УДК 530.182, 537.86, 51-7
doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-11

Нелинейные модели волновых процессов в размерности (1 + 1) и квазилинейные уравнения первого порядка

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический университет, Ульяновск, Россия
zhvictorm@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается связь моделей нелинейных волновых процессов в различных одномерных физических системах, таких как нелинейные двухпроводные линии, с квазилинейными уравнениями первого порядка. Устанавливаемая в работе связь позволяет получать точные решения большого класса нелинейных волновых уравнений второго порядка, для которых можно ставить одно непроизвольное начальное или граничное условие. Такого типа уравнения и их решения играют важную роль во многих задачах электродинамики и акустики. *Материалы и методы.* Основным методом, использующимся в работе, является метод характеристик для построения решений квазилинейных уравнений первого порядка. Их связь с нелинейными волновыми уравнениями второго порядка устанавливается в форме простых дифференциальных соотношений. *Результаты.* Представленная классификация нелинейных волновых уравнений второго порядка опирается на классификацию квазилинейных уравнений первого порядка по функциональному виду коэффициентов этих уравнений. Приведены точные решения рассматриваемых уравнений, в том числе и начальной задачи с одним произвольным начальным условием. Предложенный подход применяется к выводу частично интегрируемых уравнений нелинейных двухпроводных линий, связанных с квазилинейными уравнениями первого порядка. Приведены наиболее интересные с точки зрения практического применения типы нелинейных двухпроводных линий с вольт-амперными и вольт-фарадными характеристиками их погонных элементов. *Выводы.* Развитый подход позволяет строить точные решения множества волновых нелинейных уравнений, опираясь на точные решения квазилинейных уравнений первого порядка.

Ключевые слова: нелинейные волновые уравнения, квазилинейные уравнения первого порядка, нелинейные двухпроводные линии, метод характеристик

Для цитирования: Журавлев В. М. Нелинейные модели волновых процессов в размерности (1 + 1) и квазилинейные уравнения первого порядка // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 143–158. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-11

Nonlinear models of wave processes in the dimension (1 + 1) and first order quasilinear equations

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, Russia
zhvictorm@gmail.com

Abstract. *Background.* The study considers the connection of models of nonlinear wave processes in various one-dimensional physical systems, such as nonlinear two-wire lines, with first order quasilinear equations. The relation established in this work makes it possible to obtain exact solutions of a large class of nonlinear wave equations of the second order, for which one arbitrary initial or boundary condition can be set. Equations of this type and their solutions play an important role in many problems of electrodynamics and acoustics. *Materials and methods.* The main method used in the work is the method of characteristics for constructing solutions of first order quasilinear equations. Their connection with nonlinear wave equations of the second order is established in the form of simple differential relations. *Results.* The study presents a classification of second order nonlinear wave equations based on the classification of first-order quasilinear equations according to the functional form of the coefficients of these equations. Exact solutions of the equations under consideration, including the initial problem with one arbitrary initial condition, are given. The proposed approach is applied to the derivation of partially integrable equations of non-linear two-wire lines associated with first order quasilinear equations. The most interesting types of non-linear two-wire lines with volt-ampere and capacitance-voltage characteristics of their linear elements are given from the point of view of practical application. *Conclusions.* The developed approach makes it possible to construct exact solutions of a set of wave nonlinear equations based on exact solutions of first order quasilinear equations.

Keywords: nonlinear wave equations, first order quasilinear equations, nonlinear two-wire lines, method of characteristics

For citation: Zhuravlev V.M. Nonlinear models of wave processes in the dimension (1 + 1) and first order quasilinear equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):143–158. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2022-3-11

Введение

Нелинейные автономные волновые уравнения играют большую роль в различных прикладных задачах физики и радиофизики. В частности, модели двухпроводных линий с нелинейными погонными параметрами тесно связаны с нелинейными автономными уравнениями второго порядка. Такие модели применяются и в радиофизике при описании нелинейных явлений в линиях передачи сигналов, и в биофизике [1] для описания динамики импульсов в нервном волокне и биологических мембранах. Вместе с тем большинство уравнений этого типа не интегрируются точно, что приводит к необходимости применять численные методы анализа решений. Тем не менее существует достаточно богатый класс нелинейных волновых уравнений второго порядка, которые допускают точные решения, поскольку оказываются связанными с квазилинейными уравнениями первого порядка. Это относится как к одномерным [2] так и многомерным [3–6] волновым уравнениям. В отличие от многомерного случая, связь между квазилинейными уравнениями первого порядка и волновыми уравнениями второго порядка может быть расширена. Описанию именно этой возможности посвящена данная работа.

