Письма в ЖЭТФ, том 61, вып.4, стр.254 - 258

ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМАЯ МОДЕЛЬ ТРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

В.М.Журавлев

Филиал МГУ им.М.В.Ломоносова

432700 Ульяновск, Россия[1)]

Поступила в редакцию 2 ноября 1994 г.

После переработки 12 января 1995 г.

С помощью тождества Лагранжа для сопряженных уравнений строится представление Лакса для точно интегрируемой модели трехволнового взаимодействия в неоднородной среде с четырьмя произвольными функциональными параметрами – групповыми скоростями и коэффициентами преломления двух первичных волн.

Модель трехволнового взаимодействия (3ВВ) в настоящее время часто используется для описания процессов взаимодействия почти гармонических волн в нелинейной среде с квадратичной нелинейностью, например в нелинейной оптике [1]. Широкое использование данной модели связано с ее точной интегрируемостью в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [2] для ряда интересных с точки зрения приложений ситуаций, например, генерация второй гармоники [1] и т.п. Вместе с тем, как правило, применение модели 3ВВ ограничивается случаем однородной среды, поскольку в неоднородной среде условие интегрируемости не выполняется в общем случае и решения с начальными условиями в виде солитонов быстро разрушаются. Этот факт справедлив не только для модели 3ВВ, но и для других точно интегрируемых моделей. Поэтому представляет интерес следующая задача: исследовать, в какого типа неоднородной среде солитоны могут существовать, не разрушаясь, для каждого типа точно интегрируемых моделей. В настоящей работе такая задача решается для модели 3ВВ. Попутно удается решить задачу об общей форме нелинейности, при которой уравнение 3ВВ имеют представление Лакса и допускают решение в форме солитонов.

В качестве исходной системы уравнений рассмотрим пару уравнений вида

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + v_i(x,t)\frac{\partial a_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} w_{ij}a_j. \qquad (1)$$

Здесь a_1 и a_2 – амплитуды двух "первичных" волн, распространяющихся в среде с групповыми скоростями v_1 и v_2, соответственно. Матрица $\mathbf{W}$ 2×2 с элементами w_{ij} описывает свойства среды и в том числе самовоздействие и взаимодействие этих волн. В результате взаимодействия первичных волн в нелинейной среде в общем случае будут генерироваться волны, распространяющиеся с другими групповыми скоростями. В самом простом случае будет генерироваться только одна волна с амплитудой a_3 и групповой скоростью v_3. Динамика этой волны будет определяться как свойствами среды, так и амплитудами и параметрами двух первых волн. Рассмотрим задачу описания всех типов сред, в которых динамика трех взаимодействующих волн такова,

[1)]e-mail: guravlev@ftf.univ.simbirsk.su

что совокупность уравнений (1) имеет представление Лакса и, следовательно, возможно существование волн типа солитонов.

Для решения этой задачи совместно с уравнениями (1) рассмотрим сопряженную систему уравнений

$$-\frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \frac{\partial (v_i(x,t)\phi_i)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} w_{ji}\phi_j. \tag{2}$$

Здесь ϕ_i – функции, сопряженные к функциям a_i. Умножая уравнения (1) скалярно на ϕ_i слева, а уравнения (2) скалярно на a_i справа и вычитая полученные соотношения, приходим к обобщенному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2}\phi_i a_i + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{2} v_i(x,t)\phi_i a_i = 0, \tag{3}$$

который автоматически выполняется, если

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2}\phi_i a_i, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2} v_i(x,t)\phi_i a_i \tag{4}$$

для произвольной дифференцируемой функции $\psi(x,t)$. Появление закона сохранения при комбинировании сопряженных уравнений есть следствие обобщенного тождества Лагранжа.

