УДК 534.2, 534-13, 51-72
doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-14

Точные сингулярные решения уравнений Хохлова – Заболотской и квазилинейные уравнения первого порядка

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический университет, Ульяновск, Россия
zhvictorm@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели*. Уравнение Хохлова – Заболотской является одним из важных инструментов анализа распространения звуковых волн в газообразной среде и жидкостях, а также в задачах обтекания профилей сжимаемой жидкостью. Нелинейность этого уравнения требует специальных методов построения решений и их анализа. Целью работы является построение точных решений уравнения Хохлова – Заболотской с помощью связывания их в трехмерном пространстве квазилинейными уравнениями первого порядка. Такой подход дает важную информацию о характере решений уравнения Хохлова – Заболотской и его обобщений. *Материалы и методы*. В данной работе решения уравнения Хохлова – Заболотской строятся с помощью метода ривертонов (решений систем квазилинейных уравнений первого порядка специального типа). Описывается общая процедура вывода уравнения Хохлова – Заболотской из системы квазилинейных уравнений первого порядка. *Результаты.* Основным результатом является построение в неявном виде множества точных решений уравнения Хохлова – Заболотской, зависящих от трех функциональных параметров. Это позволяет строить решения при заданных условиях вдоль координатных осей. Представлен общий способ анализа таких решений с указанием базовых кривых, вдоль которых движутся плоские волновые фронты решений, а также областей, в которых число листов многозначных решений фиксировано. *Выводы*. Предложенный метод построения решений позволяет строить точные решения уравнения Хохлова – Заболотской, соответствующие заданным условиям вдоль координатных осей и анализировать их геометрические свойства.

Ключевые слова: уравнение Хохлова – Заболотской, обобщенные уравнения Хохлова – Заболотской, ривертоны, квазилинейные уравнения первого порядка

Финансирование: работа выполнена в рамках Дополнительного соглашения № 073-03-2024-060/1 от 13.02.2024 к Соглашению о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2024-060 от 18.01.2024, заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Для цитирования: Журавлев В. М. Точные сингулярные решения уравнений Хохлова – Заболотской и квазилинейные уравнения первого порядка // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 160–174. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-14

The exact singular solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya equations and first-order quasilinear equations

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia
zhvictorm@gmail.com

© Журавлев В. М., 2024. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Abstarct. *Background.* The Khokhlov-Zabolotskaya equations are one of the important tools for analyzing the propagation of sound waves in a gaseous medium and liquids, as well as in problems of compressible fluid flow around profiles. The nonlinearity of these equations requires special methods for constructing solutions and analyzing them. The purpose of the work is to construct exact solutions of the Khokhlov-Zabolotskaya equations by connecting them with first-order quasilinear equations, as well as to analyze the geometry of these solutions in three-dimensional space. *Materials and methods.* In this work, solutions to the Khokhlov-Zabolotskaya equations are constructed using the riverton method (solutions to systems of first-order quasi-linear equations of a special type). The general procedure for deriving the Khokhlov-Zabolotskaya equations from a system of first-order quasilinear equations is described. *Results.* The main result is the implicit construction of a set of exact solutions to the Khokhlov-Zabolotskaya equation, depending on three functional parameters. This allows you to construct solutions under given conditions along the coordinate axes. A general method for analyzing such solutions is presented, indicating the base curves along which the plane wave fronts of the solutions move, as well as the regions in which the number of sheets of multivalued solutions is fixed. *Conclusions.* The proposed method for constructing solutions allows one to construct exact solutions of the Khokhlov-Zabolotskaya equation that correspond to given conditions along the coordinate axes and analyze their geometric properties.

Keywords: Generalized Khokhlov-Zabolotskaya equations, rivertons, first-order quasilinear equations

Financing: the work was carried out within the framework of Additional Agreement No. 073-03-2024-060/1 dated February 13, 2024 to the Agreement on the provision of subsidies from the federal budget for financial support for the implementation of the state task for the provision of public services (performance of work) No. 073-03-2024-060 dated January 18, 2024, concluded between the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "UlSPU im. I.N. Ulyanov" and the Ministry of Education of the Russian Federation.

For citation: Zhuravlev V.M. The exact singular solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya equations and first-order quasilinear equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):160–174. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-14

Введение

Уравнение Хохлова – Заболотской (ХЗ) описывает распространение акустических волн в виде пучков и играет важную роль в нелинейной акустике [1–6]. Это же уравнение возникает и в гидродинамике при описании обтекания тонких профилей сжимаемым газом [4, 7].

