Письма в ЖЭТФ, том 65, вып.3, стр.285 - 290 © 1997г. 10 февраля

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ АВТОВОЛН В АКТИВНЫХ СРЕДАХ С ДИФФУЗИЕЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В.М.Журавлев[1)]

Ульяновский государственный университет
432700 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 9 декабря 1996 г.

Исследуется класс моделей автоволн в форме нелинейных диффузионных уравнений, тесно связанных с уравнением Лиувилля и двумеризованными цепочками Тоды. Строятся и анализируются точные решения этих уравнений.

PACS: 05.70.Lm, 82.40.Bj

Исследование автоволновых процессов является одним из актуальных направлений развития теории нелинейных волновых процессов в приложении к задачам возникновения упорядоченных структур в различного типа физических, химических, биологических и т.д. системах [1-5]. Обычной моделью для таких систем является модель возбудимой среды, описывающаяся уравнениями типа "реакция-диффузия" (РД)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{U}, \tag{1}$$

где U - вектор состояния элемента среды, например, концентрации вступающих в реакцию химических веществ, $F(\mathrm{U})$ - некоторая нелинейная функция, а D - матрица коэффициентов диффузии компонент среды. Простейшей моделью такого типа, которая воспроизводит основные характерные особенности распространения автоволн, является двухкомпонентная система "активатор - ингибитор" (АИ)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,v) + D_1\Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = G(u,v) + D_2\Delta v \tag{2}$$

для случая двумерной среды: $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Условно, u - концентрация активатора, а v - ингибитора, что определяется формой 0-изоклин $F(u,v) = 0$, $G(u,v) = 0$ и связано с возможной практической реализацией таких систем в химических реакциях. Как правило, модели такого типа исследуются с помощью приближенных аналитических методов [6, 7, 4, 5] либо с помощью численного моделирования.

В настоящей работе исследуются системы типа (2) с функциями $F(u,v)$ и $G(u,v)$, имеющими вид нелинейности, аналогичный уравнению Лиувилля или двумеризованной цепочке Тоды (ДЦТ) (см., например, [8]), и многокомпонентные системы РД с аналогичного вида нелинейностью. Наиболее детально будут исследованы две системы. Первая из них имеет вид

$$F(u,v) = \mu + \frac{\nu_1 e^{u+v} - \lambda_1}{e^{-2u}}, \quad G(u,v) = -\mu - \frac{\nu_2 e^{u+v} + \lambda_2}{e^{-2v}}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \nu_1, \nu_2$ - некоторые постоянные. В дальнейшем будем называть ее системой активатор - ингибитор Тоды типа V (АИТV). Вторая система тесно

[1)]e-mail: zhuravl@themp.univ.simbirsk.su

связана с первой и имеет похожий вид:

$$F(u,v) = 2\mu + \nu_1 e^{-u} - \nu_2 e^{u} - \lambda_1 e^{-u-v} - \lambda_2 \frac{D_1}{D_2} e^{u-v}, \qquad (4)$$

$$G(u,v) = \nu_1 e^{-u} + \nu_2 e^{u} + \lambda_2 e^{u-v} - \lambda_1 \frac{D_2}{D_1} e^{-u-v},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ – те же, что и в (3), постоянные. Эту систему будем называть системой активатор-ингибитор Тоды типа N (АИТN). Тип системы определяется с точки зрения общей классификации возбудимых систем, проведенной в [5]. Так, система АИТV принадлежит к системам типа V или Λ, что определяется тремя основными типами асимптотического поведения кривых 0-изоклин $F(u,v) = 0$:

$$v = \ln\{\frac{\lambda_1}{\nu_1} e^{-u} - \frac{\mu_1}{\nu_1} e^{u}\}.$$

В случае $\lambda_1/\nu_1 > 0$, $\mu_1/\nu_1 < 0$ (3) это V-система, в случаях $\lambda_1/\nu_1 > 0$, $\mu_1/\nu_1 > 0$ и $\lambda_1/\nu_1 < 0$, $\mu_1/\nu_1 < 0$ – Λ-система, а в случае $\lambda_1/\nu_1 < 0$, $\mu_1/\nu_1 > 0$ 0-изоклина комплексная и система не имеет действительных точек равновесия. Аналогичные кривые имеют место и для уравнения $G(u,v) = 0$ с поворотом осей на 90^o. Уравнение для стационарных точек системы имеет вид

$$\mu(\mu^2 - \nu_1\nu_2)U^4 + \left[\lambda_1(\nu_1\nu_2 - 2\mu^2) + \lambda_2\nu_1^2\right] U^2 + \mu\lambda_1^2 = 0, \quad V = \lambda_1 U^{-1} - \mu U, \qquad (5)$$

