РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ПИСЬМА В ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ОСНОВАН В 1965 ГОДУ *ТОМ 64, ВЫПУСК 2*
ВЫХОДИТ 24 РАЗА В ГОД *25 ИЮЛЯ, 1996*

Письма в ЖЭТФ, том 64, вып.2, стр.65 - 70 © 1996г. 25 июля

НОВЫЙ КЛАСС НЕОДНОРОДНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПОЛЯМИ ЯНГА–МИЛЛСА

В.К.Щиголев[1)], *В.М.Журавлев*, *С.В.Червон*

Ульяновский государственный университет
432700 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 4 июня 1996 г.

Для калибровочной группы SO_3 получены точные решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна–Янга–Миллса, соответствующие неоднородным сферически-симметричным нестационарным метрикам Толмена.

PACS: 04.20.Jb, 04.40.-b

Исследованию статических конфигураций системы Эйнштейна–Янга–Миллса (ЭЯМ) посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [1, 2]). Значительно меньший успех достигнут в исследовании системы ЭЯМ применительно к космологическим моделям Вселенной и все основные результаты в этом направлении получены для пространств Фридмана–Робертсона–Уокера (ФРУ). Так, в [3, 4] были получены точные решения уравнений Янга–Миллса (ЯМ) на фоне однородных и изотропных метрик Фридмана. С помощью конформно-плоского представления линейного элемента и факта конформной инвариантности безмассовых полей ЯМ в работе [5] были найдены точные самосогласованные решения уравнений ЭЯМ. Однако анализ этих результатов и дополнительные исследования показывают, что сужение класса искомых сферически-симметричных решений системы ЭЯМ рамками однородных моделей Фридмана сильно ограничивает возможности понимания роли полей ЯМ в космологических процессах, особенно в эпоху очень ранней Вселенной [6]. Очевидно, что любой точечный источник полей ЯМ должен нарушать однородность пространства. В работе [7] с общих позиций (безотносительно к классу метрик) обсуждался вопрос о возможной значительной роли полей ЯМ в процессе космологической инфляции вследствие их сильной

[1)] e-mail: shchigol@themp.univ.simbirsk.su

нелинейности. Из этого следует, что для того, чтобы выяснить все основные аспекты влияния полей ЯМ на эволюцию Вселенной, необходимо по возможности максимально расширить допустимый вид метрик. Основываясь на этом, в данной работе предлагается отказаться от требований однородности пространства, сохраняя его изотропность, чтобы исследовать, как самогравитирующие поля ЯМ могут влиять на режимы раздувания Вселенной и возможен ли при этом асимптотический по времени выход структуры пространства на структуру пространств однородных изотропных пространств Фридмана, что наблюдается в настоящую эпоху.

Рассмотрим систему ЭЯМ в рамках SO_3 неабелевой калибровочной теории, описываемую действием

$$S = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\mathrm{M}} \sqrt{-g}d^4x\left\{\frac{\mathcal{R}}{2\kappa} + \frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{\nu\mu}_a\right\}. \tag{1}$$

Здесь M – псевдориманово пространство-время сигнатуры $(+---)$, $g = \det(g_{\alpha\beta})$ – определитель метрического тензора, $\mathcal{R}$ – скалярная кривизна,

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + ief^a_{bc}W^b_\mu W^c_\nu, \tag{2}$$

W^a_μ – изотриплет полей ЯМ SO_3-модели, e – характеристическая постоянная, f^a_{bc} – структурные константы группы SO_3, $\kappa = 8\pi G$. Уравнения Эйлера–Лагранжа для действия (1) имеют вид

$$G^\alpha_\beta = \mathcal{R}^\alpha_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta\mathcal{R} = \kappa T^\alpha_\beta, \tag{3}$$

$$D_\beta(\sqrt{-g}F^{a\alpha\beta}) = 0, \tag{4}$$

где $\mathcal{R}^\alpha_\beta$ – тензор Риччи, G^β_α – тензор Эйнштейна, D_β – ковариантная производная, а тензор энергии-импульса (ТЭИ) полей ЯМ равен

$$T^\alpha_\beta = \frac{1}{4\pi}\left(F^{a\alpha\mu}F^a_{\beta\mu} - \frac{1}{4}\delta^\alpha_\beta F^{a\mu\nu}F^a_{\mu\nu}\right). \tag{5}$$

Сферически-симметричные космологические модели описываются метриками, для которых интервал пространства-времени имеет следующий общий вид:

$$ds^2 = dt^2 - U(r,t)dr^2 - V(r,t)d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \tag{6}$$