В настоящей работе рассматривается общая задача вычисления формы нелинейных автономных волновых уравнений второго порядка в размерности (1 + 1) исходя из автономных же квазилинейных уравнений первого порядка более общего вида, чем в работе [2]. В работе приводятся общие формулы, позволяющие строить различные типы нелинейных волновых уравнений типа Д’Аламбера и телеграфного уравнения с произвольными функциональными коэффициентами. Приводится метод построения точных решений этих уравнений и ряд частных примеров. Также уделено внимание вычислению частично интегрируемых нелинейных моделей типа двухпроводной линии и приведены некоторые примеры таких линий.

1. Автономные квазилинейные уравнения первого порядка и волновые уравнения

Рассмотрим квазилинейное уравнение первого порядка следующего вида:

$$\phi_\zeta = A(\phi)\phi_\tau + B(\phi), \tag{1}$$

где $A(\phi)$ и $B(\phi)$ – некоторые дифференцируемые функции ϕ. Решение этого уравнения находится стандартным образом с помощью метода характеристик, уравнения которых имеют следующий вид:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\frac{1}{A(\phi)}, \ \frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{B(\phi)}{A(\phi)}.$$

Из второго уравнения находим

$$\int_0^\phi \frac{A(s)}{B(s)} ds = -\tau - J, \tag{2}$$

где J – интеграл движения.

Решая формально это уравнение относительно ϕ, находим

$$\phi = F(J + \tau), \tag{3}$$

где $F(s)$ – функция, обратная интегралу слева.

Уравнение характеристик теперь будет находиться из следующего соотношения:

$$\zeta = \zeta_0(J) - \int_0^\tau \frac{dt}{A(F(J+t))}, \tag{4}$$

здесь $\zeta_0(J)$ – произвольная дифференцируемая функция интеграла вдоль характеристик. Из последнего соотношения вычисляется интеграл движения $J = J(\zeta, \tau, \zeta_0)$ и подставляется в решение для ϕ, что и будет окончательным решением уравнения (1).

Покажем теперь, что полученные решения являются решениями и некоторых нелинейных волновых уравнений второго порядка. Для этого продифференцируем уравнение (1) по ζ почленно:

$$\phi_{\zeta\zeta} = A(\phi)\frac{\partial}{\partial\tau}\phi_\zeta + A'(\phi)\phi_\zeta\phi_\tau + B'(\phi)\phi_\zeta.$$

Заметим теперь везде в правой части этого уравнения ϕ_ζ правой частью исходного уравнения (1). После простых преобразований получаем следующее уравнение:

$$\phi_{\zeta\zeta}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(A^2(\phi)\phi_\tau\right)+\left(2A(\phi)B'(\phi)+A'(\phi)B(\phi)\right)\phi_\tau+B(\phi)B'(\phi). \quad (5)$$

Следует отметить, что в последнем уравнении $A(\phi)$ и $B(\phi)$ являются произвольными дифференцируемыми функциями. Таким образом, все решения уравнения (1) являются решениями последнего нелинейного уравнения второго порядка при произвольных дифференцируемых $A(\phi)$ и $B(\phi)$. Обратное неверно. В некоторых ситуациях, зная решения исходного уравнения (1), можно найти и другие решения последнего уравнения.

Заметим также, что уравнение (5) инвариантно относительно одновременной замены $A\to -A,\ B\to -B$, хотя исходное уравнение (1) не инвариантно относительно такой замены. Решение же уравнения (1) с измененными знаками A и B будет иметь тот же вид (3), (4), но с заменой $t\to -t$. Эти новые решения также будут решениями уравнения (5). При этом вид функций A, B и F не меняется. Таким образом, решениями (5) являются все функции

$$\phi_\pm=F\left(J_\pm+\tau\right),\ \ \zeta=\zeta_\pm\left(J_\pm\right)\mp\int_0^\tau\frac{dt}{A\left(F\left(J_\pm+t\right)\right)},$$

где $\phi_\pm$ являются решениями уравнений:

$$\phi_{\pm,\zeta}=\pm\left(A(\phi_\pm)\phi_{\pm,\tau}+B(\phi_\pm)\right). \quad (6)$$

2. Примеры частично интегрируемых уравнений

Приведем несколько интересных с точки зрения приложений вариантов моделей, которые являются частными случаями уравнений общего вида (5).

Вариант 1. Первый вариант относится к нелинейным уравнениям типа Клейна – Гордона. Такие уравнения соответствуют условию

$$2AB'+A'B=0, \quad (7)$$

при котором в уравнении отсутствует слагаемое с первой производной. Последнее условие интегрируется. В результате получаем:

$$A=\frac{1}{c}B^{-2}(\phi).$$

Соответственно уравнение примет такой вид:

$$\phi_{\zeta\zeta}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(B^{-4}(\phi)\phi_\tau\right)+B(\phi)B'(\phi). \quad (8)$$

При этом функция $B(u)$ может быть произвольной дифференцируемой функцией.