где $U = e^u$, $V = e^v$. Система АИТN принадлежит к системам типа N или И в зависимости от параметров системы, что также определяется видом 0-изоклины $F(u,v) = 0$:

$$v = \ln\frac{\lambda_1 e^{-u} + \lambda_2 \frac{D_1}{D_2} e^{u}}{\nu_1 e^{-u} - \nu_2 e^{u} + 2\mu}.$$

В работе [9] был предложен простой способ построения решений уравнения Лиувилля с помощью квадратичных форм. В данной работе этот метод переносится на систему (2), что позволяет найти целый класс точных решений АИТ и исследовать их характерное поведение. Далее этот подход в общих чертах применяется к более общим многокомпонентным системам, функции $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ которых имеют вид

$$F_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = e^{-2u_i}\left(\lambda_i + e^{u_i}\sum_{k=1}^{n} \mu_{ik} e^{u_k}\right) \qquad (6)$$

или вид линейных комбинаций таких функций, где λ_i, μ_{ij} – постоянные параметры модели. Такие системы будем называть цепочками реакция-диффузия Тоды (ЦРДТ).

Системы типа (3), (4) или (6) с экспоненциальной нелинейностью, по-видимому, до сих пор в явном виде не рассматривались в теории автоволн. Это связано с тем, что большинство примеров модельных уравнений для автоволн, например, уравнения Жаботинского [10, 3, 5] (описывающие реакцию Белоусова-Жаботинского) или модель брюсселятора [11, 2, 3, 5] и тому подобное (см. [3, 5]), включают нелинейность степенного вида. Однако модели вида (6) могут иметь непосредственное отношение к моделям автоволн с термодиффузией, когда коэффициент диффузии вещества и коэффициент теплопроводности становятся нелинейными функциями параметров системы, то есть u_i [3, 5]. Действительно, уравнения (2) с (3) и (4) для функций $\Psi = e^u$

и $\Phi = e^v$ могут быть записаны в следующей форме:

$$\Psi_t - D_1\Psi \sum_{\alpha=1}^{2} \partial_\alpha \left(\frac{1}{\Psi}\partial_\alpha \Psi\right) = \mu\Psi + \frac{\nu_1\Psi\Phi - \lambda_1}{\Psi},$$

$$\Phi_t - D_2\Phi \sum_{\alpha=1}^{2} \partial_\alpha \left(\frac{1}{\Phi}\partial_\alpha \Phi\right) = -\mu\Phi - \frac{\nu_2\Psi\Phi + \lambda_2}{\Phi},$$

которая соответствует системе уравнений диффузии вещества и теплопроводности при специальном выборе зависимости коэффициентов диффузии и теплопроводности от неизвестных функций модели. С другой стороны, функции $F(v,u)$ и $G(u,v)$ в областях, где функции модели u и v близки к равновесным значениям U_0 и V_0, не сильно отличаются от нескольких первых элементов разложения этих функций в ряд Тейлора в окрестности U_0 и V_0. Поэтому их решения могут служить достаточно хорошим приближением к точным решениям для систем со степенной нелинейностью в этих областях. Таким образом, системы АИТV, АИТN и ЦРДТ могут служить одним из возможных вариантов базовых моделей (по терминологии [3]) для исследования автоволн в возбудимых средах и не зависимо от того, можно или нет найти точное их обоснование для некоторой системы реакция-диффузия, являются примером, на котором удобно изучать некоторые общие особенности поведения автоволн. Например, не трудно проверить, что системы АИТV и АИТN в зависимости от параметров могут иметь одно или два стационарных состояния (система АИТN может иметь четыре стационарных состояния) или вообще не иметь стационарных состояний. Поэтому такие системы дают возможность изучать различные варианты асимптотического поведения автоволн при наличии или отсутствии стационарных состояний и различных типах их устойчивости.