записанный в сопутствующей синхронной системе координат. Для полей ЯМ общий сферически-симметричный анзац может быть записан в виде

$$W^a_i = \varepsilon_{iab}x^b\frac{K(r,t)-1}{er^2} + \delta^a_i\frac{S(r,t)}{er} + x^a x_i\frac{T(r,t)}{er}, \tag{7}$$
$$W^a_0 = x^a\frac{W(r,t)}{er}, \quad \Phi^a = x^a\frac{H(r,t)}{er}, \quad T(r,t) = -\frac{S(r,t)}{r^2}.$$

Здесь и далее $\mu,\nu = 0,\ldots,3$, $i,j = 1,2,3$, $a,b = 1,2,3$; функции K,S,T,W,H – неизвестные.

После введения ортонормированного изорепера

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),\\ \mathbf{l} &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),\\ \mathbf{m} &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\end{aligned} \tag{8}$$

и перехода к сферическим координатам, анзац (7) приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}_1 = 0, \\
&\mathbf{W}_2 = e^{-1}\left\{(K-1)\mathbf{m} + S\mathbf{l}\right\}, \\
&\mathbf{W}_3 = e^{-1}\left\{-(K-1)\mathbf{l} + S\mathbf{m}\right\}, \\
&\mathbf{W}_0 = e^{-1}W\mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{9}$$

В результате имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F}_{01} = -\mathbf{F}_{10} = -e^{-1}W'\mathbf{n}, \\
&\mathbf{F}_{02} = -\mathbf{F}_{20} = e^{-1}\left((\dot{K} + WS)\mathbf{m} + (\dot{S} - WK)\mathbf{l}\right), \\
&\mathbf{F}_{03} = -\mathbf{F}_{30} = e^{-1}\left(-(\dot{K} + WS)\mathbf{l} + (\dot{S} - WK)\mathbf{m}\right)\sin\theta \\
&\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = e^{-1}\left(K'\mathbf{m} + S'\mathbf{l}\right), \\
&\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32} = e^{-1}\sin\theta\left(K^2 - 1 + S^2\right)\mathbf{n}, \\
&\mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31} = e^{-1}\sin\theta\left(-K'\mathbf{l} + S'\mathbf{m}\right)\sin\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь и далее введены обозначения $(\dot{\ }) \equiv \partial/\partial t$, $(\ ') \equiv \partial/\partial r$. Для анализа системы уравнений ЭЯМ удобно также ввести новые поля $A(r,t)$, $B(r,t)$ и $\phi(r,t)$ с помощью формул

$$K(r,t) = A(r,t)\sin\phi(r,t), \quad S(r,t) = A(r,t)\cos\phi(r,t), \quad B(r,t) = \dot{\phi}(r,t) + W(r,t). \tag{11}$$

После соответствующих преобразований система ЭЯМ приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}
&G_0^0 = \kappa T_0^0 = \frac{\kappa}{4\pi e^2}\left[\frac{W'^2}{2U} + \frac{\dot{A}^2 + A^2B^2}{V} + \frac{A'^2 + A^2\phi'^2}{UV} + \frac{(A^2-1)^2}{2V^2}\right], \\
&G_1^1 = \kappa T_1^1 = \frac{\kappa}{4\pi e^2}\left[\frac{W'^2}{2U} - \frac{\dot{A}^2 + A^2B^2}{V} - \frac{A'^2 + A^2\phi'^2}{UV} + \frac{(A^2-1)^2}{2V^2}\right], \\
&G_2^2 = G_3^3 = \kappa T_2^2 = \kappa T_3^3 = \frac{\kappa}{4\pi e^2}\left[-\frac{W'^2}{2U} - \frac{(A^2-1)^2}{2V^2}\right], \\
&G_0^1 = \kappa T_0^1 = \frac{\kappa}{4\pi e^2}\left[2\frac{A'\dot{A} + A^2B\phi'}{V}\right],
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{U}\dot{A}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{U}}A'\right) + \sqrt{U}\left(\frac{(\phi')^2}{U} - B^2 + \frac{A^2-1}{V}\right)A = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{U}AB\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{U}}A\phi'\right) + \sqrt{U}\dot{A}B - \frac{1}{\sqrt{U}}A'\phi' = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V}{\sqrt{U}}W'\right) - 2\sqrt{U}A^2B = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

где G^α_β – известные выражения, полученные для метрики (6).