Вариант 2. Второй вариант соответствует телеграфным уравнениям при следующем условии:

$$2AB'+A'B=Q_0=\text{const}. \quad (9)$$

Последнее уравнение можно записать в таком виде:

$$\frac{d}{d\phi}\left(AB^2\right)=Q_0B. \qquad (10)$$

Для удобства сделаем замену, полагая:

$$B=\frac{d}{d\phi}P(\phi). \qquad (11)$$

Тогда уравнение (10) однократно интегрируется, в результате чего находим

$$A=\frac{Q_0P+C_1}{(P'(\phi))^2}. \qquad (12)$$

Соответственно уравнение (5) примет такой вид:

$$\phi_{\zeta\zeta}=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{(Q_0P+C_1)^2}{\left(P'(\phi)\right)^4}\phi_\tau\right)+Q_0\phi_\tau+\frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left(P'(\phi)\right)^2. \qquad (13)$$

Частным случаем этого варианта является выбор $A=c_0^{-1}=\mathrm{const}$. В этом случае для $P(\phi)$ имеем уравнение

$$P'(\phi)=\varepsilon\sqrt{c_0}\sqrt{Q_0P+C_1},\ \ \varepsilon=\pm1,$$

которое интегрируется, в результате чего получаем

$$\sqrt{Q_0P+C_1}=\varepsilon\frac{\sqrt{c_0}}{2}\phi+C_2,$$

отсюда находим

$$P=\frac{1}{Q_0}\left(\varepsilon\frac{\sqrt{c_0}}{2}\phi+C_2\right)^2-\frac{C_1}{Q_0},\ \ B=P'(\phi)=\varepsilon\frac{\sqrt{c_0}}{Q_0}\left(\varepsilon\frac{\sqrt{c_0}}{2}\phi+C_2\right).$$

В этом случае уравнение (13) превращается в линейное телеграфное уравнение:

$$\phi_{\zeta\zeta}=\frac{1}{c_0^2}\phi_{\tau\tau}+Q_0\phi_\tau+\frac{c_0}{2Q_0^2}\left(\varepsilon\frac{\sqrt{c_0}}{2}\phi+C_2\right), \qquad (14)$$

решения которого совпадают с решениями линейного уравнения первого порядка:

$$\phi_\zeta=\frac{1}{c_0}\phi_\tau+\frac{c_0}{2Q_0}\phi+\varepsilon\frac{\sqrt{c_0}C_2}{Q_0}. \qquad (15)$$

Отдельно рассмотрим варианты $A=A_0=\mathrm{const}$ и $B=B_0=\mathrm{const}$.

Вариант 3. В случае $B=B_0=\mathrm{const}$ уравнение (5) для ϕ примет такой вид:

$$\phi_{\zeta\zeta} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(A^2(\phi)\phi_\tau\right) + A'(\phi)B_0\phi_\tau. \tag{16}$$

Это уравнение представляет собой вариант нелинейного телеграфного уравнения с одной произвольной функцией $A(\phi)$.

Вариант 4. В случае $A = 1/v_0 = \text{const}$ уравнение (5) можно записать в следующей форме:

$$\phi_{\zeta\zeta} = \frac{1}{v_0^2}\phi_{\tau\tau} + \frac{2}{v_0}B'(\phi)\phi_\tau + B(\phi)B'(\phi). \tag{17}$$

В случае $B = B_0 e^{k\phi}$ получаем нелинейное телеграфное уравнение с экспоненциальной нелинейностью:

$$\phi_{\zeta\zeta} = \frac{1}{v_0^2}\phi_{\tau\tau} + \frac{2k}{v_0}B_0 e^{k\phi}\phi_\tau + kB_0^2 e^{2k\phi}, \tag{18}$$

которое частично интегрируется. Это уравнение можно назвать телеграфным уравнением Лиувилля. Аналогично, полагая $B = B_0\cos(\phi)$, приходим к уравнению, обобщающему уравнение Sin-Gordon:

$$\phi_{\zeta\zeta} = \frac{1}{v_0^2}\phi_{\tau\tau} + \frac{2}{v_0}B_0\sin(\phi)\phi_\tau + \frac{1}{2}B_0^2\sin 2\phi, \tag{19}$$

которое можно назвать телеграфным уравнением Sin-Gordon.