Рассмотрим вспомогательную вектор-функцию $\Psi = \mathrm{colon}(\psi, \phi_1, \phi_2)$ и дополнительные матрицы 2×2 с элементами b_{ij} и вектор c_i, такие, что

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2} b_{ij}\phi_j + c_i\psi. \tag{5}$$

Тогда совокупность уравнений (2), (4) и (5) может быть представлена в виде двух уравнений относительно вектор-функции Ψ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi = \mathbf{U}\Psi, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \mathbf{V}\Psi, \tag{6}$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – две матрицы размерности 3×3, имеющие вид

$$\mathbf{U}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ c_1 & b_{11} & b_{12} \\ c_2 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1 a_1 & v_2 a_2 \\ v_1 c_1 & d_{11} & d_{12} \\ v_2 c_2 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $d_{ij} = w_{ji} + v_i b_{ij} + v_{i,x}\delta_{ij}$, $i,j = 1,2$. Совокупность уравнений (2) и (4) содержит в себе исходную систему уравнений (1), поэтому дополнительные соотношения (5), не вносящие никаких дополнительных ограничений на вид функций ϕ_i, ψ и a_i, приводят к тому, что вся совокупность уравнений (6) содержит в себе исходную систему уравнений (1). Отсюда следует, что условием совместности системы (6), которое может быть записано в форме условия "нулевой кривизны" Захарова–Шабата [2]

$$\mathbf{U}_t - \mathbf{V}_x + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] = 0, \tag{8}$$

где [,] – обычный матричный коммутатор, является исходное уравнение и некоторый дополнительный набор уравнений на вспомогательные функции b_{ij} и c_i. Вид этих уравнений устанавливается с помощью явного вычисления условий (8). Таким образом, уравнения (6) – (8) образуют некоторый аналог представления Лакса исходной системы уравнений.

Чтобы (6) – (8) в точности являлись представлением Лакса, в матрицах (7) должен содержаться произвольный комплексный параметр λ, превращающий систему (6) в нетривиальную систему двух спектральных задач с λ в качестве спектрального параметра, от которого не зависят неизвестные функции a_i исходного уравнения. Эти условия выполняются, если предположить, что от λ зависят только вспомогательные функции b_{ij} и c_i. Наиболее простой случай такой зависимости соответствует предположению

$$b_{11} = P_1(x,t)\lambda + R_{1x}(x,t), \qquad b_{22} = P_2(x,t)\lambda + R_{2x}(x,t) \tag{9}$$

при условии, что b_{12}, b_{21} и c_i от λ не зависят. Подстановка (9) в (8), замена $a_k \to ia_k$ и дополнительная редукция

$$a_k^* = ic_k, \qquad b_{12} = b_{21}^* = ia_3 \tag{10}$$

приводят к следующей системе комплексных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial(v_1(x,t)a_1)}{\partial x} + iN_1(x,t)a_1 = iQ_1(x,t)a_2a_3^*,\\
&\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial(v_2(x,t)a_2)}{\partial x} + iN_2(x,t)a_2 = iQ_2(x,t)a_1a_3,\\
&\frac{\partial a_3}{\partial t} + \frac{\partial(v_3(x,t)a_3)}{\partial x} + iN_3(x,t)a_3 = iQ_3(x,t)a_2a_1^*,
\end{aligned} \tag{11}$$

имеющий вид обобщенных уравнений ЗВВ. Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
v_3(x,t) = v_1(x,t) + Q_2(x,t) = v_2(x,t) + Q_1(x,t),\\
Q_2(x,t) = (v_1 - v_2)P_2/(P_1 - P_2) = (v_3 - v_1),\\
Q_1(x,t) = (v_1 - v_2)P_1/(P_1 - P_2) = (v_3 - v_2),\\
Q_3(x,t) = Q_1 - Q_2 = (v_1 - v_2),\\
N_1(x,t) = \mathrm{D}_1R_1 \equiv R_{1t} + v_1R_{1x},\\
N_2(x,t) = \mathrm{D}_2R_2 \equiv R_{2t} + v_2R_{2x},\\
N_3(x,t) = (v_1 - v_2)(R_{2x} + Q_2(R_{2x} - R_{1x})) + \mathrm{D}_2R_2 - \mathrm{D}_1R_1,
\end{gathered} \tag{12}$$