Рассмотрим класс точных решений уравнений ЭЯМ, соответствующий редукции $A(r,t) = 0$, которая эквивалентна условию

$$K(r,t) = S(r,t) = 0.$$

Это требование не означает, что поле ЯМ отсутствует. Как ясно из (9), ненулевыми компонентами поля ЯМ являются следующие:

$$\mathbf{W}_0 = e^{-1} W \mathbf{n}, \quad \mathbf{W}_2 = -e^{-1} \mathbf{m}, \quad \mathbf{W}_3 = e^{-1} \mathbf{l};$$

при этом ненулевые компоненты тензора напряженности равны

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{01} &= -\mathbf{F}_{10} = -e^{-1} W' \mathbf{n}, \\ \mathbf{F}_{23} &= -\mathbf{F}_{32} = e^{-1} \sin\theta \left(K^2 - 1 + S^2\right) \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{14}$$

Система ЭЯМ (12),(13) при $A \equiv 0$ сильно упрощается. Обратим внимание на то, что в этом случае

$$G_0^1 \equiv \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{V'\dot{U}}{2UV} = 0.$$

Это уравнение разрешается и приводит к связи между функциями U и V: $\sqrt{U} = (\sqrt{V})'/f(r)$, где $f(r)$ – произвольная функция от r. Данный класс метрик представляет собой хорошо известные метрики Толмена [11] с интервалом

$$ds^2 = dt^2 - \frac{(R')^2}{f^2} dr^2 - R^2 d\Omega^2, \tag{15}$$

где $R = R(r,t) > 0$ – некоторая функция, требующая определения. Например, при $R(r,t) = a(t)g(r), f(r) = g'(r), g(r) = \{\sin r, r, \mathrm{sh} r\}$ метрика Толмена совпадает с метрикой Фридмана. В общем случае метрики Толмена соответствуют неоднородным космологическим моделям.

Для (15) можно получить следующие выражения для тензора Эйнштейна:

$$G_0^0 = \frac{F'}{2R'R^2}, \quad G_1^1 = \frac{\dot{F}}{2\dot{R}R^2}, \quad G_2^2 = G_3^3 = \frac{1}{4R'R}\left(\frac{\dot{F}}{\dot{R}}\right)', \tag{16}$$

где

$$F(r,t) = 2R\dot{R}^2 + 2R(1 - f^2). \tag{17}$$

Из закона сохранения $T^\beta_{\alpha;\beta} = 0$, записанного в метрике Толмена (15), вытекают следующие уравнения:

$$T_2^2 = T_1^1 + \frac{R}{2R'}\left(T_1^1\right)', \tag{18}$$

$$R^2\{(\dot{T_0^0})R' - (T_1^1)'\dot{R}\} + (T_0^0 - T_1^1)\frac{\partial}{\partial t}(R^2 R') = 0. \tag{19}$$

С учетом соотношений (15)-(19) уравнения (13) сводятся к одному уравнению, из которого следует

$$W' = eq(t)\frac{R'}{fR^2}, \tag{20}$$

где $q(t)$ – произвольная функция t. Из уравнений (12) теперь находим

$$T_0^0 = T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = (8\pi)^{-1} Q^2 R^{-4}, \tag{21}$$

где $Q^2 = q^2 + g^2$, $g = e^{-1}$. Подстановка компонент ТЭИ в уравнение (18) обращает его в тождество для произвольной функции $R(r,t)$, а уравнение (19) приводит лишь к требованию $Q = \mathrm{const}$, что эквивалентно требованию $q = \mathrm{const}$.

Уравнения Эйнштейна (12) после проведенных вычислений и учета (16) сводятся к трем уравнениям:

$$F' = \frac{\kappa}{4\pi}Q^2\frac{R'}{R^2}, \quad \dot{F} = \frac{\kappa}{4\pi}Q^2\frac{\dot{R}}{R^2}, \quad \left(\frac{\dot{F}}{\dot{R}}\right)' = -2\frac{\kappa}{4\pi}Q^2\frac{\dot{R}}{R^3}, \tag{22}$$

последнее из которых является следствием первых двух. Первые же два уравнения приводят к одному уравнению для функции $R(r,t)$:

$$(R\dot{R})^2 = (f^2-1)R^2 + \delta R - GQ^2. \tag{23}$$

Как и в стандартной модели Толмена [12], решения распадаются на три отдельных класса в соответствие с условиями: $f^2 = 1$, $f^2 > 1$, $f^2 < 1$.

