Письма в ЖЭТФ, том 87, вып. 5, с. 314 – 318 © 2008 г. 10 марта

Нелинейные уравнения, линеаризуемые с помощью обобщенных подстановок Коула-Хопфа, и точно интегрируемые модели одномерных течений сжимаемой жидкости

В. М. Журавлев[1], *Д. А. Зиновьев*

Ульяновский государственный университет, 432970 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 27 декабря 2007

После переработки 4 февраля 2008 г.

Рассмотрен новый метод построения нелинейных уравнений, которые линеаризуются с помощью подстановок, обобщающих подстановку Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса. На основе предложенного подхода строится метод анализа общей структуры решений и вычисления точных решений в задачах об одномерных течениях сжимаемой жидкости. Рассматриваются случаи идеальной и вязкой жидкостей. Проанализирована задача о динамике пылевидной материи нулевым давлением и газопылевой смеси.

PACS: 02.30.Ik, 47.40.–x

1. В теории нелинейных волновых процессов хорошо известным фактом является интегрируемость уравнения Бюргерса с помощью подстановки Коула-Хопфа (см., например, [1, 2]). В работе [3] метод подстановок Коула-Хопфа был распространен на класс эволюционных уравнений вида $u_t = u_n + f(u, u_1, \dots, u_{n-1})$, где $u = u(x,t)$ – функция двух переменных, $u_n = \partial^n u/\partial x^n$. В работе [4] был предложен новый подход к линеаризации более общего класса нелинейных уравнений на основе метода подстановок, аналогичных подстановкам Коула-Хопфа. Этот подход опирается на результат, полученный ранее в работе [5], который "объясняет" с достаточно общих позиций смысл наличия подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса. Основной смысл этого результата состоит в том, что уравнение Бюргерса является условием совместности семи линейных алгебраических уравнений относительно первых семи смешанных частных производных функции $T(x,t)$, являющейся решением уравнения теплопроводности: $T_t = aT_{xx}$ и переноса изолиний: $T_t + V(x,t)T_x = 0$. Здесь и далее введены обозначения $T_t = \partial T/\partial t$, $T_{xx} = \partial^2 T/\partial x^2$ и т.д. Следует отметить, что подстановки типа Коула-Хопфа ранее ассоциировались с преобразованиями Ли-Бэклунда, которые рассматриваются в рамках симметрийного подхода к теории интегрируемых нелинейных уравнений [6 – 8]. На основании такого подхода создавались списки нелинейных уравнений, допускающих бесконечные серии законов сохранения в форме дифференциальных полиномов. Однако симметрийный подход, эффективный для анализа интегрируемости, сталкивается со сложностями в случае необходимости указать способ получения решений интегрируемых уравнений в явном виде, как это имеет место в случае, когда для уравнения известно представление Лакса-Захарова-Шабата (уравнения интегрируемы с помощью метода обратной задачи рассеяния [9]) или подстановка типа Коула-Хопфа, или преобразование Бэклунда, сводящее уравнение к линейному [3, 6]. В данной работе мы показываем, что результат работы [4] можно обобщить и применить к построению более широкого класса нелинейных уравнений, линеаризуемых с помощью подстановки $V = -T_t/T_x$ типа Коула-Хопфа. Этот класс уравнений включает в качестве частного случая и класс уравнений, описанный в [3]. В частности, показано, что существуют бесконечные цепочки нелинейных уравнений с более общим типом дисперсии, чем уравнений из [3], которые также линеаризуются указанной подстановкой, которую далее мы будем называть подстановкой Коула-Хопфа-Урюкова. Важным в предлагаемом подходе является то, что новый метод позволяет преобразовывать нелинейные уравнения к другим нелинейным интегрируемым уравнениям. Примером такого рода является возможность построить на основе нового метода точные решения уравнений одномерного течения сжимаемой жидкости. Исследование этой проблемы является основной целью данной работы.