Обобщенные уравнения Хохлова – Заболотской (ОХЗ) [1, 4, 5] можно записать в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}-F(p)\frac{\partial p}{\partial t}\right)=\Delta_{\perp}p,\ \ \Delta_{\perp}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

здесь $p(x,y,z,t)$ – безразмерное акустическое давление в точке x,y,z в пучке в момент времени t ; $F(p)$ – функция, характеризующая нелинейные свойства среды. Акустический пучок направлен вдоль оси x, а координаты y,z лежат в плоскости, перпендикулярной оси пучка. В классическом виде уравнению ХЗ соответствует функции $F(p)=p$. В статье [4] указывалось на возможность обобщения классического уравнения до уравнения (1) с произвольной функцией $F(p)$, которые могут возникать в различных прикладных задачах. Еще одним обобщением уравнения (1) является уравнение Хохлова – Заболотской – Кузнецова [4, 8], учитывающее диссипативные эффекты в вязкой жидкости.

В связи с множеством приложений, в которых уравнение ХЗ появляется, это уравнение исследовалось достаточно подробно [1–6]. Вместе с тем ряд свойств уравнений (1) остается недостаточно изученным. Например, как указывалось в [4], эти уравнения могут рассматриваться как обобщения квазилинейных уравнений первого порядка типа простой волны, но прямой связи между этими уравнениями и (1) указано не было. В работах [9–14] был предложен метод построения волновых уравнений достаточно общего вида – на основе установления их связи с квазилинейными уравнениями первого порядка (КЛУ1). Решения волновых уравнений второго порядка, являющиеся одновременно и решениями КЛУ1, в этих работах были названы для краткости ривертонами. Как оказывается, этот подход может быть распространен и на уравнения ОХЗ.

Целью данной работы является задача установления связи между ОХЗ и КЛУ1 и получение общего алгоритма для вычисления точных решений этих уравнений, опирающегося на метод ривертонов.

1. Многомерные автономные квазилинейные уравнения первого порядка

Рассмотрим системы квазилинейных уравнений первого порядка следующего вида:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = A_0(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial t},\ \ \frac{\partial\phi}{\partial z^{\alpha}} = A_{\alpha}(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial t},\ \ \alpha = 1,2,\ \ z^1 = y,\ \ z^2 = z. \qquad (2)$$

Решение этой системы уравнений находится с помощью метода характеристик [9]. Общий вид решений, которые будем далее называть ривертонами, можно представить в следующей форме:

$$H(\phi,\xi) = 0, \qquad (3)$$

где $H(\phi,\xi)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Введены обозначения:

$$\xi = t + A_0(\phi)x + A_1(\phi)y + A_2(\phi)z. \qquad (4)$$

Соотношение (3) является неявным заданием решений уравнений (2) относительно функции $\phi(x,y,z,t)$. Поскольку функция $H(\phi,\xi)$ зависит только от одной переменной ξ, содержащей координаты и время, то такие решения будем называть однопараметрическими.

Основной смысл для рассматривания таких систем уравнений состоит в том, что решения (2) являются также и решениями некоторых автономных нелинейных уравнений второго порядка [9, 12, 13]. Дифференцируя уравнения (2) с производными по y,z, по соответствующим переменным и складывая результаты, приходим к следующему уравнению:

$$\Delta_{\perp}\phi = \sum_{\alpha=1,2}{}' \left(A_{\alpha}(\phi)\frac{\partial}{\partial t}\phi_{,\alpha} + A_{\alpha}(\phi)\frac{\partial\phi}{\partial t}\phi_{,\alpha} \right), \ \ \phi_{,\alpha} = \frac{\partial\phi}{\partial z^{\alpha}}.$$

Заменяя в этом уравнении $\phi_{,\alpha}$ с помощью соотношений (2) , приходим к уравнению

$$\Delta_{\perp}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2 \phi_t \right), \ \ |A|^2 = A_1^2(\phi) + A_2^2(\phi). \tag{5}$$

Заметим, что в последнее уравнение производные по x не входят, но производная ϕ_t при этом связана с производной ϕ_x с помощью первого уравнения (2). Это важно для дальнейших построений.

2. Переход к уравнениям Хохлова – Заболотской

Уравнение (5) можно привести к стандартному виду обобщенного уравнения ОХЗ, используя первое уравнение системы (2). Воспользуемся для этого простым тождеством:

$$|A|^2 \phi_t = (|A(\phi)|^2 - A_0(\phi))\phi_t + A_0(\phi)\phi_t = (|A|^2 - A_0(\phi))\phi_t + \phi_x. \tag{6}$$

Подставляя последнее соотношение в уравнение (5), приходим к уравнению ОХЗ в следующем виде:

$$\Delta_{\perp}\phi = \frac{\partial}{\partial t}\left((|A|^2 - A_0)\phi_t + \phi_x \right). \tag{7}$$

Это уравнение совпадает с (1) в случае простого равенства:

$$F = A_0(\phi) - |A(\phi)|^2 = A_0(\phi) - A_1^2(\phi) - A_2^2(\phi). \tag{8}$$

Таким образом, для заданной функции $F(\phi)$ существует множество решений уравнения (1), соответствующих произвольному выбору функций $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$. При этом вид функции $A_0(\phi)$ определяется соотношением

$$A_0 = F(\phi) + |A(\phi)|^2 = F(\phi) + A_1^2(\phi) + A_2^2(\phi). \tag{9}$$

Соответствующие неявные решения (3)–(4) без ограничения общности можно записать в таком виде:

$$\phi = h(\xi), \ \ \xi = t + (F(\phi) + |A(\phi)|^2)x + A_1(\phi)y + A_2(\phi)z, \tag{10}$$

где $h(\xi)$ – дифференцируемая функция, определяющаяся начальными и граничными условиями задачи.