По аналогии с [9] будем искать решение системы (2)-(3) в виде

$$\begin{aligned} &u = \ln \Psi(z,\bar z,t), \quad v = \ln \Phi(z,\bar z,t),\\ &\Psi = |g(z)|^2 \left\{a_1(t)|\psi_1|^2 + b_1(t)|\psi_2|^2 + c_1(t)\psi_1(z)\psi_2^*(\bar z) + c_1^*(t)\psi_2(z)\psi_1^*(\bar z)\right\}, \\ &\Phi = |g(z)|^2 \left\{a_2(t)|\psi_1|^2 + b_2(t)|\psi_2|^2 + c_2(t)\psi_1(z)\psi_2^*(\bar z) + c_2^*(t)\psi_2(z)\psi_1^*(\bar z)\right\}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $z = x + iy$, $\bar z = x - iy$, $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z \partial \bar z}$, знак $*$ означает комплексное сопряжение, функции $a_1(t), b_1(t), a_2(t), b_2(t)$ – действительные, а $c_1(t), c_2(t)$ – комплексные функции t, функции $\psi_1(z), \psi_2(z), g(z)$ – аналитические функции комплексной переменной z. Подставляя (7) в (2), получаем следующие тождества:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_1\Delta u = -D_1\frac{|g(z)|^4(a_1b_1 - |c_1|^2)|W_{12}(z)|^2}{\Psi^2} + \\ + \frac{|g(z)|^2(\{\dot a_1|\psi_1(z)|^2 + \dot b_1|\psi_2(z)|^2 + \dot c_1\psi_1(z)\psi_2^*(\bar z) + \dot c_1^*\psi_2(z)\psi_1^*(\bar z)\}}{\Psi}; \qquad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - D_2\Delta v = -D_2\frac{|g(z)|^4(a_2b_2 - |c_2|^2)|W_{12}(z)|^2}{\Phi^2} + \\ + \frac{|g(z)|^2(\{\dot a_2|\psi_1(z)|^2 + \dot a_2|\psi_2(z)|^2 + \dot c_2\psi_1(z)\psi_2^*(\bar z) + \dot c_2^*\psi_2(z)\psi_1^*(\bar z)\}}{\Phi}; \qquad (9)$$

здесь

$$W_{12}(z) = \psi_1\frac{d}{dz}\psi_2 - \psi_2\frac{d}{dz}\psi_1$$

– определитель Вронского для двух функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$. Определитель Вронского отличен от нуля, когда функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ – линейно независимы. Поэтому будем предполагать линейную независимость этих функций. Для того чтобы выражения в правых частях тождеств (8) совпадали с (3), необходимо потребовать выполнение следующих условий:

$$a_2(t) = \dot{a}_1 - \mu_1 a_1, \quad b_2(t) = \dot{b}_1 - \mu_1 b_1, \quad c_2(t) = \dot{c}_1 - \mu_1 c_1, \tag{10}$$

$$(a_1 b_1 - |c_1|^2)D_1 = \lambda_1 = \mathrm{const}, \quad (a_2 b_2 - |c_2|^2)D_2 = \lambda_2 = \mathrm{const}, \tag{11}$$

$$|W_{12}|^2 |g|^4 = 1, \quad \mu_1 = \mathrm{const}, \quad \mu_2 = \mathrm{const}; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\dot{a}_1 - \mu_1 a_1) = -\nu_1\nu_2 a_1 + \mu_2(\dot{a}_1 - \mu_1 a_1),\\
&\frac{d}{dt}(\dot{b}_1 - \mu_1 b_1) = -\nu_1\nu_2 b_1 + \mu_2(\dot{b}_1 - \mu_1 b_1),\\
&\frac{d}{dt}(\dot{c}_1 - \mu_1 c_1) = -\nu_1\nu_2 c_1 + \mu_2(\dot{c}_1 - \mu_1 c_1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Три уравнения (13) имеют один и тот же общий вид уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{F} - (\mu_1 + \mu_2)\dot{F} + (\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2)F = 0 \tag{14}$$

с декрементом затухания $\gamma = (\mu_1 + \mu_2)/2$ и собственной частотой колебаний $\Omega = \sqrt{(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2)}$. Имеется три основных типа решений уравнения (14):

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t}(F_1 \cos(\omega t) + F_2 \sin(\omega t)), & \omega^2 > 0;\\ e^{-\gamma t}(F_1 \mathrm{ch}(\omega t) + F_2 \mathrm{sh}(\omega t)), & \omega^2 < 0;\\ e^{-\gamma t}(F_1 t + F_2), & \omega^2 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где F_1, F_2 – постоянные интегрирования, $\omega^2 = \Omega^2 - \gamma^2$. В случае $\omega^2 > 0$ можно положить

$$\begin{aligned}
a_1(t) &= e^{-\gamma t}(A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)),\\
b_1(t) &= e^{-\gamma t}(B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)),\\
c_1(t) &= e^{-\gamma t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)),
\end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 – произвольные действительные, а C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные. Тогда

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 - |c_1|^2 = e^{-2\gamma t}\big((A_1 B_2 + A_2 B_1 - C_1 C_2^* - C_2 C_1^*)\cos(\omega t)\sin(\omega t) + \\
+ (A_1 B_1 - |C_1|^2)\cos^2(\omega t) + (A_2 B_2 - |C_2|^2)\sin^2(\omega t)\big)\,.
\end{aligned}$$