Решениями $\phi^{\pm}(\zeta,\tau)$ уравнения (18) являются решения квазилинейных уравнений (1), имеющих вид

$$\phi_\zeta^{\pm} = \pm\frac{1}{v_0}\phi_\tau^{\pm} \pm B_0 e^{k\phi^{\pm}}. \tag{20}$$

Решения этих уравнений выглядят следующим образом:

$$e^{-q\Phi^{\pm}} = q\tau + J(\zeta \pm v_0\tau),\ \ q = kv_0B_0,\ \ \Phi^{\pm} = \phi^{\pm}(\zeta,\tau)/(v_0B_0),$$

где $J(\xi)$ – произвольная функция бегущей переменной $\xi = \zeta \pm v_0\tau$.

Аналогичным образом можно найти решения и уравнения (19).

3. Уравнения двухпроводной линии

Уравнения двухпроводной линии, погонный элемент которой приведен на рис. 1, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + IR + L\frac{\partial I}{\partial t} = 0,\ \ \frac{\partial I}{\partial x} + J(U) + C(U)\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \tag{21}$$

здесь $U(x,t)$ – напряжение в точке x линии в момент времени t; $I(x,t)$ – соответствующий ток; R – погонное сопротивление линии; $C(U)$ и L – погонные емкость и индуктивность линии. Для общности мы будем полагать, что погонная емкость $C(U)$ является функцией напряжения. Функция $J(U)$ – ток утечки, зависящий нелинейным образом от напряжения в данной точке линии. Исключая из системы ток, приходим к уравнению для напряжения вдоль линии:

$$U_{xx} - \frac{\partial}{\partial t}\left(LC(U)U_t\right) - \left(RC(U) + LI'(U)\right)U_t - RJ(U) = 0. \quad (22)$$

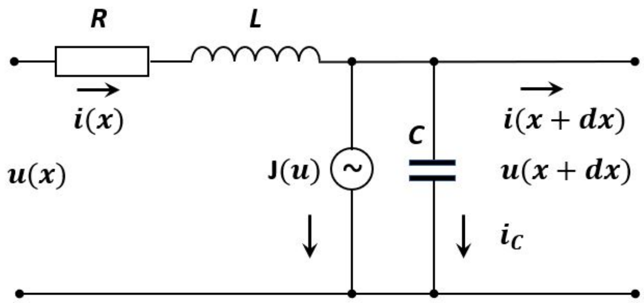

Рис. 1. Эквивалентная схема погонного элемента линии

Приведем уравнение (13) к безразмерному виду, полагая:

$$u = U / U_0, \;\; C = C_0 c(u), \;\; J = J_0 j(u),$$

$$\zeta = x / X_0, \;\; \tau = t / T_0,$$

здесь U_0, X_0, T_0, C_0, J_0 – масштабные размерные множители, а u, ζ, τ, $c(u)$, $j(u)$ – безразмерные переменные и функции.

Уравнение в безразмерных переменных выглядит так:

$$u_{\zeta\zeta} - \frac{LC_0X_0^2}{T_0^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(c(u)u_\tau\right) - \frac{X_0^2}{T_0}\left(RC_0c(u) + LJ_0j'(u)\right)u_\tau - \frac{RX_0^2J_0}{U_0}j(u) = 0.$$

Выберем постоянные X_0 и T_0 следующим образом:

$$X_0 = \frac{T_0}{\sqrt{LC_0}}, \;\; T_0 = \frac{C_0U_0}{J_0}.$$

Тогда уравнение в безразмерных переменных примет вид

$$u_{\zeta\zeta} - \frac{\partial}{\partial\tau}\left(c(u)u_\tau\right) - \left(\Lambda c(u) + j'(u)\right)u_\tau - \Lambda j(u) = 0, \quad (23)$$

где

$$\Lambda = \frac{C_0RU_0}{LJ_0}. \quad (24)$$

Параметр Λ является единственным безразмерным параметром линии.

4. Нелинейные двухпроводные линии с интегрируемой динамикой

Сравнивая уравнения (5) и (22), можно увидеть их сходство, причем эти уравнения содержат по два произвольных функциональных параметра. Уравнение (5) содержит две произвольные вспомогательные функции $A(\phi)$ и $B(\phi)$, а уравнение (22) – функции $C(u)$ и $I(u)$. Это позволяет найти условия, при которых уравнения (5) и (22) будут идентичны после замены $\phi \to u$. Смысл такой идентичности состоит в том, что динамика распространения волн в таких волноводах будет частично интегрируемой, т.е. достаточно предсказуемой. Это означает возможность строить решения, исходя из некоторых достаточно произвольных начальных или граничных условий.

