$$

с матричными коэффициентами $\hat{C}_k$, соответствующими собственному числу $\lambda_a(z)$, $a = 1, \dots, n$. Общее решение для $\hat{\Phi}_i$ имеет теперь такой вид:

$$\hat{\Phi}_i = \int_C \hat{P}(z) z^i e^{\lambda(z)t} dz,$$

где $\hat{P}(z)$ – матрица собственных векторов, удовлетворяющая уравнению:

$$\hat{P}(z) \hat{L}(z) = \hat{Q}(z) \hat{P}(z),$$

где $\hat{L}(z) = \text{diag}\{\lambda_1(z), \lambda_2(z), \dots, \lambda_n(z)\}$, n – размерность матриц.

13. Решения в случае цепочек конечной длины

Решения в случае цепочек конечной длины строятся по общей схеме подстановок (44). Для функций $Q_i(t)$ имеем

$$Q_i = \frac{\Phi_i}{\Phi_0}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где функции Φ_i являются решениями системы (10). Решения последней в случае независимых от t коэффициентов матрицы M строятся стандартными методами теории обыкновенных линейных дифференциальных уравне-

ний. Для вычисления решений относительно компонентов вектора $\mathbf{x}(t)$ необходимо после вычисления функций $Q_i(t)$ найти решения, вообще говоря, неявной нелинейной системы уравнений:

$$Q_i(x) = Q_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта задача является алгебраической и также решается стандартными методами теории нелинейных алгебраических уравнений.

В случае циклических цепочек построение сводится к решению системы из q связанных между собой линейных уравнений относительно q вспомогательных функций Φ_i , $i = 0, \dots, q-1$. В частности, решения системы (51) для $q = 3$ можно записать в векторной форме:

$$U = P_1 \mathbf{u}_1 e^{\lambda_1 t} + P_2 \mathbf{u}_2 e^{\lambda_2 t} + P_3 \mathbf{u}_3 e^{\lambda_3 t},$$

где $U = \text{column}\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$, P_i – произвольные постоянные, а $\mathbf{u}_k, k = 1, 2, 3$ – собственные вектора матрицы (51). Если Φ_0, Φ_1, Φ_2 – решения этой линейной системы уравнений. Тогда решения уравнений (39) и (40) имеют вид

$$\varphi_0 = \ln\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_0}\right), \quad \varphi_1 = \ln\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right), \quad x = \frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \quad y = \frac{\Phi_2}{\Phi_1}.$$

В общем случае решения уравнений (37) сводятся к решению линейной системы уравнений (9) с циклической матрицей (циркулянт) M (49). В результате общее решение вспомогательных уравнений можно записать в следующем виде:

$$U = \sum_{k=1}^q P_k \mathbf{u}_k e^{\lambda_k t},$$

где $\mathbf{u}_k$ – правые собственные вектора матрицы (49). Соответственно, решения нелинейной циклической цепочки будут иметь такой вид:

$$\phi_k = \ln\left(\frac{\Phi_{k+1}}{\Phi_k}\right), \quad k = 0, \dots, q-2.$$

В случае ограниченных цепочек типа (41) построение решений вспомогательных уравнений не вызывает особых затруднений и сводится к решению системы уравнений (10), в которой $U = \text{column}\{\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_q\}$, матрица M имеет вид (53).

Заключение

В работе с помощью метода функциональных подстановок для производных на одномерной сетке построены интегрируемые модели, имеющие вид бесконечных и конечных цепочек уравнений первого порядка по времени. Рассмотрены цепочки уравнений, которые могут быть описаны с помощью сдвиговых и разностных производных. Также рассмотрены цепочки

с условием их конечности и цикличности. Для всех моделей указан способ построения точных решений и вычисления интегралов движения. Это позволяет строить фазовые портреты конечномерных моделей. Примеры фазовых портретов некоторых моделей приведены в данной работе.