3. Общие свойства решений

Основным свойством ривертонов является то, что их фронты представляют собой плоскости в трехмерном пространстве. Этот факт следует из общей формы системы квазилинейных уравнений первого порядка (2). Фронт волны можно определить как изоповерхность функции $\phi(x,y,z,t)$ в пространстве в конкретный момент времени t. Обозначим через ϕ_0 значение функции $\phi(x,y,z,t)$ на фронте волны. Тогда форма фронта определяется уравнением

$$\phi(x,y,z,t)=\phi_0=\text{const}.$$

Исходя из формы уравнений (2), сразу находим, что вектор $N=\left(A_0(\phi),A_1(\phi),A_2(\phi)\right)$ обладает следующими свойствами. Во-первых, этот вектор всюду ортогонален фронту, поскольку он коллинеарен градиенту функции ϕ:

$$A=\frac{1}{\phi_t}\nabla\phi.$$

Во-вторых, поскольку этот вектор зависит только от функции ϕ, то он имеет одинаковое направление вдоль всего фронта. Отсюда можно сделать вывод, что фронт $\phi=\phi_0$ волны представляет собой плоскость в трехмерном пространстве с направляющим вектором $N_0=\left(A_0(\phi_0),A_1(\phi_0),A_2(\phi_0)\right)$. Вместе с тем направляющий вектор плоскости фронта волны зависит от ϕ_0 и меняется в пространстве и времени. При этом плоскости фронтов для различных значений ϕ_0 могут пересекаться. Это означает, что решения (10) становятся многозначными, это также следует из общего вида неявного решения (10). Поскольку положение плоскости фронта определяется только одним параметром – значением ϕ на фронте, то каждое общее решение (10) определяется одной базовой кривой в трехмерном пространстве, к которой фронты будут ортогональны. Следуя [9], приведем основные элементы вычисления структуры областей однозначности и многозначности решений.

Введем обозначения:

$$R=|A|,\quad |A|^2=\sum_{\alpha=0}^{2}\left(A_\alpha(\phi)\right)^2. \tag{11}$$

Для описания геометрической структуры ривертонов введем параметр s вдоль кривой, пользуясь следующим определением:

$$s=\sum_{\alpha=0}^{2}n_\alpha(\phi)x_\alpha,$$

где $n_\alpha(\phi)=A_\alpha(\phi)/R(\phi)$ – компоненты единичного векторного поля $n(\phi)$ всюду коллинеарного A.

Тогда (10) можно записать в следующем виде:

$$t+R(\phi)s=g(\phi), \tag{12}$$

где $g(\phi)$ – функция, обратная к $h(\xi)$. Сворачивая (2) с компонентами поля $n(\phi)$, эти уравнения можно записать в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{2} n_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} = R(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Это квазилинейное уравнение имеет характеристики, которые вычисляются из решения системы уравнений:

$$\frac{dx_\alpha}{ds} = n_\alpha(\phi), \ \alpha = 0,\ldots,2,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = R(\phi)\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{13}$$

Последнее уравнение имеет общим решением соотношение (12).

Первая часть этой системы определяет кривую в пространстве, вдоль которой распространяется волна и к которой ее фронт всюду ортогонален 1. Эта кривая и называется базовой (рис. 1).

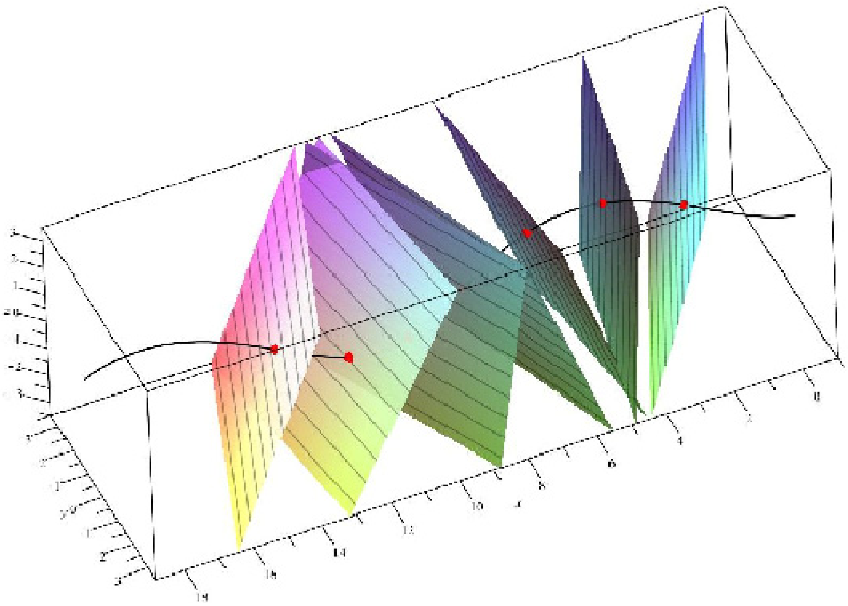


Рис. 1. Пример базовой кривой и положение плоских фронтов вдоль нее

Для того чтобы связать базовую кривую с начальными условиями, удобно перейти от параметра s к значениям самой функции ϕ, которые также параметризуют точки базовой кривой. Из (12) для каждого фиксированного значения t имеем