2. Следуя работе [4], рассмотрим уравнение теплопроводности с адвекцией:

$$T_t + W(x,t)T_x = a(x,t)T_{xx} \tag{1}$$

[1]e-mail: zhvictorm@mail.ru

совместно с уравнением переноса изолиний функции T:

$$T_t + V(x,t)T_x = 0. \quad (2)$$

Здесь $W(x,t)$, $a(x,t)$, $V(x,t)$ – некоторые произвольные пока функции. Последовательно дифференцируя эти два уравнения по x, t, получаем следующую систему уравнений, являющуюся их прямым следствием:

$$\begin{gathered} T_{tt} - aT_{xxt} + W_t T_x + WT_{xt} = 0, \\ T_{tt} + V_t T_x + VT_{tx} = 0, \\ T_{xt} - aT_{xxx} + W_x T_x + WT_{xx} = 0, \\ T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} = 0, \\ T_{txx} + V_{xx}T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} = 0. \end{gathered} \quad (3)$$

Совокупность уравнений (1)–(3), рассматриваемая как система алгебраических уравнений относительно первых семи частных смешанных производных функции T, оказывается замкнутой. В дальнейшем эту систему уравнений будем называть базовой. Условием ее совместности как системы линейных алгебраических уравнений является уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}U + \frac{\partial}{\partial x}(VU) - V_{xx} = 0, \quad (4)$$

где $U = (V - W)/a$. Это уравнение в дальнейшем будем называть структурным уравнением. Смысл этого результата состоит в том, что для любой функции $T(x,t)$ функции U и V, вычисляемые по формулам

$$V = -T_t/T_x, \quad U = -T_{xx}/T_x, \quad (5)$$

будут обращать уравнение (4) в тождество. Поэтому соотношения можно рассматривать как обобщенную подстановку Коула-Хопфа или подстановку Коула-Хопфа-Урюкова.

3. Основой использования подстановок типа Коула-Хопфа-Урюкова для линеаризации широкого класса нелинейных уравнений в подходе, изложенном в [4], является произвольность одной из функций T, U, V в исходных двух уравнениях (1) и (2). Это позволяет добавлять к указанной системе базовых уравнений какое-либо интегрируемое относительно функции $T(x,t)$ условие, которое автоматически будет приводить к нелинейному интегрируемому уравнению относительно функции $V(x,t)$ или $U(x,t)$ уравнению.

Для отыскания таких условий рассмотрим решение структурной системы уравнений (1), (2) и (3) относительно производных функции T, выраженное через одну из них, например, T_x:

$$\begin{gathered} T_t = -VT_x, \quad T_{xx} = -UT_x, \\ T_{xt} = -QT_x, \quad T_{tt} = -RT_x, \\ T_{xxx} = -\Big(U_x - U^2\Big)T_x, \\ T_{xxt} = -\left[U_t + U^2V - V_xU\right]T_x = \\ = -\left[V_{xx} + U^2V - 2V_xU - VU_x\right]T_x. \end{gathered} \quad (6)$$

Здесь $Q(x,t) = V_x - UV$, $R(x,t) = V_t - VV_x + V^2U$. Заметим, что в этих обозначениях структурное уравнение (4) можно записать в следующем простом виде:

$$U_t = Q_x. \quad (7)$$

Все последующие высшие производные могут быть получены из этого набора соотношений, который в дальнейшем будем называть приведенными базовыми соотношениями. Введем следующие обозначения:

$$T^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}T}{\partial x^n \partial t^k}, \qquad T^{[n,k]} = A^{nk}[V,U]T_x.$$

Коэффициенты $A^{nk}[V,U]$ являются дифференциальными полиномами от V, U и их производных. В частности,

$$\begin{gathered} A^{10} = 1, \quad A^{01} = -V, \quad A^{20} = -U, \\ A^{11} = -Q, \quad A^{02} = -R. \end{gathered} \quad (8)$$

Тогда имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{gathered} T^{[n+1,k]} = A^{nk}_x T_x + A^{nk}T_{xx} = \\ = \left[A^{n,k}_x + A^{nk}A^{20}\right]T_x = A^{n+1\ k}T_x, \\ T^{[n,k+1]} = A^{n,k}_t T_x + A^{nk}T_{xt} = \\ = \left[A^{n,k}_t + A^{n,k}A^{20}\right]T_x = A^{n\ k+1}T_t, \\ n, k = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

Отсюда находим рекуррентные соотношения для коэффициентов в решениях для высших производных:

$$\begin{gathered} A^{n+1\ k} = A^{nk}_x + A^{nk}A^{20}, \quad A^{n\ k+1} = A^{nk}_t + A^{nk}A^{11}, \\ n, k = 0, 1, 2 \ldots \end{gathered}$$

с начальными условиями (8).