Библиографический список

1. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории нелинейных дискретных систем / В. М. Журавлев, А. В. Журавлев, Д. А. Корнилов, А. В. Никитин, В. В. Самойлов // Прикладная математика и механика : сб. УлГТУ. – Ульяновск, 2009. – С. 89–103.
2. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая функция. – 2009. – Т. 158, № 1. – С. 58–71.
3. **Жаботинский, А. М.** Концентрационные колебания / А. М. Жаботинский. – Москва : Наука, 1974
4. **Скотт, Э.** Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур / Э. Скотт. – Москва : Физматлит, 2007.
5. **Ризниченко, Г. Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии / Г. Ю. Ризниченко. – Москва ; Ижевск : РХД, 2002.
6. **Тода, М.** Теория нелинейных решеток / М. Тода. – Москва : Мир, 1984.
7. **Борисов, А. В.** Современные методы теории интегрируемых систем / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – Москва ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 296 с.
8. **Brimbal, D.** Journal of Nuclear Materials / D. Brimbal, L. Fournier, A. Barbu. – 2016. – Т. 468. – С. 124–139
9. **Choi, S.** Journal of Nuclear Materials / S. Choi, G.-G. Lee, J. Kwon, J. H. Kim. – 2016. – Т. 468. – С. 56–70.
10. **Эйген, М.** Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул / М. Эйген, П. Шустер. – Москва : Мир, 1982. – 270 с.
11. D. Goulet. arXiv:1508.05359v1 [q-bio.QM]. – 2015.
12. **Беллман, Р.** Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – Москва : Мир, 1969. – 367 с.

References

1. Zhuravlev V. M., Zhuravlev A. V., Kornilov D. A., Nikitin A. V., Samoylov V. V. *Prikladnaya matematika i mekhanika: sb. UIGTU* [Applied mathematics and mechanics: collected articles of Ulyanovsk Technical State University]. Ulyanovsk, 2009, pp. 89–103. [In Russian]
2. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya funktsiya* [Theoretical and mathematical function]. 2009, vol. 158, no. 1, pp. 58–71. [In Russian]
3. Zhabotinskiy A. M. *Kontsentratsionnye kolebaniya* [Concentration fluctuations]. Moscow: Nauka, 1974. [In Russian]
4. Skott E. *Nelineynaya nauka. Rozhdenie i razvitie kogerentnykh struktur* [Nonlinear science. The creation and development of coherent structures]. Moscow: Fizmatlit, 2007. [In Russian]
5. Riznichenko G. Yu. *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii* [Lectures on mathematical models in biology]. Moscow; Izhevsk: RKhD, 2002. [In Russian]
6. Toda M. *Teoriya nelineynykh reshetok* [Theory of nonlinear lattices]. Moscow: Mir, 1984. [In Russian]
7. Borisov A. V., Mamaev I. S. *Sovremennyye metody teorii integriruemyykh sistem* [Modern methods of integrable systems theory]. Moscow; Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003, 296 p. [In Russian]

8. Brimbal D., Fournier L., Barbu A. *Journal of Nuclear Materials*. 2016, vol. 468, pp. 124–139
 9. Choi S., Lee G.-G., Kwon J., Kim J. H. *Journal of Nuclear Materials*. 2016, vol. 468, pp. 56–70.
 10. Eygen M., Shuster P. *Gipertsikl. Printsipy samoorganizatsii makromolekul* [Hypersycle. Principles of self-organization of macromolecules]. Moscow: Mir, 1982, 270 p. [In Russian]
 11. D. Goulet. *arXiv:1508.05359v1 [q-bio.QM]*. 2015.
 12. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to matrix theory]. Moscow: Mir, 1969, 367 p. [In Russian]
-

Журавлев Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра теоретической
физики, Научно-исследовательский
технологический институт
имени С. П. Капицы, Ульяновский
государственный университет (Россия,
г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42);
Институт математики и механики
им. Н. И. Лобачевского, Казанский
федеральный университет (Россия,
г. Казань, ул. Кремлевская, 18)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of theoretical physics, Technological
Research Institute named after S. P. Kapitsa,
Ulyanovsk State University (42 L'va
Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia),
Lobachevskii Institute of Mathematics
and Mechanics, Kazan University
(18 Kremlevskaya street, Kazan, Russia)

Морозов Виталий Михайлович

младший научный сотрудник, Научно-
исследовательский технологический
институт имени С. П. Капицы,
Ульяновский государственный
университет (Россия, г. Ульяновск,
ул. Льва Толстого, 42)

E-mail: aieler@rambler.ru

Morozov Vitaliy Mikhailovich

Junior researcher, Technological Research
Institute named after S.P. Kapitsa,
Ulyanovsk State University (42 L'va
Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

Образец цитирования:

Журавлев, В. М. Интегрируемые динамические цепочки и метод функциональных подстановок / В. М. Журавлев, В. М. Морозов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1 (45). – С. 78–104. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-8.