Аналогичное выражение имеет место и для a_2, b_2, c_2. Для того чтобы параметры λ_1 и λ_2 были постоянными, необходимо потребовать

$$\begin{aligned}
&\gamma = (\mu_1 + \mu_2)/2 = 0, \quad A_1 B_2 + A_2 B_1 - C_1 C_2^* - C_2 C_1^* = 0,\\
&(A_1 B_1 - |C_1|^2) = (A_2 B_2 - |C_2|^2).
\end{aligned} \tag{16}$$

При этом

$$\omega = \Omega, \quad \lambda_1 = D_1(A_1 B_1 - |C_1|^2), \quad \lambda_2 = D_2(A_1 B_1 - |C_1|^2)(\Omega^2 + \mu^2),$$

где $\mu = \mu_1 = -\mu_2$ и $\Omega^2 = \nu_1\nu_2 - \mu^2$.

Соответствующий класс точных решений модели АИТV можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&u(z, \bar{z}, t) = \ln P^+(z, \bar{z}) + \ln\cos(\Omega t - \Theta_1(z, \bar{z})),\\
&v(z, \bar{z}, t) = \ln Q^+(z, \bar{z}) + \ln\cos(\Omega t + \Theta_2(z, \bar{z})),\\
&P^+(z, \bar{z}) = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}, \quad Q^+(z, \bar{z}) = \frac{1}{\nu_1}\sqrt{(\Omega H_2 - \mu H_1)^2 + (\mu H_2 + \Omega H_1)^2},
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathrm{tg}\Theta_1(z,\bar z)=\frac{H_1(z,\bar z)}{H_2(z,\bar z)},\quad \mathrm{tg}\Theta_2(z,\bar z)=\frac{\mu H_2+\Omega H_1}{\Omega H_2-\mu H_1},$$

где

$$H_1(z,\bar z)=\frac{A_1|\psi_1|^2+B_1|\psi_2|^2+C_1\psi_1\psi_2^*+C_1^*\psi_2\psi_1^*}{|W_{12}|},\qquad(18)$$

$$H_2(z,\bar z)=\frac{A_2|\psi_1|^2+B_2|\psi_2|^2+C_2\psi_1\psi_2^*+C_2^*\psi_2\psi_1^*}{|W_{12}|}$$

и постоянные $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ удовлетворяют соотношениям (16). При этом функции Ψ и Φ связаны простым соотношением

$$\Phi=\frac{1}{\nu_1}\left(\dot\Psi-\mu\Psi\right).\qquad(19)$$

Функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ – произвольные аналитические функции.

Полученные решения системы АИТV представляют собой общее решение задачи Коши для системы (2)–(3) с начальным распределением функций $u=u(z,\bar z,0)$, $v=v(z,\bar z,0)$ в виде квадратичных форм, зависящих от двух произвольных аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$. Это позволяет удовлетворять широкому классу начальных условий задачи при некоторых общих свойствах решений на бесконечности, например, $u\to\mathrm{const}, v\to\mathrm{const}$ при $r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$, – среда находится в равновесии на бесконечности.

Решения системы АИТN (2)-(4) получаются из решений системы (17) с помощью простейшего преобразования

$$\tilde u=u-v=\ln\{\frac{\Psi}{\Phi}\},\qquad \tilde v=u+v=\ln\{\Psi\Phi\},\qquad(20)$$

где $\tilde u,\tilde v$ – решения системы АИТN, а u,v – решения системы АИТV (17).

Среди всех типов решений особый интерес представляют периодические по времени решения типа спиральных волн. Решения типа спиральных волн можно получить в явном виде, если специальным образом выбрать функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, например,

$$\psi_1(z)=p_1z^m,\qquad \psi_2(z)=p_2z^n,$$

где $p_1,p_2,m\neq n$ – произвольные комплексные постоянные. Периодические по времени решения существуют при условии $\Omega^2>0$. Однако, как легко видеть, такие решения в любой точке пространства через конечный промежуток времени перестают быть ограниченными (функции Ψ и Φ меняют знак). Несингулярные решения существуют при $\Omega^2<0$:

$$u(z,\bar z,t)=\ln P^-(z,\bar z)+\ln\{\mathrm{ch}(\Omega t+\Theta_1(z,\bar z))\},$$

$$v(z,\bar z,t)=\ln Q^-(z,\bar z)+\ln\{\mathrm{ch}(\Omega t+\Theta_2(z,\bar z))\},\qquad(21)$$

$$P^-(z,\bar z)=\sqrt{H_1^2-H_2^2},\quad Q^-(z,\bar z)=\frac{1}{\nu_1}\sqrt{(\Omega H_2-\mu H_1)^2-(\mu H_2-\Omega H_1)^2},$$

$$\mathrm{th}\Theta_1(z,\bar z)=\frac{H_2(z,\bar z)}{H_1(z,\bar z)},\quad \mathrm{th}\Theta_2(z,\bar z)=\frac{\Omega H_1-\mu H_2}{\Omega H_2-\mu H_1},$$