$$\frac{ds}{d\phi} = \frac{R(\phi)g'(\phi) - R'(\phi)\big(g(\phi) - t\big)}{R(\phi)}. \tag{14}$$

В результате уравнения кривой примут такой вид:

$$\frac{dx_\alpha}{d\phi} = A_\alpha(\phi)\frac{g'(\phi)R(\phi) - \big(g(\phi) - t\big)R'(\phi)}{R^3(\phi)}, \ \alpha = 1,\ldots,n. \tag{15}$$

Интегрируя это уравнение, приходим к соотношениям, определяющим явный вид точек кривой в заданный момент времени t:

$$x_\alpha = S_\alpha(\phi) + tV_\alpha(\phi) + x_\alpha^{(0)}, \qquad (16)$$

где $x_\alpha^{(0)}$ – постоянные интегрирования и введены обозначения:

$$S_\alpha(\phi) = \int A_\alpha(\phi)\frac{g'(\phi)R(\phi) - g(\phi)R'(\phi)}{R^3(\phi)}d\phi, \quad V_\alpha(\phi) = \int A_\alpha(\phi)\frac{R'(\phi)}{R^3(\phi)}d\phi,$$

Эти соотношения определяют в каждый момент времени геометрическую структуру базовой кривой исходя из функциональной формы компонентов поля $A(\phi)$ и функции $g(\phi)$ (или $h(\xi)$), которые связаны с начальными условиями. Отсюда, в частности, следует, что базовая кривая не меняет своей формы со временем, если только $R'(\phi) = 0$. В противном случае со временем базовая кривая меняется в соответствии с (16).

Установим, какая информация требуется для того, чтобы определить геометрическую структуру ривертона, исходя из начальных и граничных условий. Введем обозначения:

$$\Phi_0(x) = \phi(x,0,0,0), \quad \Phi_1(y) = \phi(0,y,0,0), \quad \Phi_2(z) = \phi(0,0,z,0). \qquad (17)$$

Функции $\Phi_\alpha(r)$ – функции одного аргумента r, которые представляют собой изменение $\phi(x,t)$ вдоль координатной прямой с индексом α. Обращая функции (17), получаем параметризацию значений координат через значения функции ϕ на данной оси в нулевой момент времени:

$$x = X(\phi), \quad y = Y(\phi), \quad z = Z(\phi),$$

где $X(\phi)$, $Y(\phi)$, $Z(\phi)$ – функции, обратные функциям $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(y)$, $\Phi_2(z)$ соответственно. Тогда уравнение (10) на осях координат при $t = 0$ принимает такой вид:

$$A_0(\phi) = \frac{g(\phi)}{X(\phi)}, \quad A_1(\phi) = \frac{g(\phi)}{Y(\phi)}, \quad A_2(\phi) = \frac{g(\phi)}{Z(\phi)}. \qquad (18)$$

Для описания изменений со временем необходимо также знать функцию $g(\phi)$. Поскольку в начале координат $s = 0$, то в соответствии с (12) функция $g(\phi)$ вычисляется из условия

$$t = g(\phi(0,0,0,t)), \text{ или } \phi(0,0,0,t) = h(t).$$

Таким образом, функциональный вид компонентов поля $A(\phi)$ и вид функций $h(t)$ и $g(\phi)$ определяются в начальный момент времени распределением поля $\phi(x,0)$ вдоль координатных осей и заданным изменением $phi(0,0,0,t)$ в начале координат.

4. Решения классического уравнения Хохлова – Заболотской

Как указывалось во введении, классическое уравнение Хохлова – Заболотской соответствует выбору $F(\phi)=\phi$. Это означает, что соотношение (9) примет такой вид:

$$A_0=\phi+|A(\phi)|^2=F(\phi)+A_1^2(\phi)+A_2^2(\phi). \quad (19)$$

При этом функции $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$ остаются произвольными дифференцируемыми функциями. Отсюда следует, что совокупность соотношений (10), которые теперь имеют вид

$$g(\phi)=t+\left(\phi+|A(\phi)|^2\right)x+A_1(\phi)y+A_2(\phi)z, \quad (20)$$

дают решение исходной задачи, зависящее от трех функциональных параметров $g(\phi)$ (или $h(\xi)$), а также $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$. При этом общая схема вычисления решений начальной задачи несколько меняется в связи с тем, что функция $A_0(\phi)$ теперь оказывается связанной с $A_1(\phi)$ и $A_2(\phi)$. Это означает, что распределение $\phi(x,y,z,t)$ вдоль одной из координатных осей и времени будет определяться остальными осями, для которых распределение будет произвольным. Таким образом, решения (20) образуют лишь некоторое подмножество множества всех решений классического уравнения ХЗ в форме ривертонов. Тем не менее это множество решений в классе ривертонов оказывается мощным.