4. Принцип построения уравнений, интегрируемых с помощью указанных подстановок, можно проиллюстрировать следующим образом. Пусть $C_{kn} = C_{kn}(x,t)$, $k, n = 0, \ldots, M, N$ – некоторый заданный набор функций. Тогда к системе приведенных базовых соотношений можно добавить любое линейное уравнение следующего вида:

$$\begin{gathered} \sum_{k=1,\ldots,M}\ \sum_{n=1,\ldots,N} C_{kn}T^{[k,n]} + \\ + C_{10}T_x + C_{01}T_t = 0. \end{gathered} \quad (9)$$

Это уравнение с использованием расширенной приведенной системы базовых соотношений приводит к связи между функциями V и U следующего вида:

$$\sum_{k=1,\dots,M}\sum_{n=1,\dots,N} C_{kn}A^{kn}[V,U]+ \\ +C_{10}A^{10}[V,U]+C_{01}A^{01}[V,U]=0. \tag{10}$$

Это уравнение совместно с (4) образует замкнутую систему нелинейных уравнений относительно пары функций U и V, решение которой имеет вид подстановки (5) для любой функции T, являющейся решением уравнения (9).

В качестве примеров использования этой общей схемы приведем несколько.

Пример 1

$$\begin{gathered} T_{xt}+aT_t+bT_x=0, \\ V_x-UV+aV-b=0; \\ \frac{\partial}{\partial t\partial x}\ln V+\frac{\partial}{\partial t}\left[a-\frac{b}{V}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[aV-b\right]=0. \end{gathered} \tag{11}$$

где a, b – произвольные заданные функции x,t.

Пример 2

$$\begin{gathered} T_{tt}+\gamma T_{xx}+\alpha T_t+\beta T_x=0, \\ \left[V_t-VV_x+V^2U\right]+\gamma U+\alpha V-\beta=0; \\ \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{V_t+\gamma_x/2}{\gamma+V^2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\gamma V_x-\gamma_t/2}{\gamma+V^2}\right]= \\ =\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\alpha V-\beta}{\gamma+V^2}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{V(\alpha V-\beta)}{\gamma+V^2}\right]. \end{gathered} \tag{12}$$

где α, β, γ - произвольные функции x,t.

Пример 3

$$\begin{gathered} \alpha T_{xxx}+\beta T_{xx}-\gamma T_x=T_t, \\ V=\alpha\Big(U_x-U^2\Big)+\beta U+\gamma; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha U_x+\beta U-\frac{3\alpha}{2}U^2+\gamma\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha U^3-\beta U^2-\gamma U\right)-U_t=0, \end{gathered} \tag{13}$$

где α, β, γ – произвольные функции x,t. При $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$, $\gamma=\mathrm{const}$ последнее уравнение представляет собой уравнение типа модифицированного уравнения Кортевега-де-Вриза (мКдВ) и отличается от него наличием слагаемого, содержащего вторые производные от неизвестной функции [9]. Это уравнение принадлежит общему классу уравнений, построенных в работе [3].

5. В более общем случае соотношение (9) можно заменить на произвольное нелинейное интегрируемое уравнение для T, которое в результате использования приведенных базовых соотношений сводится к связи между U и V без производных и самой функции T. Основой последующих построений является именно этот случай уравнений для T, который приводит к интегрируемым случаям уравнений течений сжимаемой жидкости.

Рассмотрим в качестве уравнения для T уравнения следующего вида:

$$\Big\{T_x,T_t\Big\}=T_{xx}T_{tt}-\Big(T_{xt}\Big)^2=0, \tag{14}$$

где введены скобки

$$\Big\{G,H\Big\}=G_xH_t-G_tH_x.$$

Этому уравнению соответствует связь

$$U\left(V_t-VV_x+V^2U\right)=(V_x-VU)^2.$$

Преобразуя последнее соотношение и объединяя его с производящим уравнением (4), получаем систему уравнений гидродинамического типа:

$$U(V_t+VV_x)=(V_x)^2\,, \tag{15}$$

$$U_t+\frac{\partial}{\partial x}\Big(UV\Big)=V_{xx}. \tag{16}$$

Умножая второе уравнение на V и складывая его с первым, эту систему можно привести к системе уравнений Эйлера одномерного течения сжимаемого газа при нулевом давлении и внешних силах:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\rho u\Big)+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho u^2\Big)=0, \\ \rho_t+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho u\Big)=0. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь плотность сжимаемого газа ρ, скорость течения газа u имеют вид

$$\rho=U, \qquad u=V-U^{-1}V_x=-Q/U. \tag{18}$$

Давление в таком потоке тождественно обращается в нуль в силу первого уравнения (15). Полезно заметить, что удельный импульс жидкости в этом случае вычисляется по формуле $q=\rho u=-Q$.