где функции H_1,H_2 определены соотношениями (18), а функции Ψ и Φ связаны тем же соотношением (19). Решения (21) несингулярны, если несингулярны функции H_1,H_2,P^-,Q^-. Они представляют собой одну уединенную волну сложной формы. Эти выводы, полученные для АИТV, повторяются полностью и для АИТN. Поэтому для поиска систем, имеющих несингулярные периодические по времени решения, представляет интерес исследовать более общие модели типа (6).

В многокомпонентных моделях (6) несингулярные периодические решения существуют. Этот вывод можно сделать, исходя из следующих общих соображений. Рассмотрим последовательность функций $U_i = \ln\Psi_i$, где

$$\Psi_i(\zeta,\bar{z},t) = |g(z)|^2 \left\{a_i(t)|\psi_1|^2 + b_i(t)|\psi_2|^2 + c_i(t)\psi_1\psi_2^* + c_i^*(t)\psi_2\psi_1^*\right\},$$
$$i = 1,\ldots,n. \tag{22}$$

Эти функции удовлетворяют тождествам

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - D_i\Delta U_i = -D_i\frac{|g(z)|^4(a_ib_i - |c_i|^2)|W_{12}(z)|^2}{\Psi_i^2} + \tag{23}$$
$$+\frac{|g(z)|^2(\{\dot{a}_i|\psi_1(z)|^2 + \dot{b}_i|\psi_2(z)|^2 + \dot{c}_i\psi_1(z)\psi_2^*(\bar{z}) + \dot{c}_i^*\psi_2(z)\psi_1^*(\bar{z})\}}{\Psi_i}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}a_j, \quad \dot{b}_i = \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}b_j, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}c_j, \quad i = 1,\ldots,n;$$
$$(a_ib_i - |c_i|^2)f_i^2D_i = \lambda_i = \mathrm{const}, \quad |W_{12}|^2|g|^4 = 1.$$

Тогда система тождеств (23) примет вид системы уравнений ЦРДТ с нелинейностью вида (6). Уравнения для функций a_i, b_i, c_i имеют один и тот же общий вид системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В простейшем случае, когда все μ_{ij} постоянны, коэффициенты этих уравнений также постоянны. Для того чтобы существовали несингулярные периодические решения, достаточно потребовать, чтобы среди решений этих уравнений существовали решения вида

$$F_i(t) = A_i + B_i\cos(\Omega t + \phi_0),$$

причем для всех i $|A_i| > |B_i|$. Эти условия должны выполняться для a_i, b_i и c_i. Такие требования выполняются уже в случае трехкомпонентной системы. Соответствующие решения могут быть легко найдены. Однако из-за ограниченности объема статьи здесь они не приводятся.

В заключение автор благодарит С.В.Червона и В.К.Щиголева за постоянное внимание к работе.

---

1. Г.Хакен, *Синергетика*, М.: Мир, 1980.
2. И.Пригожин, *От существующего к возникающему*, М.: Наука, 1991.
3. В.А.Васильев, Ю.М.Романовский, В.Г.Яхно, *Автоволновые процессы*, под ред. Д.С.Чернавского, М.: Наука, 1987.
4. В.А.Давыдов, В.Г.Морозов, УФН **166**, 327 (1996).
5. Б.С.Кернер, В.В.Осипов, *Автосолитоны: локализованные сильно-неравновесные области в однородных диссипативных системах*, М.: Наука, 1991.
6. В.А.Давыдов, В.С.Зыков, А.С.Михайлов, УФН **161**, 45 (1991).
7. П.К.Бражник, В.А.Давыдов, А.С.Михайлов, ТМФ **74**, 440 (1988).
8. А.Н.Лезнов, М.В.Савельев, *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем*, М.: Наука, 1985.
9. В.М.Журавлев, ПММ **58**, 61 (1994).
10. А.М.Жаботинский, *Концентрационные колебания*, М.: Наука, 1974.
11. G.Nicolis, I.Prigogine, *Self-organization in non-equilibrium systems*, N.Y.: Wiley, 1977.