Условия идентичности (5) и (22) сводятся к следующей системе уравнений:

$$A^2(u) = c(u), \quad B(u)B'(u) = \Lambda j(u),$$

$$2B'(u)A(u) + B(u)A'(u) = \Lambda c(u) + j'(u). \tag{25}$$

Уравнения (25) содержат четыре неизвестные функции. Это означает, что существует множество двухпроводных линий рассматриваемого типа, динамика которых описывается частично решениями квазилинейного уравнения (1).

Систему (25) удобнее преобразовать, делая формальную замену переменной $A(u)$:

$$A = B(u)S(u). \tag{26}$$

Подставляя это соотношение и используя первые два уравнения системы, приходим к следующему уравнению:

$$3B'BS + B^2S' = \Lambda B^2S^2 + \frac{1}{\Lambda}\frac{d}{du}(BB'). \tag{27}$$

Относительно функции S уравнение (27) представляет собой уравнение Риккати. Поэтому удобно строить решение этого уравнения относительно $S(u)$. Введем дополнительное обозначение: $Q = B^2$. Тогда уравнение (27) можно записать в такой форме:

$$S' - \mu S^2 + \frac{3}{2}\frac{Q'}{Q}S - \frac{1}{2\Lambda}\frac{Q''}{Q} = 0.$$

Делая теперь стандартную для уравнения Риккати замену

$$S = -\frac{1}{\Lambda}\frac{d}{du}\ln\Phi, \tag{28}$$

приходим к линейному уравнению следующего вида:

$$\Phi'' + \frac{3}{2}\frac{Q'}{Q}\Phi' + \frac{1}{2}\frac{Q''}{Q}\Phi = 0 \tag{29}$$

относительно функции $\Phi(u)$. Это уравнение сводится к уравнению Шредингера подстановкой:

$$\Phi = \Psi(u) Q^{-3/4}(u). \tag{30}$$

Для функции Φ уравнение имеет следующий вид:

$$\Psi'' + V(u)\Psi = 0, \tag{31}$$

где

$$V = \frac{3}{16}\left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{Q''}{Q}. \tag{32}$$

В новых обозначениях из (25) получаем следующую параметризацию безразмерных характеристик линии:

$$c = A^2(u) = \frac{Q(u)}{\Lambda^2}\left(\frac{d}{du}\ln\Phi(u)\right)^2, \; j = \frac{1}{\Lambda}B(u)B'(u) = \frac{Q'(u)}{2\Lambda}, \tag{33}$$

функциональный вид которых определяется одной произвольной дифференцируемой функцией $Q = Q(u)$.

5. Общая структура решений для напряжения в линии

Используя (26), левую часть соотношения (2) перепишем в следующем виде:

$$\int_0^u S(s)\,ds = -\frac{1}{\Lambda}\int_0^u \frac{d}{ds}\ln\Phi ds = -\frac{1}{\Lambda}\ln\left(\Phi(u)/\Phi(0)\right) = -\tau - J. \tag{34}$$

В результате (2) можно записать в таком виде:

$$\Phi(u) = \Phi(0)e^{\Lambda(\tau+J)}. \tag{35}$$

Соотношение (35) следует рассматривать как уравнение для вычисления $u(\zeta,\tau)$, в результате чего должны получить аналог соотношения (3):

$$u = s(t+J).$$

Если это решение вычислено, то из (4) после простых замен переменных для вычисления зависимости J от ζ и t получаем общее уравнение следующего вида:

$$\zeta = \zeta(J) + \frac{\Lambda}{\sqrt{Q_0}}\int_{t=s(J)}^{s(\tau+J)} \frac{\Phi(s)}{Q^{1/2}(s)\Phi'(s)R(s)}ds, \tag{36}$$

где

$$R(s) = \left.\frac{ds(r)}{dr}\right|_{r=s}.$$

6. Частные варианты двухпроводных линий

6.1. Экспоненциальная вольт-амперная характеристика

С точки зрения приложений интерес представляет ситуация, когда функция $Q(u)$ имеет вид экспоненты:

$$Q = Q_0 e^{ku}, \quad B = \sqrt{Q_0}\varepsilon_B e^{ku/2}, \quad \varepsilon_B = \pm 1,$$

с некоторыми постоянными вещественными Q_0 и k. Уравнение (31) для Φ в этом случае имеет вид

$$\Psi'' - \frac{k^2}{16}\Psi = 0.$$

отсюда находим:

$$\Psi = ae^{ku/4} + be^{-ku/4} \tag{37}$$

с произвольными постоянными a и b.