5. Границы смены числа листов

Построенные решения уравнений ОХЗ представляют собой ривертоны, построенные в работах [9]. Наиболее важным элементом геометрии ривертонов являются области, в которых решения имеют строго определенное число листов. Границы этих областей могут быть вычислены в трехмерном пространстве как огибающие кривых, в точках которых отдельные листы (фронты) многозначных решений пересекаются. Общая схема вычисления огибающих в произвольной размерности n была представлена в [9]. Приведем здесь построение решений рассматриваемой задачи в размерности $n=3$ в варианте, несколько упрощающем построение области однозначности решений.

Уравнение для плоскостей, ортогональных базовой кривой в момент времени t, имеет вид решений (20), которые удобно переписать с таком виде:

$$yA_1(\phi)+zA_2(\phi)=g(\phi)-t-A_0(\phi)x=F(\phi,x,t). \quad (21)$$

В заданный момент времени параметром базовой кривой и плоскости фронта волны может служить само значение функции ϕ.

Рассмотрим две близких плоскости, соответствующие двум значениям параметров ϕ_1 и ϕ_2:

$$yA_1(\phi_1)+zA_2(\phi_1)=F(\phi_1,x,t), \quad (22)$$

$$yA_1(\phi_2)+zA_2(\phi_2)=F(\phi_2,x,t). \quad (23)$$

Эти две плоскости пересекаются по некоторой прямой, координаты которой можно вычислить, решая пару уравнений (22) относительно y и z. Эти решения можно записать в таком виде:

$$y = \frac{P_2(\phi_1, x, t) - P_2(\phi_2, x, t)}{D(\phi_1) - D(\phi_2)}, \quad z = \frac{P_1(\phi_1, x, t) - P_1(\phi_2, x, t)}{D^{-1}(\phi_1) - D^{-1}(\phi_2)}, \tag{24}$$

где

$$D(\phi) = \frac{A_1(\phi)}{A_2(\phi)}, \quad P_k(\phi, x, t) = \frac{F(\phi, x, t)}{A_k(\phi)}, \quad k = 1, 2.$$

Переходя к пределу $\phi_1 \to \phi_2 = \phi$ и раскрывая правую часть (24) по правилу Лопиталя, получаем параметрическое представление огибающей пересечения фронтов волны в следующем виде:

$$y = \frac{\partial P_2(\phi, x, t)}{\partial \phi}\left(\frac{\partial D}{\partial \phi}\right)^{-1} = Y_0(\phi) + Y_1(\phi)x + Y_2(\phi)t,$$

$$z = -D^2(\phi)\frac{\partial P_1(\phi, x, t)}{\partial \phi}\left(\frac{\partial D}{\partial \phi}\right)^{-1} = Z_0(\phi) + Z_1(\phi)x + Z_2(\phi)t. \tag{25}$$

Эти соотношения задают поверхность как совокупность точек, координаты y, z которых зависят от двух свободных параметров ϕ и x. Теперь, задавая непосредственно конкретные функции $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ и $g(\phi)$, можно вычислить границу области однозначности.

6. Простые решения

Область однозначности состоит из точек, в которых решение принимает строго одно значение. В остальных областях решение может принимать при заданных значениях x, y, z, t конечное или даже бесконечное число значений. С физической точки зрения невозможно прямым образом интерпретировать многозначные решения в областях многозначности. В такой ситуации переходят от многозначных решений к однозначным слабым решениям [15], которые на границе областей однозначности и смены числа листов решения, испытывают скачок. Такие решения называются ударными волнами. В многомерном случае, который соответствует рассматриваемым в данной работе решениям трехмерных квазилинейных уравнений первого порядка, такой подход требует дополнительного анализа, выходящего за рамки данной статьи. Поэтому в данной работе ограничимся лишь вычислениями геометрических особенностей решений в форме ривертонов. Но начнем с указания на существование среди всех решений типа ривертонов и глобально однозначных решений.

Для решений (20) глобально однозначные решения типа ривертонов существуют при специальном выборе свободных функциональных параметров $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ и $g(\phi)$, равных линейным функциям:

$$A_1 = a_1 = \text{const},\ \ A_2 = a_2 = \text{const},\ g = g_1\phi + g_0.$$

Соответствующее общее решение находится из уравнения

$$\left(\phi + a_1^2 + a_2^2\right)x + a_1 y + a_2 z + t = g_1\phi + g_0 \tag{26}$$

и имеет вид

$$\phi = \frac{1}{g_1 - x}\left(\left(a_1^2 + a_2^2\right)x + a_1 y + a_2 z + t - g_0\right). \tag{27}$$

Это решение глобально однозначно, но имеет сингулярность на плоскости $x = g_1$.