Функции N_1, N_2 и N_3 в оптической интерпретации данной модели соответствуют коэффициентам преломления волн в среде, которые здесь оказываются функциями координат и времени. Функции Q_1, Q_2 и Q_3 описывают неоднородность нелинейных свойств среды. В (12) функции $R_1(x,t)$ и $R_2(x,t)$ полностью произвольны, а функции $P_1(x,t)$ и $P_2(x,t)$ связаны с функциями $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ (групповыми скоростями двух первых волн) двумя соотношениями

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_1(x,t)P_1) = 0, \qquad \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_2(x,t)P_2) = 0. \tag{13}$$

Поэтому любые две функции из четырех $P_1(x,t)$, $P_2(x,t)$, $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ также произвольны.

Функции w_{ij} в этих обозначениях будут иметь следующий вид:

$$w_{12} = Q_1 a_3^*, \quad w_{21} = Q_2 a_3, \quad w_{11} = -\mathrm{D}_1 R_1 - v_{1x}, \quad w_{22} = -\mathrm{D}_2 R_2 - v_{2x}.$$

Вся совокупность соотношений определяет вид матриц U и V представления (6) – (8), при котором оно является истинным представлением Лакса. В результате имеется возможность воспользоваться МОЗР для построения точных решений этих уравнений.

Однако непосредственное применение МОЗР к полученной системе уравнений оказывается сложным в общем случае. Систему (11) можно привести к более простому виду. Это делается с помощью преобразования

$$(x,t) \to (\theta_1(x,t), \theta_2(x,t)), \tag{14}$$

$$a_k(x,t) \to A_k(\theta_1(x,t), \theta_2(x,t)), \quad k = 1,2,3,$$

где

$$A_1(\theta_1(x,t),\theta_2(x,t)) = \frac{a_1}{P_1} e^{iR_1}, \qquad A_2(\theta_1(x,t),\theta_2(x,t)) = \frac{a_2}{P_2} e^{iR_2}, \tag{15}$$

$$A_3(\theta_1(x,t),\theta_2(x,t)) = \frac{a_3}{P_1 - P_2} e^{i(R_2 - R_1)}.$$

Здесь в качестве новых независимых переменных выбраны θ_1 и θ_2, связанные с P_1 и P_2 соотношениями

$$\partial_x \theta_1 = P_1, \quad \partial_x \theta_2 = P_2$$

и следовательно, удовлетворяющие уравнениям

$$\partial_x \theta_1 + v_1 \partial_x \theta_1 = 0, \qquad \partial_t \theta_2 + v_2 \partial_x \theta_2 = 0.$$

В результате система (11) приводится к виду

$$\frac{\partial A_1}{\partial \theta_2} = i A_2 A_3^*, \qquad \frac{\partial A_2}{\partial \theta_1} = i A_1 A_3, \qquad \frac{\partial A_3}{\partial \theta_1} + \frac{\partial A_3}{\partial \theta_2} = i A_1 A_2^*. \tag{16}$$

Эта система является одним из вариантов стандартной системы ЗВВ, соответствующей $v_1 = \mathrm{const}$, $v_2 = \mathrm{const}$, R_1, $R_2 = 0$. Поэтому солитонные решения могут быть построены сначала непосредственно для системы (16) (простейшие решения рассмотрены, например, в [1]), а затем, с помощью обратного к (14), (15) преобразования можно найти амплитуды исходного уравнения в неоднородной среде.