1. *Параболическая модель* ($f^2 = 1$). В этом случае решения для $R(r,t)$ можно представить в виде

$$R(r,t) = R^p(r,t) = \delta^{-1}GQ^2 + \delta^{-1}\left[X_+^{1/3}(r,t) + X_-^{1/3}(r,t)\right]^2, \tag{24}$$

где $\delta = \mathrm{const} > 0$

$$X_\pm(r,t) = Ht - \beta(r) \pm \sqrt{G^3Q^6 + (Ht-\beta(r))^2}, \quad H = \pm 3\delta^2/4.$$

Здесь и далее $\beta(r)$ – произвольная дифференцируемая функция r.

2. *Гиперболическая модель* ($f^2 > 1$). Общий интеграл уравнения (23) для $R = R^h(r,t)$ может быть записан в виде

$$t - \beta(r) = (f^2-1)^{-1}\left[(f^2-1)R^2 + \delta R - GQ^2\right]^2 -$$
$$-\frac{\delta}{2}(f^2-1)^{-3/2}\ln\left\{2(f^2-1)^{1/2}\left[(f^2-1)R^2 + \delta R - GQ^2\right]^{1/2} + 2(f^2-1)R + \delta\right\}. \tag{25}$$

В частном случае, $\delta = 0$, решение для R может быть найдено в явном виде. Именно,

$$R(r,t) = R_0^h(r,t) = (f^2-1)^{1/2}\left[(f^2-1)(t-\beta(r))^2 + GQ^2\right]^{1/2}. \tag{26}$$

3. *Эллиптическая модель* ($f^2 < 1$). Вещественное решение для $R(r,t) = R^e(r,t)$ существует, если

$$\delta > 0, \quad \delta^2 \le 4GQ^2, \quad 1 - \delta^2(4GQ^2)^{-1} < f^2 < 1.$$

В этом случае общий интеграл может быть записан в виде

$$t - \beta(r) = (f^2-1)^{-1}\left[-(f^2-1)R^2 + \delta R - GQ^2\right]^2 +$$
$$+\frac{\delta}{2}(f^2-1)^{-3/2}\arcsin\left\{\frac{\delta - 2(f^2-1)R}{[(f^2-1)R^2 + \delta R - GQ^2]^{1/2}}\right\}. \tag{27}$$

Полученные решения соответствуют пространству-времени, заполненному полем ЯМ, имеющему только радиальную электрическую $\mathcal{E}_r$ и только радиальную магнитную $\mathcal{B}_r$ составляющие вида

$$\mathcal{E}_r = \mathbf{F}_{\mathbf{r}0} = q\frac{R'}{fR^2}\mathbf{n}, \quad \mathcal{B}_r = -\frac{1}{2}\sqrt{q^*}\varepsilon_{rjk}\mathbf{F}^{\mathbf{jk}} = g\frac{R'}{fR^2}\mathbf{n},$$

где $g^* = \det(g_{ij}) = R^4 R'^2 \sin^2\theta / f^2(r)$. Отсюда видно, что постоянные q и g имеют смысл величин электрического и магнитного зарядов соответственно.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке НУЦ "Космион" в рамках проекта "Космомикрофизика".

---

1. Д.В.Гальцов, *Частицы и поля в окрестности черных дыр*, М.: Изд. МГУ, 1986.
2. J.A.Smoller, A.G.Wasserman, S.-T.Yan, and J.B.McLeod, Commun. Math. Phys. **143**, 115 (1991).
3. В.Н.Понамарев, А.А.Цейтлин, ЯФ **29**, 539 (1979).
4. V.N.Melnikov and V.K Shchigolev, Lett. Nuovo Cim. **39**, 354 (1984).
5. J.Cervero and L.Jacobs, Phys. Lett. **78B**, 4, 427 (1978).
6. А.Д.Линде, *Физика элементарных частиц и инфляционная космология*, М.: Наука, 1990.
7. С.В.Червон, В.К.Щиголев, В.М.Журавлев, Изв.Вуз.: Физика **2**, 41 (1996).
8. С.Вайнберг, *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1975.
9. C.Gu, H.Hu, Commun. Math. Phys. **79**, 75 (1981).
10. A.Krasinski, *Physics in an inhomogeneous universe*, Warsaw 1993.
11. Д.В.Гальцов, Ю.В.Грац, В.Ч.Жуковский, *Классические поля*, М.: Изд. МГУ, 1991.
12. Р.Толмен, *Относительность, термодинамика и космология*, М.: Наука, 1974.