Более сложное решение типа ривертонов, для которого уже имеется область неоднозначности, соответствует такому выбору функций $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ и $g(\phi)$, при которых уравнение (20) будет квадратичным полиномом по ϕ. Общий вид таких функций следующий:

$$A_1 = a_1 + k_1\phi,\ \ A_2 = a_2 + k_2\phi,\ g = g_2\phi g_1\phi + g_0,$$

где $a_1,\ a_2, k_1, k_2, g_0, g_1, g_2$ – постоянные.

Решение в этом случае имеет такой вид:

$$\phi = \frac{1}{\alpha}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}\right), \tag{28}$$

где

$$\alpha = x\left(k_1^2 + k_2^2\right) - g_0,\ \ \gamma = \left(a_1^2 + a_2^2\right)x + a_1 y + a_2 z - g_0,$$

$$\beta = \left(1 + 2a_1k_1 + 2a_2k_2\right)x + k_1 y + k_2 z - g_1.$$

Это решение уже является вещественным только в области, где

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma >= 0.$$

В этой области имеются в общем случае два решения. Граница этой области, определяемая уравнением

$$D = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0,$$

представляет собой квадратичную поверхность в трехмерном пространстве. Эта поверхность отделяет область с двумя вещественными решениями от области, где вещественных решений нет. Эти решения сингулярны, как и предыдущее. Сингулярность располагается вдоль плоскости $x = g / \left(k_1^2 + k_2^2\right)$.

7. Границы области смены числа листов. Пример

Существуют два общих варианта базовых кривых, для которых построения области однозначности отличаются друг от друга. Первый вариант соответствует ситуации, когда базовая кривая является плоской, т.е. лежит в некоторой плоскости P. Такая ситуация, например, возникает, если функции $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ отличаются друг от друга постоянным множителем:

$$A_2(\phi) = kA_1(\phi).$$

Для плоской кривой область однозначности будет представлять собой криволинейный цилиндр с осью, перпендикулярной плоскости P, в которой лежит базовая кривая. При этом огибающая поверхность будет представлять собой криволинейный цилиндр. Такая ситуация сводится фактически к двумерному варианту построения областей однозначности [9]. Более интересным вариантом является ситуация, когда базовая кривая не укладывается в какую-либо плоскость. В этом случае построение поверхностей будет более сложным. В данной работе рассмотрим именно такой случай.

Выберем функции $A_1(\phi)$, $A_2(\phi)$ следующим образом:

$$A_1(\phi) = a\cos(\phi), \;\; A_2(\phi) = a\sin(\phi), \tag{29}$$

где a – некоторая положительная постоянная. Тогда

$$A_0 = \phi + a^2.$$

Выберем функцию $g(\phi)$ в таком виде:

$$g = b = \text{const}, \tag{30}$$

тогда

$$F(\phi, x, t) = b\phi - t - \left(\phi + a^2\right)x.$$

Соответственно получаем:

$$P_1 = -\frac{b - t + \left(\phi + a^2\right)x}{a\cos(\phi)}, \;\; P_2 = -\frac{b - t + \left(\phi + a^2\right)x}{a\sin(\phi)}, \;\; D = \tan^{-1}(\phi).$$

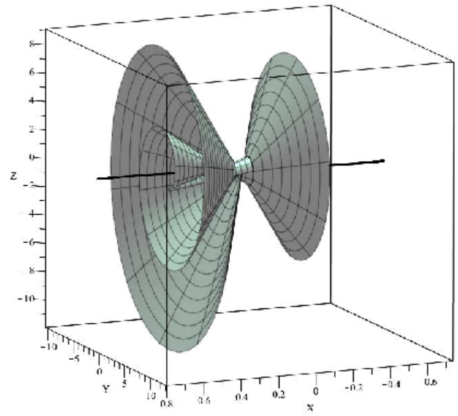
Уравнение границы области однозначности будет иметь такой вид:

$$y = a^{-1}\left(\left(b - t - \left(a^2 + \phi\right)x\right)\cos(\phi) + x\sin(\phi)\right),$$

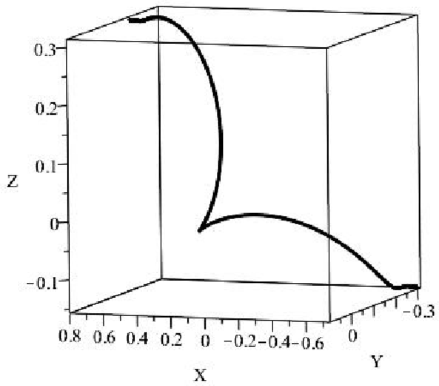
$$z = a^{-1}\left(\left(b - t - \left(a^2 + \phi\right)x\right)\sin(\phi) - x\cos(\phi)\right). \tag{31}$$

Поверхность, определяемая соотношениями (31), представлена на рис. 2 для двух моментов времени вместе с базовой кривой (выделена черным цветом), которая вычислялась в соответствии с (16). На рис. 3, 4 представлены сечения этих поверхностей для заданного значения x.