Функция S принимает такой вид:

$$S = -\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{d}{du}\ln\Psi - \frac{3}{4}k\right). \tag{38}$$

В результате для $c(u)$ и $j(u)$ из (33) находим:

$$j = \frac{kQ_0}{2\Lambda}e^{ku}, \tag{39}$$

$$c = A^2 = \frac{k^2}{16\Lambda^2}Q_0 e^{ku}\left(\frac{ae^{ku/4} - be^{-ku/4}}{ae^{ku/4} + be^{-ku/4}} - 3\right)^2. \tag{40}$$

Первое из этих соотношений определяет вольт-амперную характеристику нелинейного элемента, а второе – вольт-фарадную характеристику линии. Соответственно для отыскания решений уравнения необходимо вычислить функцию A:

$$A = \frac{k}{4\Lambda}\sqrt{Q_0}e^{ku/2}\left|\frac{ae^{ku/4} - be^{-ku/4}}{ae^{ku/4} + be^{-ku/4}} - 3\right|. \tag{41}$$

В случае $a = 0$ либо $b = 0$ соотношение для $c(u)$ примет упрощенный вид:

$$c = \frac{k^2}{2^\sigma}Q_0 e^{ku}, \tag{42}$$

где $\sigma = 2$ при $b = 0$ и $\sigma = 0$ при $a = 0$. В этом упрощенном варианте, полагая $k = 1/u_0$, волновое уравнение (22) приобретает вид

$$u_{\zeta\zeta} - \frac{\partial}{\partial\tau}\left(2^{-\sigma}e^u u_\tau\right) - \frac{2 + 2^\sigma}{2^{\sigma+1}}e^u u_\tau - \frac{1}{2}e^u = 0. \tag{43}$$

Уравнение такого типа может служить моделью для описания динамики электромагнитных импульсов в биологических мембранах. Согласно гипотезам [1], вольт-амперная характеристика биологической мембраны близка к вольт-амперной характеристике полупроводникового диода, которая имеет форму, аналогичную (39). Относительно же вольт-фарадной характеристики $c = c(u)$ обычно предполагается, что погонная емкость остается постоянной при прохождении импульса вдоль мембраны или нервного волокна. Но поскольку структура мембраны не является жесткой, можно предполагать, что появление локального напряжения на условных обкладках конденсатора мембраны может приводить к изменениям ее емкости. В этом случае модели с непостоянной вольт-фарадной характеристикой могут быть достаточно полезными при анализе электродинамики биологических мембран и нервного волокна в частности.

6.2. Степенная вольт-амперная характеристика

Еще одним полезным вариантом при анализе линий с непостоянными элементами $c(u)$ и $j(u)$ является выбор:

$$Q = Q_0 u^n, \;\; B = \sqrt{Q_0}\varepsilon_B u^{n/2}, \;\; \varepsilon_B = \pm 1, \tag{44}$$

где Q_0 и n – вещественные числа, отличные от нуля.

Функция V (32) будет иметь теперь вид

$$V = \frac{3}{16}\left(\frac{n}{u}\right)^2 - \frac{n(n-1)}{4}\frac{1}{u^2} = \frac{p}{u^2}, \;\; p = \frac{-n^2 + 4n}{16}.$$

Соответствующее уравнение (31) для Ψ можно записать в форме

$$\Psi'' + \frac{p}{u^2}\Psi = 0.$$

Общее решение этого уравнения для $n \neq 2$ таково:

$$\Psi = A_0 u^{n/4} + B_0 u^{-n/4+1}. \tag{45}$$

Отсюда вычисляем $j(u)$ и $c(u)$:

$$j = \frac{Q_0 n}{2\Lambda}u^{n-1}, \;\; c = \frac{Q_0}{16\Lambda^2}u^{n-2}\left(\frac{A_0 n + (4-n)B_0 u^{1-n/2}}{A_0 + B_0 u^{1-n/2}} - 3n\right)^2. \tag{46}$$

В случае $n = 2$ решение выглядит следующим образом:

$$\Psi = A_0 u^{1/2} + B_0 u^{1/2}\ln u, \tag{47}$$

тогда

$$j = \frac{Q_0}{\Lambda}u, \;\; c = \frac{Q_0}{\Lambda^2}\left(\frac{B_0(1-\ln(u)) - A_0}{A_0 + B_0 \ln(u)}\right)^2.$$

Существует два варианта: $A_0 = 0$ и $B_0 = 0$, для которых выражение для $c(u)$ упрощается.