Системы уравнений (17) можно рассматривать как уравнения динамики пыли, поскольку именно пыль имеет уравнение состояние $p=0$. Такого типа задачи возникают в астрофизике при анализе динамики пылевых облаков. Эту модель можно сделать более пригодной для астрофизических приложений.

Именно для этого следует предположить, что материя представляет собой смесь газа и пыли, причем плотность газа дает малый вклад в общую плотность вещества. Давление в такой смеси целиком определяется газовой составляющей. В этом случае можно рассмотреть ситуацию, когда вся система находится в собственном поле тяготения в состоянии гидростатического равновесия. В этом случае к уравнениям (17) следует добавить уравнение гидростатического равновесия и уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 4\pi G\rho. \tag{20}$$

Здесь $n = 0, 1, 2$ соответственно для декартовой, цилиндрической и сферической симметрий распределения материи.

Уравнение (14) обращается в тождество при условии

$$T_t = H(T_x), \tag{21}$$

где $H(z)$ – произвольная дифференцируемая функция одного аргумента. После построения решения для T функции V, U и ρ, u вычисляются с помощью подстановок типа Коула-Хопфа-Урюкова:

$$\rho = U = -T_{xx}/T_x, \quad u = -T_{xt}/T_{xx}. \tag{22}$$

Сравнивая последнее уравнение с (2), интересно отметить, что если вспомогательная функция $V(x,t)$ по смыслу представляет собой скорость переноса изолиний функции T, то скорость гидродинамического потока u, согласно (22), представляет собой скорость переноса градиентов этой функции:

$$\frac{\partial}{\partial t}T_x + u\frac{\partial}{\partial x}T_x = 0.$$

6. Нетрудно видеть, что базовое соотношение (14) можно усложнить, дополняя слагаемыми, зависящими от производных T таким образом, чтобы получались вновь интегрируемые по T уравнения. В самом общем виде базовое соотношение, приводящее к системе, аналогичной (15), можно представить в следующем виде:

$$\left\{T_x, T_t - \Phi\right\} = T_{xx}T_{tt} - \left(T_{xt}\right)^2 - \Phi_t T_{xx} - \Phi_x T_{xt} = 0. \tag{23}$$

Здесь $\Phi = \Phi(x,t)$ – произвольная функция x, t. Прямой проверкой убеждаемся, что это уравнение обращается в тождество при условии

$$T_t = H(T_x) + \Phi. \tag{24}$$

Уравнения (17) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \rho_t + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u\right) = 0, \tag{25}$$

где функция p играет роль давления, которое оказывается равным

$$p = \frac{1}{U(T_x)^2}\left\{T_x, \Phi\right\} - \int \frac{1}{(T_x)^2}\left\{T_x, \Phi\right\}dx = -\frac{1}{UT_x}\left[U\Phi_t - Q\Phi_x\right] + \int \frac{1}{T_x}\left[U\Phi_t - Q\Phi_x\right]dx. \tag{26}$$

7. В физических задачах выбор функции Φ должен диктоваться уравнением состояния жидкости $p = p(\rho, \Theta)$, где Θ – температура среды. В этом случае необходимо в теорию включать и уравнение теплопроводности для Θ. Вместе с тем интерес представляют некоторые частные случаи выбора Φ, в которых выбор Φ не связан с уравнением состояния жидкости и может рассматриваться в контексте задач о динамике газопылевых смесей.

Рассмотрим Φ следующего типа:

$$\Phi = \kappa T + \nu T_{xx} + g(x,t)T_x,$$

где κ и ν – постоянные. Уравнение (24) будет иметь вид

$$T_t = H(T_x) + \kappa T + \nu T_{xx} + g(x,t)T_x. \tag{27}$$

Вычисляя давление в среде по формуле (26), приходим к следующему соотношению:

$$p = -(\kappa + g_x)u + \nu\rho u_x - g_t + \int \rho\left(g_t + g_x u - \nu\rho u_x\right)dx.$$

Подставляя это уравнение в первое уравнение (25), получаем уравнение одномерного течения вязкой жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho u^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\rho\frac{\partial}{\partial x}u\right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = (\kappa + g_x - \nu\rho^2)u_x + g_{xt} - g_t\rho + (g_{xx} - \rho g_x)u \tag{28}$$

с коэффициентами кинематической вязкости ν, динамической – $\mu = \nu\rho$ и давлением $\tilde{p}$. Выбором функции g можно добиться появления некоторых дополнительных сил в правой части. Например, при $g(x,t) = \gamma t$ в правой части уравнения появляется объемная сила с постоянной удельной величиной, аналогичная силе тяготения в однородном поле гравитации, или сила инерции в постоянно ускоренной системе отсчета, а при $g = \varepsilon x$ получаем силу, пропорциональную скорости течения, которая иногда называется силой внешнего трения. При $g = 0$ это уравнение можно рассматривать в качестве замены уравнению Бюргерса в случае сжимаемой жидкости. Таким образом, всякое решение уравнения (27) будет описывать течение жидкости или газа, плотность и скорость которого вычисляются по формулам (18).