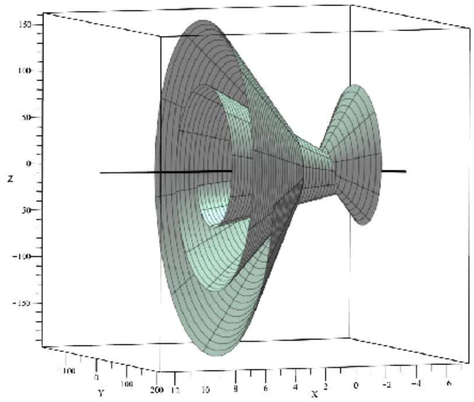
Приведенные на рис. 2,***б***,***г*** участки базовых кривых представляют собой криволинейные спирали и в силу малости радиусов этих спиралей на рис. 2,***а***,***в*** выглядят почти прямыми, которые указывают главное распространение волн.



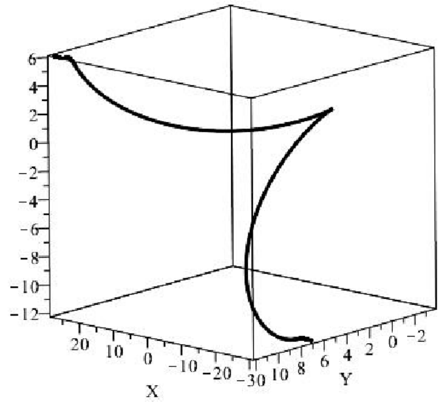
а)



б)

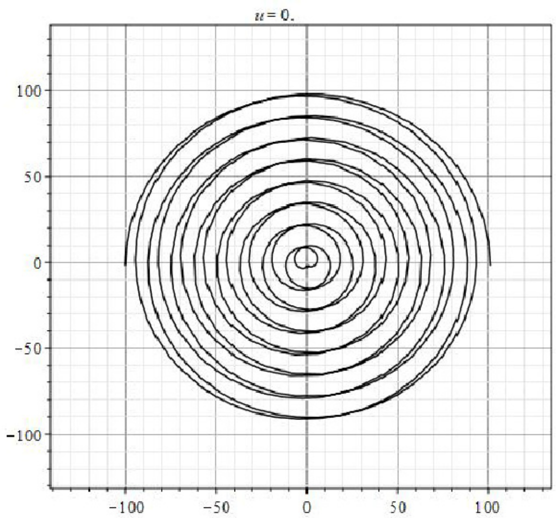


в)



г)

Рис. 2. Граница области смены числа листов (***а***, ***б***) и участки базовых кривых (***б***, ***г***), соответствующие (29) и (30), для $a = 0,5$; $b = 0,5$: ***а***, ***б***: $t = 0$; ***в***, ***г***: $t = 20$



а)

Рис. 3. Сечение поверхностей (рис. 2,***а***,***б***) для $x = 1$, $t = 0$

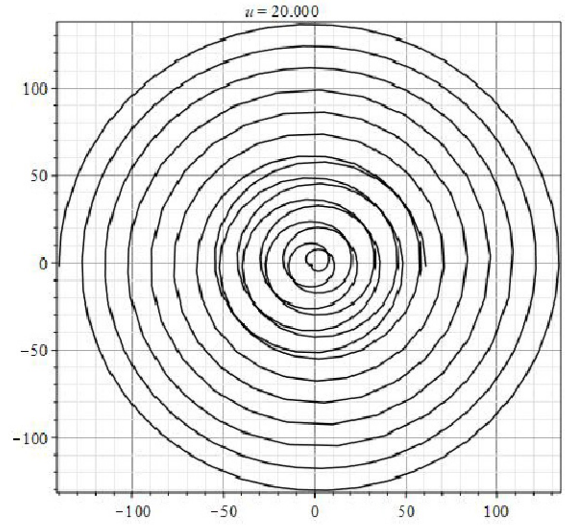


Рис. 4. Сечение поверхностей (рис. 2,***а***,***б***) для $x = 1$, $t = 20$

Заключение

Построенные решения обобщенного уравнения ХЗ (1) относятся к типу ривертонов и связаны с решениями квазилинейных уравнений первого порядка. Эти решения образуют множество, которое параметризуется тремя функциональными параметрами, что позволяет строить решения задач с заданными условиями на трех пространственных осях или двух пространственных и одной временной.

Множество таких решений не содержит всех возможных решений уравнений ХЗ, но дает способ строить точные решения, обладающие некоторыми заранее заданными характеристиками, например указанием базовой кривой, вдоль которой происходит распространение плоских фронтов нелинейного волнового процесса. Поскольку представленные здесь решения являются многозначными, то для прикладных задач они могут представлять базу для построения слабых решений, подобных ударным волнам. Однако эта задача выходит за рамки данной работы.