Полученная система позволяет исследовать поведение солитонов ЗВВ в неоднородной среде, свойства которой определяются четырьмя произвольными действительными функциями N_1, N_2, v_1 и v_2. В силу произвольности эти функции могут содержать зависимость от амплитуд волн в среде и, следовательно, среда может иметь нелинейные свойства, отличные от обычно рассматриваемых в рамках точно интегрируемой модели ЗВВ. При этом интегрируемость этих уравнений с помощью МОЗР сохраняется. Пусть $R_i = R_i(x,t,a_1,a_2,a_3)$, $v_i = v_i(x,t)$, $i = 1,2$ с произвольной функциональной зависимостью v_i от x,t, а

R_i еще и от a_k. Пусть далее A_1, A_2, A_3 – есть некоторые решения уравнений (16), а P_1, P_2, $P_3 = P_2 - P_1$ – решения уравнений (13). Тогда, согласно (15), $|a_k| = |A_k|P_k$, а функции $\arg(a_k)$, находятся из решения системы, вообще говоря, трансцендентных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\arg(A_1) &= \arg(a_1) + R_1(x,t,a_1,a_2,a_3),\\ \arg(A_2) &= \arg(a_2) + R_2(x,t,a_1,a_2,a_3),\\ \arg(A_3) &= \arg(a_3) + R_2(x,t,a_1,a_2,a_3) - R_2(x,t,a_1,a_2,a_3).\end{aligned} \tag{17}$$

В случае, когда $v_i = v_i(x,t,a_1,a_2,a_3)$, то есть содержат зависимость от амплитуд a_k, последняя система алгебраических уравнений должна решаться совместно с уравнениями (13), что сильно усложняет задачу анализа динамики солитонов.

Наиболее простой случай нетривиального использования полученного представления для исследования физических задач, для которого можно достаточно просто найти решения системы (17), соответствует зависимости $R_i = R_i(x,t,|a_1|,|a_2|,|a_3|)$, то есть зависимости только от модулей амплитуд. Примером такой системы может служить обобщенный аналог массивной модели Тирринга [3]. Положим

$$\begin{aligned}N_1(x,t) &\equiv \mathrm{D}_1 R_1 = n_1(a_1,a_2,a_3),\\ N_2(x,t) &\equiv \mathrm{D}_2 R_2 = n_2(a_1,a_2,a_3).\end{aligned}$$

Тогда, выбирая $n_1 = |a_2|^2 + m_1$ и $n_2 = |a_1|^2 + m_2$ при условии m_1, $m_2 = \mathrm{const}$, $v_1 = v_2 = \mathrm{const}$ и $a_3 \equiv 0$, получаем систему, эквивалентную массивной модели Тирринга, которая интегрируется с помощью МОЗР [3]. Заметим также, что в случае $R_i = R_i(x,t,|a_1|,|a_2|,|a_3|)$, решение уравнений (13) производится независимо от (17), даже когда v_1, v_2 содержат зависимость от амплитуд a_k. Модели такого типа рассматривались в [1], и в ряде случаев они могут быть полностью проанализированы в рамках данного подхода.

В заключение заметим, что данный подход распространяется на случай взаимодействия N волн в неоднородной среде. Для этого необходимо в качестве исходной задачи (1) рассматривать задачу о распространении в нелинейной неоднородной среде n "первичных" волн. В этом случае окончательная модель будет соответствовать задаче о взаимодействии $N = n(n+1)/2$ волн, а представление Лакса будет реализовано на матрицах размерности $(n+1)\times(n+1)$ и содержать $2n$ произвольных функциональных параметров (n групповых скоростей и n показателей преломления для первичных волн). В качестве "первичной" модели распространения волн в среде могут рассматриваться и другие, например с квадратичным законом дисперсии. Уравнения этих моделей также могут быть включены в предложенную выше схему построения представлений Лакса, основанную на тождестве Лагранжа.

1. А.П.Сухоруков, Нелинейные волновые процессы взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988.
2. В.Е.Захаров, С.В.Манаков, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский, Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
3. Е.А.Кузнецов, А.Б.Михайлов, ТМФ **30**, 193 (1977).