Для $n \neq 2$ находим:

$$c = \frac{Q_0 (n-1)^2}{\Lambda^2} u^{n-2}, \quad A_0 = 0, \tag{48}$$

$$c = \frac{Q_0 n^2}{4\Lambda^2} u^{n-2}, \quad B_0 = 0. \tag{49}$$

Для $n = 2$ находим:

$$c = \frac{Q_0}{\Lambda^2}\left(\frac{(1-\ln(u))}{\ln(u)}\right)^2, \quad A_0 = 0, \tag{50}$$

$$c = \frac{Q_0}{\Lambda^2}, \quad B_0 = 0. \tag{51}$$

В последнем варианте приходим к линейной двухпроводной линии, в которой погонная емкость постоянна, а ток утечки линеен по напряжению.

Также интерес представляет и особый вариант $n = 4$. В этом случае

$$\Psi = A_0 u + B_0, \tag{52}$$

соответственно находим:

$$j = j = \frac{2Q_0}{\Lambda} u^3, \quad c = \frac{Q_0}{\Lambda^2} u^2 \left(\frac{2A_0 u + 3B_0}{A_0 u + B_0}\right)^2.$$

7. Решения для экспоненциальной линии

Используя (34), вычислим теперь решения для экспоненциальной линии. Пользуясь решением (37) и соотношением (30), находим

$$\left(ae^{ku/4} + be^{-ku/4}\right)e^{-3ku/4} = (a+b)e^{\Lambda(\tau+J)}. \tag{53}$$

Сделаем подстановку:

$$X = e^{ku/4},$$

тогда (53) сведется к биквадратному алгебраическому уравнению для X:

$$P(\tau+J)X^4 - aX^2 - b = 0, \quad P(\tau+J) = (a+b)e^{\Lambda(\tau+J)}. \tag{54}$$

Решения уравнения (54) относительно X^2 имеют вид

$$X^2 = e^{ku/2} = \frac{1}{2P(\tau+J)}\left(a \pm \sqrt{a^2 + 4P(\tau+J)b}\right). \tag{55}$$

Для вычисления интеграла движения теперь имеем соотношение (36). В случае редукции с $a = 0$ имеем следующее соотношение:

$$e^{-ku} = e^{\Lambda(\tau+J)}, \tag{56}$$

а в случае $b=0$ следующее соотношение:

$$e^{-ku/2} = e^{\Lambda(\tau+J)}. \tag{57}$$

В результате уравнения для вычисления J примут такой вид:

$$\zeta = \zeta_0(J) - \frac{8\varepsilon_B}{k\sqrt{Q_0}} e^{\Lambda J/2}\left(e^{\Lambda\tau/2} - e^{\Lambda\tau_0/2}\right),\ \ a=0; \tag{58}$$

$$\zeta = \zeta_0(J) - \frac{8\varepsilon_B}{k\sqrt{Q_0}} e^{\Lambda J}\left(e^{\Lambda\tau} - e^{\Lambda\tau_0}\right),\ \ b=0. \tag{59}$$

Приведем процедуру построения решений начальной задачи для экспоненциальной линии в случаях $a=0$ и $b=0$. Частные решения можно получать, задавая определенным образом функции $\zeta_0(J)$. В реальности эти функции определяются некоторыми начальными или граничными условиями. В качестве начальных условий в момент времени $\tau=\tau_0$ выберем соотношение

$$u(\zeta,0) = u_0(\zeta). \tag{60}$$

Тогда из (56) и (57), а также и (58) находим, что функция ζ_0 должна определяться из соотношений:

$$\zeta = \zeta_0\left(-\tau_0 - ku_0(\zeta)/\Lambda\right),\ \ a=0;$$

$$\zeta = \zeta_0\left(-\tau_0 - ku_0(\zeta)/(2\Lambda)\right),\ \ b=0.$$

Таким образом, функция $\zeta_0(J)$ с точностью до множителя и сдвига совпадает с функцией, обратной $u_0(J)$.

После вычисления функции $\zeta_0(J)$ решение начальной задачи вычисляется как решение алгебраических (трансцендентных) уравнений (58).

8. Решения для степенной линии

В случае степенной линии для исключения особенностей в выражениях перепишем соотношение (34) так:

$$\int_1^u S(s)ds = -\frac{1}{\Lambda}\int_1^u \frac{d}{ds}\ln\Phi ds = -\frac{1}{\Lambda}\ln\left(\Phi(u)/\Phi(1)\right) = -\tau - J, \tag{61}$$

отсюда

$$\Phi(u) = \Phi(1)e^{\Lambda(\tau+J)}. \tag{62}$$

Этот вариант выбора интервала интегрирования несколько меняет определение интеграла движения J. В результате для (44) получаем следующее уравнение для вычисления J:

$$\left(A_0 u^{n/4} + B_0 u^{-n/4+1}\right) u^{-3n/4} = \left(A_0 + B_0\right) e^{\Lambda(\tau+J)}. \tag{63}$$

Для произвольных n это алгебраическое уравнение относительно u не разрешается в радикалах.