Список литературы

1. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акустический журнал. 1969. Т. 15, № 1. С. 40–47.
2. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М. : Наука, 1982. 174 с.
3. Маков Ю. Н. Об универсальном автомодельном решении уравнения Хохлова – Заболотской для волн с ударными фронтами // Акустический журнал. 1997. Т. 43, № 6. С. 828–833.
4. Руденко О. В. К 40-летию уравнения Хохлова – Заболотской // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 452–462.
5. Руденко О. В. «Экзотические» модели физики интенсивных волн: линеаризуемые уравнения, точно решаемые задачи и неаналитические нелинейности // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 3. С. 7–34.

6. Маков Ю. Н. Локализованные волновые структуры, определяемые точными решениями уравнения Хохлова – Заболотской // Акустический журнал. 2019. Т. 65, № 3. С. 291–297.
7. Lin C., Reissner E., Tsien H. S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid // Journal of Mathematics and Physics. 1948. Vol. 27, № 3. P. 220–231.
8. Чигур О. И. Точные сингулярные решения уравнения Хохлова – Заболотской – Кузнецова // Ученые записки Физического факультета Московского университета. 2018. № 4. С. 1840602-1–5.
9. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174, № 2. С. 236–246.
10. Журавлев В. М. Опрокидывающиеся электромагнитные волны в средах с сильной нелинейностью // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 3. С. 117–135.
11. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. № 4. С. 56–67.
12. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 186, № 3. С. 371–385.
13. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные уравнения Клейна – Гордона и ривертоны // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 197, № 3. С. 356–370.
14. Журавлев В. М. Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок. Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2020. 182 с.
15. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И., Чугайнова А. П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений. М. : МИАН, 2011. 122 с.

References

1. Zabolotskaya E.A., Khokhlov R.V. Quasi-plane waves in nonlinear acoustics of limited beams. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 1969;15(1):40–47. (In Russ.)
2. Bakhvalov N.S., Zhileykin Ya.M., Zabolotskaya E.A. *Nelineynaya teoriya zvukovykh puchkov = Nonlinear theory of sound beams.* Moscow: Nauka, 1982:174. (In Russ.)
3. Makov Yu.N. On the universal self-similar solution of the Khokhlov–Zabolotskaya equation for waves with shock fronts. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 1997;43(6):828–833. (In Russ.)
4. Rudenko O.V. To the 40^{th} anniversary of the Khokhlov–Zabolotskaya equation. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal*. 2010;56(4):452–462. (In Russ.)
5. Rudenko O.V. "Exotic" models of high-intensity wave physics: linearizable equations, exactly solvable problems and non-analitic nonlinearities. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika = University proceedings. Applied nonlinear dynamics.* 2018;26(3):7–34. (In Russ.)
6. Makov Yu.N. Localized wave structures determined by exact solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya equations. *Akusticheskiy zhurnal = Acoustic journal.* 2019;65(3):291–297. (In Russ.)
7. Lin S., Reissner E., Tsien H.S. On two-dimensional non-steady motion of a slender body in a compressible fluid. *Journal of Mathematics and Physics*. 1948;27(3):220–231.
8. Chigur O.I. Exact singular solutions of the Khokhlov–Zabolotskaya–Kuznetsov equation. *Uchenye zapiski Fizicheskogo fakul'teta Moskovskogo universiteta = Proceedings of the faculty of physics of Moscow University*. 2018;(4):1840602-1–5. (In Russ.)

9. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations with multivalued solutions. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2013;174(2):236–246. (In Russ.)
10. Zhuravlev V.M. Breaking electromagnetic waves in media with strong nonlinearity. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2013;(3):117–135. (In Russ.)
11. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations and complex quasilinear equations of the first order. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2013;(4):56–67. (In Russ.)
12. Zhuravlev V.M. Multidimensional quasilinear equations of the first order and multivalued solutions of equations of hyperbolic and elliptic types. *Teo-reticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2016;186(3):371–385. (In Russ.)
13. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear Klein–Gordon equations and rivertons. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2018;197(3):356–370. (In Russ.)
14. Zhuravlev V.M. *Nelineynye integriruemye modeli fizicheskikh protsessov. Metod funktsional'nykh podstanovok = Nonlinear integrable models of physical processes. Functional substitution method*. Ul'yanovsk: Izd-vo UlGU, 2020:182. (In Russ.)
15. Kulikovskiy A.G., Sveshnikova E.I., Chugaynova A.P. *Matematicheskie metody izucheniya razryvnykh resheniy nelineynykh giperbolicheskikh sistem uravneniy = Mathematical methods for studying discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic systems of equations*. Moscow: MIAN, 2011:122. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник лаборатории гравитации, космологии и астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет (Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, 4/5)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, researcher of the laboratory of gravity, cosmology and astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University (4/5 Lenina square, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 29.12.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 07.02.2024

Принята к публикации / Accepted 26.02.2024