8. Уравнения (21), (24) и (27) представляют собой первые интегралы соответствующих им гидродинамических уравнений. Вид этих первых интегралов определяет общие свойства решений данных гидродинамических уравнений. Одним из наиболее важных элементов их общего вида является наличие произвольной функции $H(T_x)$, относительно выбора которой форма гидродинамических уравнений оказывается инвариантной. Система гидродинамических уравнений имеет две неизвестные, u и ρ, в то время как уравнения (21), (24) и (27) содержат одну неизвестную функцию T. Поэтому вид функции $H(z)$ определяется начальными и граничными условиями для пары функций ρ, u.

В результате замены $T_x = w$ и последующего дифференцирования по x уравнения (21), (24) и уравнение (27) при $g = \gamma t$ приводятся к уравнениям относительно функции w. Для случая (21) это уравнение примет вид обобщенного уравнения Хопфа:

$$w_t = H'(w)w_x, \tag{29}$$

решение которого задается как неявная функция и может быть найдено из решения алгебраического уравнения

$$F\Big(w, x - H'(w)t\Big) = 0, \tag{30}$$

где $F(\xi, \tau)$ – произвольная дифференцируемая функция. Как хорошо известно, решения уравнения Хопфа являются разрывными и многозначными и описывают возникновение ударных волн в бездисперсионной среде. Проведенные выкладки дают общее представление о характере течений динамики не вязкой жидкости.

В случае вязкой жидкости уравнение для T (28) относится к классу диффузионных уравнений и при достаточно общих свойствах $H(w)$ имеет непрерывные решения. Для случая $H(w) = \alpha w + \beta w^2$, где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$, решения для T можно найти в явном виде. При $\beta = 0$ уравнение (28) является линейным диффузионным уравнением, а в случае $\beta \neq 0$ уравнение для функции $w = T_x$ является обычным уравнением Бюргерса:

$$w_t = \alpha w_x + 2\beta w w_x + \nu w_{xx}.$$

В случае $\beta = 0$ общее решение для T можно представить в виде интеграла Фурье-Лапласа:

$$T = \int\limits_C a(k) e^{\omega(k)t - ikx} dk, \tag{31}$$

где $\omega(k) = i\alpha k + \kappa - \nu k^2$, комплексная функция $a(k)$ и контур C в комплексной плоскости параметра k выбираются таким образом, чтобы функция T была вещественной. В случае $\beta \neq 0$ решение для w находится с помощью обычной подстановки Коула-Хопфа [1, 2]: $w = -(\nu/\beta)\partial_x \ln \chi$, которая линеаризует это уравнение к линейному уравнению теплопроводности относительно вспомогательной функции χ.

9. Развитый подход линеаризации нелинейных уравнений с помощью подстановок типа Коула-Хопфа-Урюкова в приложении к задачам одномерных течений сжимаемой жидкости, как было показано, дает общее представление о структуре решений этих уравнений. С помощью этого подхода получен общий первый интеграл этих уравнений и для частных случаев указаны их общие решения. Важным результатом этого явилось то, что в работе найден аналог уравнения Бюргерса для сжимаемой вязкой жидкости и указан метод вычисления точных его решений. Предложенный подход может быть распространен на более широкий класс уравнений гидродинамического типа и применен, в частности, как было показано в работе на простом примере, к задачам прикладной динамики газопылевых смесей.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект # 08-01-97013-р_поволжье_а.

---

1. J. M. Burgers, *The nonlinear diffusion equation*, Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974.
2. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, М.: Мир, 1978.
3. С. И. Спинолупов, ТМФ **65**, 303 (1985).
4. В. М. Журавлев, А. В. Никитин, Нелинейный мир **5**, 603 (2007).
5. Б. А. Урюков, Теплофизика и аэромеханика **6**, 421 (1999).
6. Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, М.: Наука, 1984.
7. А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, УМН **42**, 3 (1987).
8. В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов, ТМФ **125**, 355 (2000).
9. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, М: Наука, 1980.