Решения уравнения (63) можно получить в случае одной из редукций $A_0 = 0$ или $B_0 = 0$. Имеем:

$$\Psi = A_0 u^{n/4}, \quad B_0 = 0, \tag{64}$$

$$\Psi = B_0 u^{1-n/4}, \quad A_0 = 0. \tag{65}$$

В результате уравнение (63) примет следующий вид:

$$u = e^{-2\Lambda(\tau+J)/n}, \quad B_0 = 0,$$

$$u = e^{-\Lambda(\tau+J)/(n-1)}, \quad A_0 = 0,$$

тогда уравнение для J можно записать так:

$$\zeta = \zeta_0(J) - \frac{2\varepsilon_B \Lambda}{n\sqrt{Q_0}} \int_{\tau_0}^{\tau} u^{1-n/2} dt, \qquad B_0 = 0;$$

$$\zeta = \zeta_0(J) - \frac{\varepsilon_B \Lambda}{(n-1)\sqrt{Q_0}} \int_{\tau_0}^{\tau} u^{1-n/2} dt, \quad A_0 = 0.$$

Отсюда окончательно находим:

$$\zeta = \zeta_0(J) - \frac{\varepsilon_B}{2n\sqrt{Q_0}} e^{\gamma_B J}\left(e^{\gamma_B \tau} - e^{\gamma_B \tau_0}\right),$$

$$B_0 = 0, \quad \gamma_B = \frac{n-2}{n}\Lambda;$$

$$\zeta = \zeta_0(J) - \frac{\varepsilon_B}{2n\sqrt{Q_0}} e^{\gamma_A J}\left(e^{\gamma_A \tau} - e^{\gamma_A \tau_0}\right),$$

$$A_0 = 0, \quad \gamma_A = \frac{n-2}{2(n-1)}\Lambda.$$

Решение начальной задачи с условием (60) строится аналогично процедуре, рассмотренной для экспоненциальной линии.

Заключение

В работе исследованы некоторые общие типы нелинейных моделей волновых процессов в размерности (1 + 1), которые связаны с квазилинейными уравнениями первого порядка. Такие модели допускают точные решения распространения волн в одномерных средах, что может быть использовано для детального анализа поведения волн в конкретных прикладных задачах. Важным примером использования рассмотренных моделей на практике являются нелинейные двухпроводные линии с изменяющимися в зависимости от напряжения погонными параметрами – током утечки и погонной емкостью. В работе разобраны общие условия, при которых нелинейная двухпроводная линия описывается решениями квазилинейных уравнений первого порядка и рассмотрены некоторые частные примеры. Полученные результаты могут быть использованы при анализе различных нелинейных прикладных задач.

Список литературы

1. Скотт Э. Нелинейная наука. Рождение и развитие когерентных структур. М. : Физматлит. 2007. 560 с.
2. Журавлев В. М. Опрокидывающиеся электромагнитные волны в средах с сильной нелинейностью // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2013. № 3. С. 117–135.
3. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174, № 2. С. 236–246.
4. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения и комплексные квазилинейные уравнения первого порядка // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. № 4. С. 56–67.
5. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 186, № 3. С. 371–385.
6. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные уравнения Клейна – Гордона и ривертоны // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 197, № 3. С. 356–370.

References

1. Skott E. *Nelineynaya nauka. Rozhdenie i razvitie kogerentnykh struktur = Nonlinear Science. Birth and development of coherent structures*. Moscow: Fizmatlit. 2007:560. (In Russ.)
2. Zhuravlev V.M. Breaking electromagnetic waves in a strongly nonlinear medium. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2013;(3):117–135. (In Russ.)
3. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations with multivalued solutions. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2013;174(2):236–246. (In Russ.)
4. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations and complex first-order quasilinear equations. *Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2013;(4):56–67. (In Russ.)
5. Zhuravlev V.M. Multidimensional quasilinear equations of the first order and multi-valued solutions of equations of hyperbolic and elliptic types. *Teo-reticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2016;186(3):371–385. (In Russ.)
6. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear Klein–Gordon equations and rivertons. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics.* 2018;197(3):356–370. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, профессор, научный сотрудник лаборатории гравитации, космологии и астрофизики, Ульяновский государственный педагогический университет (Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, 4/5)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, researcher of the laboratory of gravity, cosmology and astrophysics, Ulyanovsk State Pedagogical University (4/5 Lenin square, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 02.06.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.07.2023

Принята к публикации / Accepted 21.08.2023